Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 1
Übungsblatt 13

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen in den Übungsbriefkasten im Container neben der Physik eingeworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 30. Januar, um 14 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Berechnen Sie die Taylorpolynome von

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\sin(x))$ um $x = 0$ von Ordnung 3.

(b) $g : [-1, \infty)$, $g(x) = \sqrt{1+x}$ um $x = 0$ von Ordnung 5.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Berechnen Sie jeweils die Taylorreihe um den angegebenen Punkt.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ um $x = \frac{\pi}{2}$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)^2 e^x$ um $x = 2$.

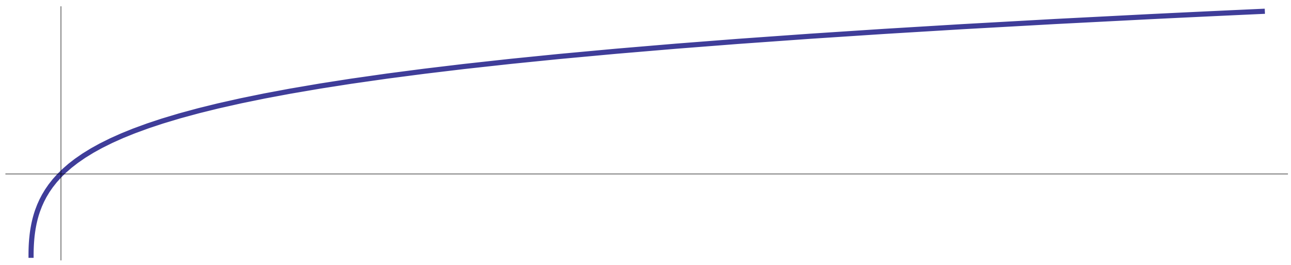
Aufgabe 3 (0 Punkte): Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen $f_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

(a) $f_1(x) = x^a$

(b) $f_2(x) = a^x$

(c) $f_3(x) = x^x$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Die Lambertsche W-Funktion $w : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert als die Umkehrfunktion zu $f : [b, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$. Berechnen Sie die kleinstmöglichen Zahlen a und b und berechnen Sie $w'(0)$.



Aufgabe 5 (0 Punkte): Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$ *Hinweis: Mittelwertsatz*

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - \sin(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^2 \sin(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \ln(x) - \frac{1}{x}}{(\sin(\pi x))^2}$

Aufgabe 6 (0 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

(a) Es gelte $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f'(0)$.

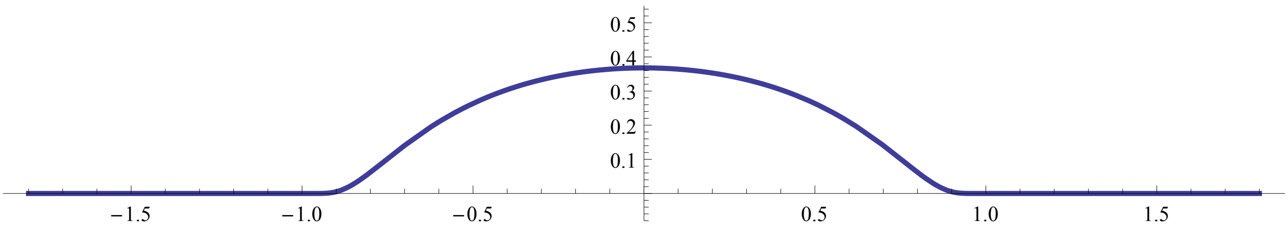
(b) Ist f immer ein lokales Maximum oder Minimum von f?

Hinweis: Betrachten Sie f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = x^4 \cos(\frac{1}{x})$ sonst.

(c) Es gelte $g(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $g''(0)$.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$



(a) Berechnen Sie das dazugehörige Taylorpolynom von Ordnung 2 an der Stelle $x = 1$.

(b) Sei p_n das Taylorpolynom n-ter Ordnung um 1. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(\tfrac{1}{2}) - p_n(\tfrac{1}{2})\right) = 0 \quad ?$$

(c) Widerspricht dies dem Satz von Taylor?

Aufgabe 8 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

(a)

$$\sum_{k=n+1}^{100n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{100} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=n}^{100n-1} \frac{1}{k}$$

(b)

$$\left| \int_1^{100} \frac{1}{x} dx - \sum_{k=n}^{100n-1} \frac{1}{k} \right| \leq \frac{1}{n}$$