Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 1
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (6 Punkte): Divergent oder konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{13-n_3} + i(n_4+1)(-1)^n}{(n_4+1) + i(n_6+4)} \right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n_6+1)n + n^2 + (-1)^n n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \left(\frac{n_5 - 5}{(n_3+3)^2} \right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n + (-1)^n \frac{1000}{n} + n_7}$

Aufgabe 3 (0 Punkte): Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis an, oder ein Gegenbeispiel.

(a) Wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$.

(c) Wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ konvergiert und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(d) $\displaystyle\left(\exists d < 1 \;:\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le d \right) \Leftrightarrow \left(\exists c < 1 \;:\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le c \right)$

(e) $\displaystyle\left(\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \right) \Rightarrow$ Die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

(f) $\displaystyle\left(\forall p \in \mathbb{N} \;:\; \lim_{n\to\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0 \right) \Rightarrow$ Die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Untersuchen Sie die folgende Reihe.

$$\sum_{n=20}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(|n_6-4|+2)n+(|n_2-6|+13)(-1)^n}$$

(a) Konvergiert die Reihe absolut?

(b) Was können Sie mit dem Leibniz-Kriterium über diese Reihe aussagen?

(c) Konvergiert die Reihe?

Aufgabe 5 (0 Punkte): Normalerweise schreiben wir Zahlen im Dezimalsystem, zum Beispiel

$$3.1415 = 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4}.$$

Wenn dies π wäre, dann bräuchte man eine unendliche Summe, also eine Reihe.

Wir betrachten jetzt die Darstellung zur Basis 3.

(a) Wenn wir 10.0102 als Zahl zur Basis 3 haben, welche Zahl ist dies zur Basis 10?

(b) Es gilt $n_0 \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \{0,1,2\}$ für alle Elemente von $\{a_k\}_{k=-n_0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=-n_0}^{\infty} a_k 3^{-k}$$

konvergiert.

(c) $x \geq 0$ ist gegeben. Konstruieren Sie eine Folge $\{a_k\}_{k=-n_0}^{\infty}$, mit $a_k \in \{0,1,2\}$, so dass

$$\sum_{k=-n_0}^{\infty} a_k 3^{-k} = x.$$

Wählen Sie die a_k so, dass

$$0 \leq x - \left(\sum_{k=-n_0}^{n} a_k 3^{-k}\right) < 3^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq -n_0$.

(d) Gilt $0,2222222\ldots = 1,00000\ldots$ mit Basis 3?

Aufgabe 6 (4 Punkte): Die Folge $\mathcal{F} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ besteht aus den Teilfolgen

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ und } \mathcal{F}_2 = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

(a) Geben Sie eine Folge $\mathcal{F}$ mit den oben genannten Eigenschaften an, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.}$$

(b) Geben Sie eine Folge $\mathcal{F}$ mit den oben genannten Eigenschaften an, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$