**Prof. Guido Sweers**
**Jan M. Krämer** **WS 2013/2014**

**Analysis 1**
**Übungsblatt 5**

**Aufgabe 1 (0 Punkte):** Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{k+2} = 0.$$

**Aufgabe 2 (0 Punkte):** Zeigen Sie, dass die reellen Folgen $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$,

(b) $b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

**Aufgabe 3 (0 Punkte):** Zeigen Sie, dass die iterativ definierten Folgen $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ in $\mathbb{R}$ konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}, \quad a_0 = 1$,

(b) $b_{n+1} = \dfrac{72}{1+b_n}, \quad b_0 = 2$,

(c) $c_{n+1} = \sqrt{1 + c_n}, \quad c_0 = 1$,

(d) $d_{n+1} = \dfrac{d_n + 6}{d_n + 2}, \quad d_0 = -1$.

**Aufgabe 4:** Sei $\varepsilon > 0$, berechnen Sie ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n > N_\varepsilon \ : \ \left| \frac{n^2+2}{n^2+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie jeweils, ob die Folge konvergiert oder divergiert.

(a) $a_k := \dfrac{(5n_2 + 10)^k - 5}{(n_3+1)^{2k} + 5}$,

(b) $b_k = \dfrac{(n_6+1)^k + k^{n_4+1}}{(n_5+2)^k + k^{n_3+1}}$.

*Hinweis: Die Zahlen $n_i$ können an der Matrikelnummer abgelesen werden.*

**Aufgabe 6:** Wir definieren iterativ

$$\begin{aligned} z_0 &= 5, \\ z_{k+1} &= \frac{2z_k^3 + i\left(z_k^2 + n_4\right)}{3z_k^2 - n_4 + 2iz_k} \text{ für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Folge $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen ein $z \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch

$$\lim_{k\to\infty} z_{k+1} = z.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2z_k^3 + i\left(z_k^2 + n_4\right)}{3z_k^2 - n_4 + 2iz_k} = z$$

und benutzen Sie die Rechenregeln für Grenzwerte für die linke Seite.

(c) Zeigen Sie, dass $z \in \left\{-i, \sqrt{n_4}, -\sqrt{n_4}\right\}$.

*Hinweis: Die Zahlen $n_i$ können an der Matrikelnummer abgelesen werden.*

**Aufgabe 7:** Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reelle Folgen. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Argumentieren Sie.

(a) Wenn $a_n$ und $b_n$ konvergieren, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)^2$.

(b) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.

(c) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.

(d) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

**Aufgabe 8:** (a) Bestimmen Sie Limes Superior und Limes Inferior von der Folge

$$a_n = \frac{(-1)^n + 2}{1 + 3^{-n}}.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{Q}$ gegeben. Betrachten Sie die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$,

$$b_n = \cos\left(xn\pi\right).$$

Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist der Limes Superior gleich 1? Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist der Limes Inferior gleich $-1$?