Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 1
Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden Ausdrücke. Dabei sind die m_k gegeben durch

n_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

.

(a) $\dfrac{z^4}{z^2 + m_2^2}$

(b) $\dfrac{z}{z^2 - m_3^2}$

(c) $\dfrac{z^5}{z^4 - m_4^4}$

(d) $\dfrac{z^5}{(z - m_5)^3}$

Aufgabe 2: Seien $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ Folgen in $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie jeweils die Aussage, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 1\right)$

(b) Nehmen Sie an, dass $a_n > 0$: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 1\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right)$

(c) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a\right)$

(d) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

Aufgabe 3: Zeigen Sie jeweils Konvergenz oder Divergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

(a) $a_k = \dfrac{k^{c-1}}{c^{\sqrt{k}}}$, wobei $c = (-1)^{n_3} + \frac{3}{2}$, $k > 0$

(b) $b_k = \dfrac{k!}{k^k}$, $k > 0$

(c) $c_k = k\left(1 - \sqrt{1 - \frac{n_5+1}{k}}\right)$, für $k \geq n_5 + 1$

(d) $d_0 = \frac{3n_6+1}{15}$, $\quad d_{k+1} = d_k(2 - d_k)$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Häufungspunkte der Folgen.

(a) $z_n = i^{nm}$, wobei m Ihre Matrikelnummer ist.

(b) $a_n = n - c\left[\frac{n}{c}\right]$, wobei $c = (|n_2 - 5| + 2)$.

Aufgabe 5: Sei $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass a_n genau dann konvergiert, wenn die umsortierte Folge $\{a_{p(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Aufgabe 6 (0 Punkte): Sei $f(z)$ ein Polynom mit Grad $n \geq 1$.

Behauptung: *Wenn $|f(w)| \neq 0$, dann kann man in der Nähe von $w \in \mathbb{C}$ eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ finden mit $|f(z)| < |f(w)|$.*

Dies zeigt man wie folgt: Man kann $f(w)$ schreiben als

$$f(z) = f(w) + b_k(z-w)^k + b_{k+1}(z-w)^{k+1} + \cdots + b_n(z-w)^n,$$

wobei $k \in \{1\ldots,n\}$ und $b_k \neq 0$.

(a) Nehmen Sie z derart, dass $\operatorname{Arg}\left(b_k(z-w)^k\right) = \operatorname{Arg}\left(-f(w)\right)$ und $|z-w|^k \leq \frac{|f(w)|}{|b_k|}$. Zeigen Sie, dass

$$\left|f(w) + b_k(z-w)^k\right| \leq |f(w)| \left(1 - \frac{|b_k|}{|f(w)|}|z-w|^k\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass für z aus (a) gilt, dass

$$|f(z)| \leq |f(w)| \left(1 - \frac{|b_k|}{|f(w)|}|z-w|^k + \frac{|b_{k+1}|}{|f(w)|}|z-w|^{k+1} + \cdots + \frac{|b_n|}{|f(w)|}|z-w|^n\right).$$

(c) Zeigen Sie, dass für $\varepsilon \in (0,1)$ gilt, dass

$$|z-w| < \varepsilon \Rightarrow |z-w|^{k+1} \leq \varepsilon\,|z-w|^k.$$

(d) Zeigen Sie, dass für z aus (a) gilt, dass

$$|f(z)| < |f(w)|,$$

falls $z \neq w$ und $|z-w|$ genügend klein ist.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Sei $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge $z_m \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\lim\limits_{m\to\infty}|f(z_m)| = \inf\limits_{\hat{z}\in\mathbb{C}}|f(\hat{z})|$.

(b) Zeigen Sie: Für $|z| > 2\left(|a_1| + \cdots + |a_n| + 1\right)$ gilt

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge z_m beschränkt sein muss, das heißt es gibt ein $R > 0$, so dass $|z_m| \leq R$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass es eine konvergente Teilfolge $\{z_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ gibt, das heißt es gibt $w \in \mathbb{C}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} z_{m_k} = w$. Für diese Teilfolge gilt $\lim\limits_{k\to\infty}|f(z_{m_k})| = |f(w)| = \inf\limits_{\hat{z}\in\mathbb{C}}|f(\hat{z})|$.

(e) Zeigen Sie mit Aufgabe 6, dass jedes Polynom eine Nullstelle in den komplexen Zahlen hat.