Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 1
Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^3$. Berechnen Sie f', f'', f''' und f^{iv} an den Stellen wo sie definiert sind.

Aufgabe 2: Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beschreiben Sie die folgenden Funktionen nur mit f, g und h, und Ableitungen von f, g und h.

(a) $(fgh)'(x) = \dots$

(b) $(f \circ g \circ h)'(x) = \dots$

(c) $\left((f+g)' \circ h\right)'(x) = \dots$

(d) $(f \circ g)'''(x) = \dots$

Bemerkung: $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *und* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ wohldefiniert ist.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert $f'(x)$?

(c) Zeigen Sie, dass $xf''(x) + f'(x) = \frac{1}{1-x}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 4: Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) $g'(0) = 0$;

(b) $\lim_{x \to 0} g'(x)$ nicht existiert.

Aufgabe 5: Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bei der nicht gilt, dass

$$h'_+(0) = \lim_{x \downarrow 0} h'(x).$$