Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 1
Übungsblatt 10

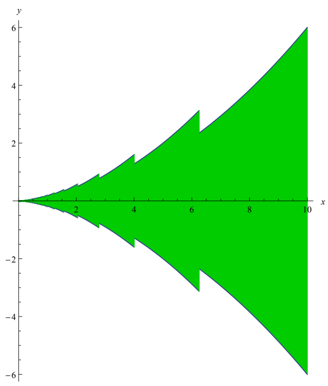
Aufgabe 1:

Die Funktion $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingung

$$|f(x)| \leq \frac{x^2 \left[\frac{10}{\sqrt{x}}\right]}{50}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0.$$



Aufgabe 2: Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0, 1)$ gibt, so dass $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

Hinweis: Zwischenwertsatz für $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *mit* $g(x) = f(x + 1) - f(x)$.

Aufgabe 3: (a) Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt

$$|\exp(x) - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1 - |x|} - 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion exp in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

Aufgabe 4: Berechnen Sie alle Asymptoten von:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-(n_4 - 6), (n_4 - 6)\} \to \mathbb{R}$, mit

$$f_1(x) = \frac{x^2 + (n_5 - 3)}{x^2 - (n_4 - 6)^2}$$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-(n_3 - 4), (n_3 - 4)\} \to \mathbb{R}$, mit

$$f_2(x) = \frac{(n_2 - \frac{5}{2})x^3 + 2|x|^3}{x^2 - (n_3 - 4)^2}$$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{2n_5, 2n_6 - 7\} \to \mathbb{R}$, mit

$$f_3(x) = (x - n_3)\exp\left(\frac{x + n_4 + 1}{(x - 2n_5)(x - (2n_6 - 7))}\right)$$

Aufgabe 5 (0 Punkte): Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $T > 0$, wenn

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \;:\; f(x+T) = f(x).$$

(Beispiel: Die Funktion $\sin(x)$ hat als Perioden $2\pi, 4\pi, \ldots$ und als kleinste Periode 2π.)

(a) Seien $T_1 < T_2$ zwei Perioden von f. Zeigen Sie, dass $T_2 - T_1$ eine Periode von f ist.

(b) Überlegen Sie sich, dass wenn $P := \{T > 0\ ;\ T \text{ Periode von } f\}$ kein Minimum hat, es eine streng monoton fallende Folge $T_n \in P$ gibt, die gegen das Infimum von P konvergiert.

Konstruieren Sie damit eine Folge von Perioden von f, die gegen Null konvergiert. Nutzen Sie dazu Teil (a) und die Tatsache, dass T_n eine Cauchyfolge ist.

(c) Sei f stetig und das Infimum von P sei Null. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede nichtkonstante stetige Funktion f eine kleinste (positive) Periode hat.

(e) (unbewertet) Gilt das auch für nichtstetige Funktionen?

Jede Zahl im Intervall $[0,1]$ kann man auf Basis 3 schreiben als $(0.a_1a_2a_3a_4\cdots)_\mathbf{3}$ mit $a_k \in \{0,1,2\}$:

$$(0.a_1a_2a_3a_4\cdots)_\mathbf{3} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}.$$

Auf Basis 2 hat man eine ähnliche Schreibweise. In der nächsten Aufgabe definieren wir eine Funktion unter Verwendung verschiedener Basen.

Aufgabe 6 (0 Punkte): Wir definieren $f : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$f\left((0.a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}a_{k+2}\cdots)_\mathbf{3}\right) = \left(0.\tfrac{a_1}{2}\tfrac{a_2}{2}\cdots\tfrac{a_{k-1}}{2}100\cdots\right)_\mathbf{2}, \qquad (\clubsuit)$$

wenn a_k die erste Ziffer ist, die gleich 1 ist. Wenn alle $a_n \neq 1$ sind, dann setzt man rechts in $(\clubsuit)$ an der n-ten Stelle $\frac{a_n}{2}$ für alle n.

(a) Berechnen Sie $f(\frac{1}{3})$.

(b) Beweisen Sie, dass f surjektiv ist.

(c) Beweisen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Blatt 9, Aufgabe 5

(d) Berechnen Sie $f(\frac{1}{4})$.