Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 1
Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (0 Punkte): Beweisen Sie, dass für jede $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2 .$$

Erklären Sie, wieso man dies Parallelogrammgleichung nennt.

Aufgabe 2: (a) Die Zahlen $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 - 3i$ und $z_3 = 2 + 4i$ sind Nullstellen des Polynoms

$$z^6 - 10z^5 + 67z^4 - 262z^3 + 710z^2 - 1200z + 1000.$$

Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms.

(b) Zwei Nullstellen des Polynoms

$$z^4 - 7z^3 + 17z^2 - z - 26$$

sind $z_1 = 2$ und $z_2 = -1$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms.

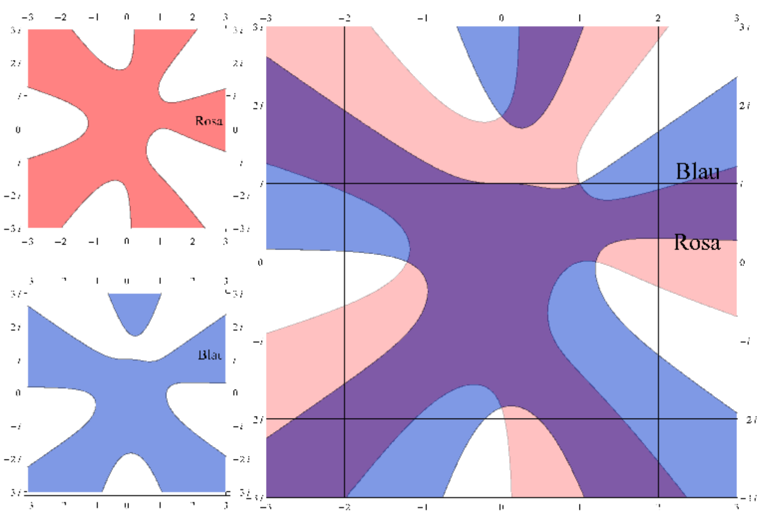
Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion

$$p(z) = z^5 - (i+1)\,z^4 + 2z^3 - (2i+2)\,z^2 - 5z + 5i + 5.$$

(a) Wo findet man in der Skizze die Nullstellen von $p(z)$?

(b) Finden Sie mithilfe der Skizze eine explizite Nullstelle von $p(z)$. Zeigen Sie, dass diese Zahl tatsächlich eine Nullstelle ist.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $p(z)$.



Rosarot bedeutet $\mathrm{Re}(p(z)) \geq 0$, blau bedeutet $\mathrm{Im}(p(z)) \geq 0$.

Aufgabe 4 (0 Punkte): Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ mit $|a_i| < 1$. Sei

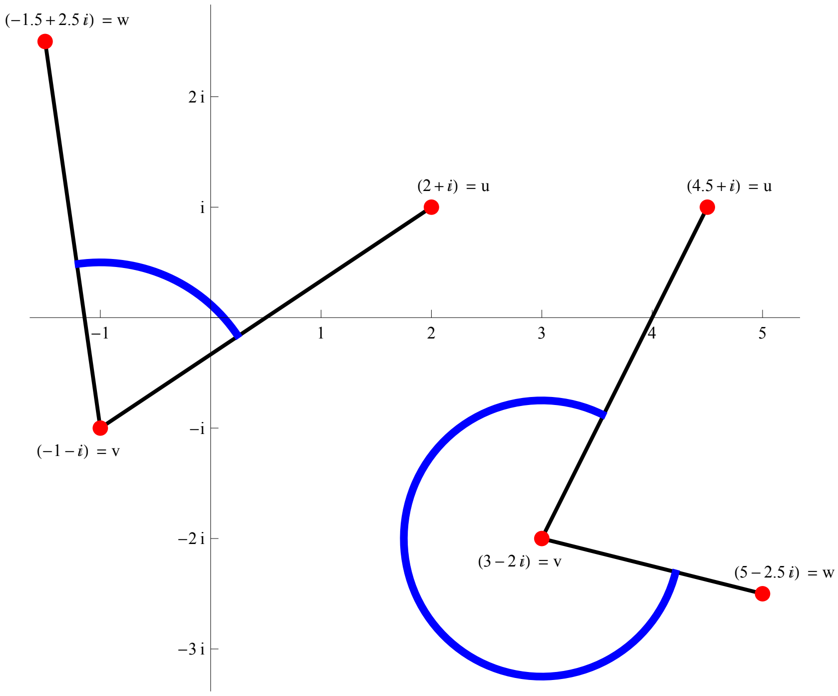
$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Zeigen Sie, dass alle Lösungen von $P(z) = 0$ innerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Seien u, v, w drei verschiedene komplexe Zahlen.

(a) Es sei φ der Winkel, den man erhält, wenn man u, v und w in ein Koordinatensystem einzeichnet und die Verbindungsstrecke von v nach u als ersten Schenkel und die von v nach w als zweiten Schenkel wählt (s. Skizze). Zeigen Sie, dass gilt:

$$\varphi = \operatorname{Arg}\left(\frac{w - v}{u - v}\right).$$



(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$ und sei $f(z) = \alpha z + \beta$. Zeigen Sie, dass f die Winkel erhält, dass also für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ mit $u \neq v \neq w$ gilt:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{w - v}{u - v}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{f(w) - f(v)}{f(u) - f(v)}\right).$$

Aufgabe 6: Skizzieren Sie mit Begründung die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Arg}\left(\frac{z - 1}{z - i}\right) = \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Aufgabe 7: Es seien $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - 2i| = 1\}$ und

$$f_a : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad f_a(z) = (1 + i)\, z,$$
$$f_b : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad f_b(z) = \frac{1}{z - i}.$$

Beschreiben und skizzieren Sie mit Begründung

(a) $f_a(A)$; (b) $f_b(A)$; (c) $(f_a \circ f_b)(A)$; (d) $(f_b \circ f_a)(A)$.