Prof. Guido Sweers **WS 2013/2014**
Jan M. Krämer

Analysis 1
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (0 Punkte)**.** Finden Sie jeweils eine möglichst einfache Formel für die folgenden Ausdrücke und beweisen Sie, dass die Formel korrekt ist.

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(b) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \sum_{k=p}^{n+p} \binom{k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$

Aufgabe 3. Wir haben $\mathbb{R}$ eingeführt durch Äquivalenzklassen beschränkter, wachsender Folgen: $\mathbb{R} := (\mathcal{F}, \sim)$. Sei $x \in (\mathcal{F}, \sim) \setminus \{0\}$. Wie kann man $\frac{1}{x}$ sinnvoll definieren?

Aufgabe 4. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ durch

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{4x}.$$

Wir betrachten die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = f(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $1 \leq x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ und dass für alle $x \in [1, \sqrt{2}]$ gilt $f(x) \in [1, \sqrt{2}]$.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \in [1, \sqrt{2}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5. Sei K ein total geordneter Körper und für alle $x \in K$ existiere ein $n := 1 + \ldots + 1 \in K$, so dass $n > x$ gilt.

Wir sagen K hat die Supremumseigenschaft, falls gilt:

> *Jede nach oben beschränkte Teilmenge von K hat eine kleinste obere Schranke in K, genannt Supremum.*

Wir sagen K hat die Intervallschachtelungseigenschaft, falls gilt:

> *In jeder Intervallschachtelung liegt genau ein Element aus K.*

Zeigen Sie, dass die beiden Eigenschaften äquivalent sind.