Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 1
Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (a) Sei $\varepsilon > 0$. Für welches $\delta > 0$ gilt folgende Aussage?

$$0 < x < \delta \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \varepsilon$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass für $\delta = \min(1, \frac{1}{4}\varepsilon^2)$ gilt, dass

$$0 < x < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} + x^2\right| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - (n_5 - 1)x - 2n_5 - 2}{x^2 + x(1 - n_4) - 2n_4 - 2}$

(c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\left(\left[\dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|(2n_7 - 9)x - (n_5 + 1)| - |(2n_6 + 2)x + n_5 + 1|}{x}$

Aufgabe 3: Die stetige Funktion $f : (-\infty, \frac{1}{n_3+1}] \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-(n_3+1)x} - \sqrt{1+n_2 x}}{x} & \text{für } x \in (0, \frac{1}{n_3+1}], \\ c\ \exp(x) & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie c.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\downarrow 1} f_n(x)$.

(c) $\lim\limits_{x\uparrow 1} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\uparrow 1} f_n(x)$.

Aufgabe 5: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ und $f : [a, b] \to [c, d]$ surjektiv und monoton wachsend, das heißt

$$\forall_{x,y \in [a,b]} \text{ gilt: } x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 6 (0 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und das Urbild offener Intervalle sei wieder ein offenes Intervall, das heißt

$$\forall_{(a,b) \subset \mathbb{R}} \exists_{(c,d) \subset \mathbb{R}} \ : \ f^{-1}\big((a, b)\big) = (c, d).$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{m} & \text{für } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \setminus 0, m \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \operatorname{ggT}(|n|, m) = 1, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.