Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 1
Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte): Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \exp(\sin(\frac{1}{x}))$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sin\left(\cos(x) + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \dfrac{1}{2 + (\sin(\exp(x)))^2}$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \tan\left(\dfrac{1}{1+\exp(2x)}\right)$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Berechnen Sie die Ableitung von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(n_1 + g(x + n_2) + (g(x + n_3))^2)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert als

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

Aufgabe 4 (0 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$f(x) = \exp(-(\operatorname{cotan}(x))^2)$$

(a) Definieren Sie f auf $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ derart, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5 (0 Punkte): $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} (\sin(x))^{n(n-1)}$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

(b) Berechnen Sie $f(\frac{\pi}{2})$.

(c) Ist f stetig auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

Aufgabe 6 (6 Punkte): Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(a) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

(b) Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$?