Notizen zur Vorlesung

Analysis 1

G. Sweers

Wintersemester 2013/2014

Inhaltsverzeichnis

Analysis 1, Woche 1

Zahlen

1.1 Elementares

1.1.1 Symbole und Aussagen

Bevor wir anfangen, legen wir die Bedeutung einiger Symbole aus der Mengenlehre fest:

- $x \in A$ heißt „x ist ein Element von A“;
- $A \subset B$ heißt „A ist eine Teilmenge von B“;
- $A \cup B = \{x; x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die Vereinigung beider Mengen („oder“ ist hier nicht ausschließend);
- $A \cap B = \{x; x \in A \text{ und } x \in B\}$ ist der Durchschnitt beider Mengen;
- $A \backslash B = \{x; x \in A \text{ und } x \notin B\}$;
- $\exists$ heißt „es gibt“;
- $\forall$ heißt „für alle“.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen.

- $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ heißt „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gelten“;
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ heißt „$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ gilt“ (auch beides gleichzeitig ist erlaubt);
- $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ heißt „wenn $\mathcal{A}$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{B}$“;
  $\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B}$ bedeutet $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$;
  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ bedeutet $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B})$;
- $\neg\mathcal{A}$ ist die Verneinung von $\mathcal{A}$.

In einer Wahrheitstafel fasst man dies wie folgt zusammen:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	unwahr
unwahr	wahr	unwahr	wahr	wahr	wahr
wahr	unwahr	unwahr	wahr	unwahr	unwahr
unwahr	unwahr	unwahr	unwahr	wahr	wahr

Beispiele:

Wenn es regnet, fahre ich nicht mit dem Fahrrad zur Arbeit.

Diese Aussage ist wahr, denn ich fahre nie mit dem Fahrrad zur Arbeit. Ob es regnet oder nicht, ist egal.

Wenn man Holländer ist, hat man Holzschuhe.

Diese Aussage ist nicht wahr, denn der Autor dieses Skripts hat keine Holzschuhe.

Die letzte kursiv gesetzte Aussage kann man auch so formulieren:

$\forall h \in$ Holländer: $h \in$ Holzschuhbesitzer.

Die Verneinung ist:

$\exists h \in$ Holländer: $h \notin$ Holzschuhbesitzer.

Man sieht, dass

$$\neg \left(\forall h \in H : \mathcal{A}\left(h\right)\right) = \left(\exists h \in H : \ \neg\mathcal{A}\left(h\right)\right),$$

oder kurzgefasst: $\neg\forall = \exists\neg$ und $\neg\exists = \forall\neg$.

1.1.2 Abbildungen, Funktionen

Wenn A und B zwei Mengen sind, dann nennt man eine Vorschrift f, die an jedes Element von A ein Element von B koppelt, eine Abbildung oder Funktion. Man schreibt $f : A \mapsto B$. Wenn für $(a, b) \in A \times B$ gilt $f(a) = b$, dann nennt man b das Bild von a. Die Teilmenge $f^{-1}(b) := \{a \in A; f(a) = b\}$ nennt man das Urbild von b.

Definition 1.1 *Eine Abbildung $f : A \mapsto B$ heißt injektiv (= eineindeutig), wenn $f(x) = f(y)$ impliziert, dass $x = y$.*

Bei einer injektiven Abbildung hat jedes Urbild höchstens ein Element.

Definition 1.2 *Eine Abbildung $f : A \mapsto B$ heißt surjektiv, wenn es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.*

Bei einer surjektiven Abbildung hat jedes Element von B ein nicht-leeres Urbild.

Definition 1.3 *Eine Abbildung $f : A \mapsto B$, die surjektiv und injektiv ist, heißt bijektiv.*

Beispiel 1.4 *Sei A die Menge aller Steuerzahler in Deutschland. Die Abbildung f, die deren Steuernummern liefert, ist überraschenderweise nicht injektiv. Tatsächlich scheint nur die Abbildung nach {Steuernummer,Identitätsnummer} injektiv zu sein.*

Beispiel 1.5 *Sei A die Menge der Studenten am Donnerstagmorgen 17.10.2013 um 8.30 im Hörsaal B. Wegen des doppelten Jahrgangs, haben wir befürchtet, dass die Abbildung auf die Sitzplätze surjektiv ist. Die ähnliche Abbildung am Donnerstagmorgen 19.12.2013 wird nicht surjektiv sein. Diese Abbildungen sind normalerweise jedoch injektiv.*

1.2 Natürliche Zahlen

Die Menge der *natürlichen Zahlen* nennt man $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Manchmal fängt man auch erst mit 1 statt 0 an. Wir werden 0 dazunehmen. Addition und Multiplikation sind Abbildungen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Wir nehmen an, dass man diese natürlichen Zahlen kennt. Die Liebhaber schauen sich in dieser Fußnote[1] an, wie man sie axiomatisch einführt.

1.2.1 Vollständige Induktion

Wenn man für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Behauptung $B(n)$ beweisen möchte, kann man oft den folgenden Ansatz benutzen:

Theorem 1.7 (Induktionsprinzip) *Sei $B(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Behauptungen. Nehme an*

1. *$B(0)$ gilt,*
2. *„$B(n)$ gilt“ $\Rightarrow$ „$B(n+1)$ gilt“ für alle $n \in \mathbb{N}$*
   (das heißt: angenommen $B(n)$ ist wahr, dann folgt, dass auch $B(n+1)$ wahr ist).

Dann hat man „$B(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$“.

Beweis. Nenne A die Teilmenge aus $\mathbb{N}$, die definiert wird durch „$B(n)$ ist wahr für $n \in A$“. Eigenschaft 2(c) aus Definition 1.6 gibt das Ergebnis. ■

Als Beispiel betrachten wir eine berühmte Ungleichung.

Lemma 1.8 (Bernoullische Ungleichung) *Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.1}$$

Beweis. Diese Behauptung läßt sich mit dem Induktionsprinzip beweisen. Zwei Aussagen sind zu beweisen.

1. $B(0)$, also $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$.
   Für $n = 0$ hat man $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x$.

---

[1] Peano führt $\mathbb{N}$ wie folgt ein:

Definition 1.6 $\mathbb{N}$ *wird definiert durch:*

1. $0 \in \mathbb{N}$,
2. *Es gibt eine Nachfolgerabbildung $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass:*
   (a) $0 \notin N(\mathbb{N})$,
   (b) $N(n) = N(k) \Rightarrow n = k$ *(N ist injektiv),*
   (c) *wenn $A \subset \mathbb{N}$ derart ist, dass $0 \in A$ und $N(A) \subset A$, so gilt $A = \mathbb{N}$.*

Wenn man kein Römer ist, dann schreibt man: $N(0) = 1$, $N(N(0)) = 2$ usw.

2. $B(n) \implies B(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$, also

$$(1+x)^n \geq 1+nx \implies (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

Angenommen, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{1.2}$$

gilt, findet man

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq^{*)} (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Bei $*)$ ist die Induktionsannahme (1.2) benutzt worden und die Annahme, dass $1+x \geq 0$.

Aus dem Induktionsprinzip folgt dann (1.1). ■

1.2.2 Funktionen auf $\mathbb{N}$

Notation 1.9 *Man schreibt für $n \in \mathbb{N}^+ = \{1,2,3,\dots\}$ folgendes:*

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1.a_2.\cdots.a_n.$

Außerdem vereinbart man, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ *und* $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} a_k = 1.$

Bemerkung 1.9.1 *Bei den Pünktchen geht man davon aus, dass wir diese eindeutig ergänzen. Eine präzise Definition wäre induktiv:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ *und*
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

So findet man

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\cdots+100 = 5050$$

und man sieht, dass k nur eine Notationshilfe ist. Für $n \in \mathbb{N}$ kann man zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Auf ähnlicher Art definiert man auch

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

und, wenn $n \geq 15$

$$\sum_{k=15}^{n} a_k = a_{15} + a_{16} + \cdots + a_n.$$

Fakultät: Man definiert für $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k,$$

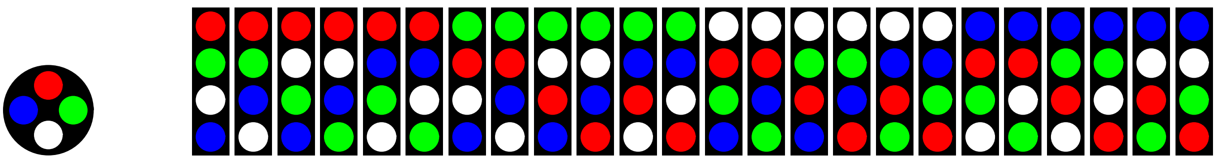
sprich „n-Fakultät“, und dies kann man auch schreiben als

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2) \ \ldots\ 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \\ 0! &= 1. \end{aligned}$$

Also:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	...

Die Zahl $n!$ erscheint beim Anordnen von gefärbten Kugeln. Man kann n unterschiedliche Kugeln auf $n!$ unterschiedliche Möglichkeiten hintereinander legen.



4 Kugeln kann man auf 24 verschiedene Arten anordnen.

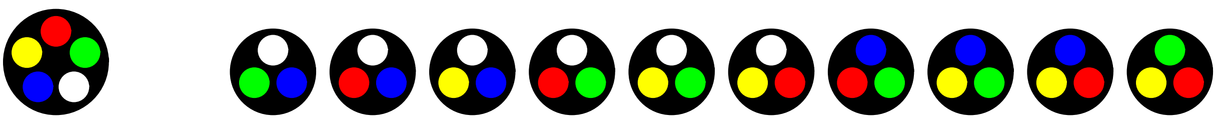
Binomialkoeffizient: Man definiert für $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} = \prod_{m=1}^{k} \frac{n+1-m}{k+1-m}.$$

Man spricht „n über k“. Wenn man lieber mit Pünktchen schreibt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+3}{3}\,\frac{n-k+2}{2}\,\frac{n-k+1}{1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \\ \binom{n}{0} &= 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit n unterschiedlichen Kugeln kann man $\binom{n}{k}$ unterschiedliche Teilmengen von k Kugeln bilden.



Nimmt man 3 aus 5 unterschiedlichen Kugeln, dann gibt es 10 Möglichkeiten.

Einige Identitäten:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ für } k,n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \le n,\\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \text{ für } k,n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \le n,\\
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k} \text{ für } k,n \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \le k \le n,\\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= 2^n \text{ für } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Lemma 1.10 *Für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen x, y ungleich 0 gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1.3}$$

Beweis. Man beweist dieses Lemma mit Hilfe vollständiger Induktion. ∎

Wenn man erschrickt vor $\sum$, dann kann man (1.3) notfalls anders schreiben:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x\, y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{3} x^3 y^{n-3} + \binom{n}{4} x^4 y^{n-4} + \ \dots\ + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n.$$

Dann geht man wieder davon aus, dass jeder die Pünktchen versteht. Übrigens gilt diese letzte Formel auch für $x, y = 0$.

1.2.3 Ganze Zahlen

Man setzt:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Addition, Multiplikation und sogar Subtraktion lassen sich auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren. Man sagt $n \le m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $n + k = m$.

1.3 Rationale Zahlen

Man setzt:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m}; n \in \mathbb{Z} \text{ und } m \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}.$$

Dabei unterscheidet man jedoch zum Beispiel nicht zwischen $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{15}$. Man sagt $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, wenn $nb = am$. Addition und Multiplikation werden definiert durch

$$\frac{n}{m} + \frac{a}{b} = \frac{nb + ma}{mb} \text{ und } \frac{n}{m}\frac{a}{b} = \frac{na}{mb}.$$

Identifiziert man $\frac{n}{1}$ und n, dann ist $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$.

1.3.1 Algebraische Eigenschaften

Wenn man $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ schreibt, meint man damit, dass $\mathbb{K}$ irgendeine Menge ist, wobei Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$ definiert sind. Insbesonders soll $\mathbb{K}$ abgeschlossen sein unter diesen beiden Operatoren, das heißt: für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a + b \in \mathbb{K}$ und $a \cdot b \in \mathbb{K}$.

Definition 1.11 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *nennt man einen* Körper*, wenn:*

$\boxed{(\mathbb{K}, +)\ \textit{additive Gruppe}}$

1. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(a + b)+c = a+(b + c)$, die* ***Assoziativität der Addition****;*
2. *Es gibt ein* ***neutrales Element der Addition*** *$0 \in \mathbb{K}$ so, dass für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $a + 0 = a$;*
3. *Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es* ***ein additiv inverses Element*** *$-a \in \mathbb{K}$ mit $a+(-a) = 0$;*
4. *Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a + b = b + a$, die* ***Kommutativität der Addition****;*

$\boxed{(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)\ \textit{mutiplikative Gruppe}}$

5. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, die* ***Assoziativität der Multiplikation****;*
6. *Es gibt ein* ***neutrales Element der Multiplikation*** *$1 \in \mathbb{K}$ mit $1 \neq 0$ so, dass für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot 1 = a$;*
7. *Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ gibt es* ***ein multiplikativ inverses Element*** *$a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$;*
8. *Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$, die* ***Kommutativität der Multiplikation****;*
9. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, die* ***Distributivität.***

$\mathbb{Q}$ wird mit Addition und Multiplikation ein Körper.

Bemerkung 1.11.1 *Die Eigenschaften 1 bis 4 definieren $(\mathbb{K}, +)$ als (additive) Gruppe. Ebenso definieren die Eigenschaften 5 bis 8 $(\mathbb{K}\setminus \{0\}, \cdot)$ als (multiplikative) Gruppe. Wenn nur die Eigenschaften 1-3 erfüllt sind, dann nennt man $(\mathbb{K}, +)$ eine nicht-kommutative Gruppe. Und um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, wird $(\mathbb{K}, +)$, wenn alle 4 Eigenschaften erfüllt sind, auch explizit eine kommutative Gruppe genannt.*

Man kann direkt kontrollieren, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist, und dass $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}\setminus \{0\}, \cdot)$ eine additive, respektive multiplikative Gruppe ist.

Öfters sieht man folgende „Addition“ in $\mathbb{Q}$: $\frac{p}{m} \boxplus \frac{q}{n} = \frac{p+q}{m+n}$. Angenommen wir nehmen immer die 'kleinstmögliche' Schreibweise in $\mathbb{Q}$, also $\frac{2}{3}$ statt $\frac{4}{6}$, welche Probleme hat man denn so für $(\mathbb{Q}, \boxplus, \cdot)$? Welche Körpereigenschaften wären nicht erfüllt?

1.3.2 Ordnung

Auf $\mathbb{Z}$ gibt es eine natürliche Ordnung. Die Ordnung von $\mathbb{Z}$ können wir übertragen auf $\mathbb{Q}$:

Definition 1.12 *Sei $\dfrac{n}{m}$ und $\dfrac{a}{b}$ in $\mathbb{Q}$ (mit $n, a \in \mathbb{Z}$ und $m, b \in \mathbb{N}\setminus \{0\}$).*

$$\frac{n}{m} \leq \frac{a}{b} \text{ wenn } nb \leq ma.$$

Und man schreibt $\frac{n}{m} < \frac{a}{b}$ wenn $\frac{n}{m} \leq \frac{a}{b}$ und $\frac{n}{m} \neq \frac{a}{b}$.

1.3.3 Unendlich und abzählbar

Definition 1.13 *1. Man nennt eine Menge A* unendlich*, wenn A nicht leer ist und wenn es eine Abbildung $f : A \mapsto A$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.*

2. Man nennt eine Menge A abzählbar unendlich*, wenn A unendlich ist und es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \mapsto A$ gibt.*

Lemma 1.14 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar unendlich.*

1.3.4 Rationale Zahlen reichen nicht

Die Griechen aus der Zeit von vor etwa 500 v.C. brachten die Zahlen in Verbindung mit messbaren Längen und dachten, dass sich alle Zahlen als Verhältnis von ganzen Zahlen schreiben lassen. Modern gesagt: $\mathbb{Q}$ reicht. Die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat gibt da aber schon ein Problem. Wegen Pythagoras findet man für die Länge x nämlich $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Lemma 1.15 *Es gibt keine rationale Zahl x so, dass $x^2 = 2$.*

Beweis. Man beweist diese Aussage durch einen Widerspruch. Nehme an, es gibt $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ so, dass

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2.$$

Man darf annehmen, dass n und m keinen gemeinsamen Teiler haben, denn wenn es nicht so wäre, könnte man n und m vereinfachen, indem man durch den gemeinsamen Teiler dividiert. Es folgt

$$n^2 = 2m^2.$$

Weil die rechte Seite gerade ist, muss auch die linke Seite gerade sein und so auch n. Es folgt, dass $n = 2k$ für irgendein $k \in \mathbb{Z}$, und man findet

$$4k^2 = 2m^2.$$

Aus $m^2 = 2k^2$ folgt, dass m gerade ist und man erhält einen Widerspruch. ■

Anscheinend reichen die rationalen Zahlen nicht aus, und es gibt Löcher zu füllen zwischen den rationalen Zahlen. Das führt zu den sogenannten reellen Zahlen.

1.3.5 Wie kann man reelle Zahlen einführen?

Eine Möglichkeit, die rationalen Zahlen zu vervollständigen, ist, die Ordnung von $\mathbb{Q}$ zu benutzen. Eine Konstruktion ist wie folgt:

1. Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Folgen rationaler Zahlen, die monoton wachsend und nach oben beschränkt sind.

2. Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ aus $\mathfrak{F}$ sind, dann sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent), wenn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ b_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Anders gesagt: beide Folgen haben die gleichen oberen Schranken.

3. Schlussendlich setzt man $\mathbb{R} = (\mathfrak{F}, \sim)$, dass heißt, man identifiziert Folgen, die äquivalent sind.

Man fasst diese Konstruktion zusammen, indem man sagt:

$\mathbb{R}$ *ist die Menge aller Grenzwerte von monoton wachsenden, beschränkten Folgen aus* $\mathbb{Q}$.

Wir haben aber noch nicht gesagt, was ein Grenzwert oder ein Limes ist. Wir kommen dann auch nächste Woche auf diese Einführung der reellen Zahlen zurück.

Beispiel 1.16 *Wir zeigen hier den Anfang einer monoton wachsenden Folge, die*

$$\sqrt{2} = 1.4142135623...$$

liefert:

$$\left\{1,\ \frac{14}{10},\ \frac{141}{100},\ \frac{1414}{1000},\ \frac{14142}{10000},\ \frac{141421}{100000},\ \dots\right\}. \tag{1.4}$$

Eine andere monoton wachsende Folge rationaler Zahlen, die $\sqrt{2}$ *approximiert, ist* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, definiert durch* $a_0 = 1$ *und*

$$a_{n+1} = \frac{3a_n^2 + 2}{4a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Man findet

$$\left\{1,\ \frac{5}{4},\ \frac{107}{80},\ \frac{47147}{34240},\ \frac{9013274027}{6457253120},\ \frac{327109561768877858987}{232803967329042856960},\ \dots\right\} \tag{1.6}$$

und wenn man diese Zahlen bis in 10 Dezimalen berechnet, folgt

$$\{1,\ 1.25,\ 1.3375,\ 1.376956775,\ 1.3958371864,\ 1.4050858562, \dots\}.$$

Die Folgen in (1.4) und (1.6) sind äquivalent. Wir werden übrigens noch sehen, dass man $\sqrt{2}$ *viel schneller approximieren kann.*

Analysis 1, Woche 2

Reelle Zahlen

A1

2.1 Ordnung

Definition 2.1 *Man nennt* $\leq$ *eine* Ordnung *für* $\mathbb{K}$*, wenn*

1. *für alle* $a \in \mathbb{K}$ *gilt* $a \leq a$ (Reflexivität),

2. *für alle* $a, b \in \mathbb{K}$ *mit* $a \leq b$ *und* $b \leq a$ *gilt* $a = b$ (Antisymmetrie),

3. *für alle* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *mit* $a \leq b$ *und* $b \leq c$ *gilt* $a \leq c$ (Transitivität).

Definition 2.2 $(\mathbb{K}, \leq)$ *nennt man* total geordnet*, wenn* $\leq$ *eine Ordnung für* $\mathbb{K}$ *ist und zusätzlich*

4. *für alle* $a, b \in \mathbb{K}$ *gilt,* $a \leq b$ *oder* $b \leq a$*.*

Definition 2.3 $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *heißt ein* total geordneter Körper**,** *wenn*

1. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *ein Körper ist,*

2. $(\mathbb{K}, \leq)$ *total geordnet ist,*

3. *für alle* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *mit* $a \leq b$ *gilt* $a + c \leq b + c$*,*

4. *für alle* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *mit* $a \leq b$ *und* $0 \leq c$ *gilt* $a \cdot c \leq b \cdot c$*.*

$(\mathbb{K}, +, \leq)$ heißt eine total geordnete Gruppe, wenn $(\mathbb{K}, +)$ eine Gruppe ist und die Bedingungen 2 und 3 aus Definition 2.3 erfüllt sind.

Man kann zeigen, dass $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ eine total geordnete Gruppe ist und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ein total geordneter Körper.

Wenn $(\mathbb{K}, \leq)$ total geordnet ist, dann heißt $k \in \mathbb{K}$ eine *obere Schranke*?? für die Teilmenge $A \subset K$, wenn für alle $a \in A$ gilt, dass $a \leq k$.

Nehmen wir $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \leqq)$, wobei „$(q_1, q_2) \leqq (p_1, p_2)$“ definiert wird durch „$q_1 \leq p_1$ und $q_2 \leq p_2$“, dann ist $\leqq$ eine Ordnung aber nicht eine totale Ordnung.

2.2 Eine Einführung der reellen Zahlen

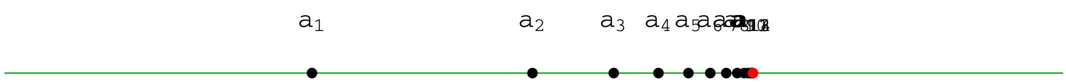
Definition 2.4 *Eine Relation $\sim$ auf M heißt* Äquivalenzrelation, *wenn*

1. *für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$* (Reflexivität),
2. *für alle $x, y \in M$ gilt: $x \sim y \implies y \sim x$* (Symmetrie),
3. *für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z$* (Transitivität).

Mit Hilfe der Ordnung und einer Äquivalenzrelation lassen sich die reellen Zahlen einführen.

Definition 2.5 ($\mathbb{R}$ als Grenzwerte beschränkter monoton wachsender Folgen) *Eine erste Konstruktion:*

1. *Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Folgen rationaler Zahlen, die monoton wachsend*[1] *und nach oben beschränkt*[2] *sind.*
2. *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent), wenn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt*
$$a_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; b_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Anders gesagt: beide Folgen haben die gleichen oberen Schranken.
3. *$\mathbb{R} := (\mathfrak{F}, \sim)$, das heißt, man identifiziert äquivalente Folgen und definiert $\mathbb{R}$ als die Menge der Äquivalenzklassen.*



Man kann $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ betrachten, indem man für $q \in \mathbb{Q}$ die Äquivalenzklasse der Folge $\{q, q, q, q, q, \dots\}$ nimmt. Wenn man jedoch jedes mal ein Element von $\mathbb{R}$ als Äquivalenzklasse einer bestimmten Folge beschreiben würde, wird man schnell müde. Stattdessen versucht man solche Elemente kürzer zu beschreiben. Wir geben ein paar Beispiele.

- Die Äquivalenzklasse zu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, die man in (1.5) definiert hat, nennt man $\sqrt{2}$.
- Die Äquivalenzklasse zu $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ nennt man e.

  Man kann zeigen, dass diese Folge tatsächlich steigend ist. Als ersten Schritt zeigen wir
$$\frac{n-m+1}{n} \leq \frac{n-m+2}{n+1} \text{ für } m \geq 1. \tag{2.1}$$
  Dies folgt aus:
$$(n-m+1)(n+1) = n^2 - mn + 2n - m + 1 \leq n^2 - mn + 2n = (n-m+2)\,n.$$

[1] Eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt (monoton) wachsend wenn $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ Genauer gesagt, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man nennt die Folge streng wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[2] Eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl M gibt mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit der Ungleichung in (2.1) für $1 \leq m \leq k$ finden wir, dass

$$\begin{aligned} \tbinom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\dots\frac{n-k+1}{n} \leq \\ &\leq \frac{1}{k!}\frac{n+1}{n+1}\dots\frac{n-k+2}{n+1} = \tbinom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aus (2.2) folgt wiederum, dass die Folge monoton steigend ist:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \leq \\ &\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\tbinom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Folge ist auch beschränkt:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,(k-1)} = \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-(k-1)}{k\,(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \\ &= 2+1-\frac{1}{n} \leq 3. \end{aligned}$$

- Die Äquivalenzklasse zu $\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{8}{(4k+1)(4k+3)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ nennt man π.

Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{R}$ eine vernünftige Struktur hat und auf natürliche Weise die Löcher in $\mathbb{Q}$ auffüllt, wenn wir Addition, Multiplikation und Ordnung für $\mathbb{R}$ passend definieren. Passend heißt, dass die Definition für Elementen aus $\mathbb{Q}$ die übliche bleibt und sich auf natürliche Art ergänzt für Elementen aus $\mathbb{R}$. Ein Paar Sachen werden wir zeigen.

Erstens die **Addition**. Die ist relativ einfach. Man definiert $x+y$, indem man zwei Folgen rationaler Zahlen zu x und y nimmt, sage $x \cong \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ und $y \cong \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, und schreibt

$$x+y \cong \{x_n+y_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Mit $x \cong \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist gemeint, dass $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein Vertreter aus $\mathfrak{F}$ ist für die Äquivalenzklasse zu $x \in (\mathfrak{F},\sim)$. Man kann zeigen, dass $\{x_n+y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ und die dazu gehörende Äquivalenzklasse nicht abhängt von den Vertretern $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Auch kann man schon zeigen, dass drei Eigenschaften eines Körpers (Assoziativität, Existenz von einem neutralen Element und Kommutativität bezüglich der Addition) erfüllt sind.

Für die Existenz eines additiv inversen Elementes zu x kann man nicht einfach $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nehmen, weil diese Folge nicht monoton wachsend ist. Wenn $x \in (\mathfrak{F},\sim)$, gibt es aber ein $-x \in (\mathfrak{F},\sim)$, und das sieht man zum Beispiel mit Hilfe des folgenden Algorithmus. Dieser liefert eine Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, die $-x$ vertritt.

Algorithmus 2.1 1. Sei $q \in \mathbb{Q}$ eine obere Schranke für $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ und setze

$$b_0 := -q, \;\; n := 0 \text{ und } s := 1.$$

2. Wenn $-b_n - s$ eine obere Schranke ist für $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, setze

$$b_{n+1} := b_n + s$$

Wenn $-b_n - s$ keine obere Schranke ist für $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, setze

$$b_{n+1} := b_n \text{ und } s := \tfrac{1}{2}s.$$

3. $n := n + 1$ und gehe zurück zu 2.

Die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ soll $-x \cong \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ liefern. Dann muß man aber noch zeigen, dass $x + (-x) = 0$ oder besser gesagt: dass 0 die kleinste obere Schranke für $\{x_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist.

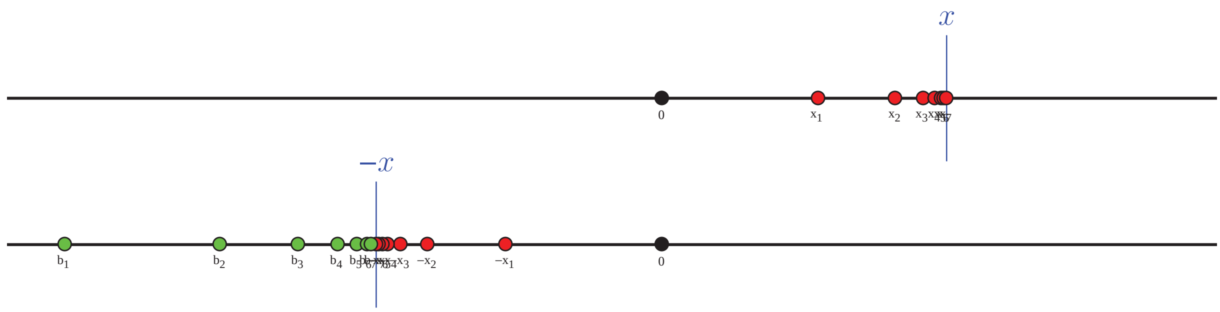


Abbildung 2.1: *Wenn $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ wachsend ist, dann ist $\{-x_1, -x_2, \dots\}$ fallend und deshalb nicht passend für $-x$. Für eine passende Definition von $-x$ soll man eine wachsende Folge bestimmen. So eine Folge ist in grün dargestellt.*

Die **Multiplikation** in $\mathbb{R}$ ist schon lästiger zu definieren. Wenn $x \cong \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ und $y \cong \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ so sind, dass x_n und y_n positiv sind für n genügend groß, dann setzt man

$$x \cdot y \cong \{\max(0, x_n) \max(0, y_n)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Auch hier muß man zeigen, dass das Ergebnis nicht vom zufälligen Vertreter abhängt.

Wenn für alle x_n gilt, dass $x_n < 0$, aber $y_n > 0$ für n genügend groß, dann benutzt man zweimal den Algorithmus für das additiv Inverse und definiert

$$x \cdot y = -((-x) \cdot y),$$

und so weiter.

Die **Ordnung** $\leq$ wird wie folgt definiert in $\mathbb{R}$. Seien x, y vertreten durch $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, dann setzt man $x \leq y$, wenn:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ oder } \exists\, N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n.$$

Auch hier muss man kontrollieren, dass man so eine totale Ordnung bekommt.

Das ganze ist eine ziemliche langwierige Sache und die Ergebnisse sind nicht sehr überraschend. Man findet jedoch, dass für Elementen aus $\mathbb{Q}$ die übliche Addition, Multiplikation und Anordnung erhalten bleiben. Auch gilt das folgende Ergebnis.

Theorem 2.6 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *ist ein total geordneter Körper.*

Notation 2.7 *Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nennt man Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.*

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$; *(abgeschlossenes Intervall)*
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$; *(offenes Intervall)*
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Manchmal sieht man auch:

- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$.

Die Bedeutung von $[a, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) und so weiter kann man erraten.

Wir haben hier die Symbole $-\infty$ (negativ unendlich) und ∞ (positiv unendlich) benutzt. ∞ und $-\infty$ sind keine Zahlen und liegen nicht in $\mathbb{R}$. Man schreibt ab und zu trotzdem $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Mit $\left(\overline{\mathbb{R}}, +, \cdot\right)$ kann man aber nicht mehr wie mit einem Körper arbeiten: $\infty - \infty$ lässt sich nicht vernünftig definieren.

2.3 Andere Einführungen der reellen Zahlen

Statt monoton wachsender, nach oben beschränkter Folgen in $\mathbb{Q}$ zu nehmen, kann man auf ähnliche Art auch monoton nach unten beschränkte Folgen in $\mathbb{Q}$ nehmen. Das wäre eine zweite Konstruktion.

Für eine nächste Möglichkeit brauchen wir die Betragsfunktion. Sei $\mathbb{K}$ eine Gruppe oder ein Körper mit einer totalen Ordnung $\leq$. Dann setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Und $a < 0$ bedeutet $0 \geq a$ und $a \neq 0$.

Definition 2.8 ($\mathbb{R}$ durch Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen) *Eine dritte Konstruktion:*

1. *$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ heißt eine* Cauchy-Folge *(auch Fundamentalfolge genannt), wenn:*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\text{: } n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$
Sei $\mathfrak{CF}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

2. *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{CF}$ sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent) wenn*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N}\text{: } n \geq M_\varepsilon \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

3. $\mathbb{R} := (\mathfrak{CF}, \sim)$.

Definition 2.9 ($\mathbb{R}$ durch Dedekindsche Schnitte) *Eine vierte Konstruktion:*

1. *(A, B) heißt Schnitt von $\mathbb{Q}$, wenn $A, B \subset \mathbb{Q}$ mit*
   (a) *$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$.*
   (b) *für jedes $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \leq b$.*
2. *wenn es $q \in \mathbb{Q}$ gibt mit $a \leq q$ für alle $a \in A$ und $q \leq b$ für alle $b \in B$, dann sagen wir die folgenden Schnitte sind äquivalent:*
$$(A \backslash \{q\}, B \cup \{q\}) \sim (A \cup \{q\}, B \backslash \{q\}).$$
3. *Sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Schnitte in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} := (\mathfrak{S}, \sim)$.*

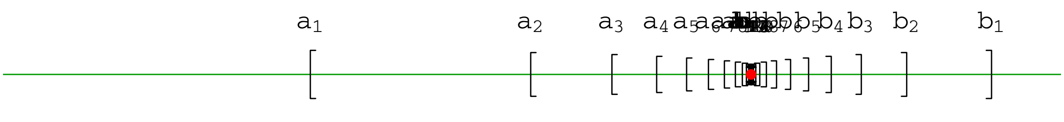
Beispiel 2.10 *Ein Schnitt für $\sqrt{2}$ ist*

- $A = \{a \in \mathbb{Q}; a \leq 0$ *oder* $a^2 \leq 2\}$,
- $B = \{a \in \mathbb{Q}; a \geq 0$ *und* $a^2 \geq 2\}$.

Definition 2.11 ($\mathbb{R}$ durch Intervallschachtelungen) *Eine fünfte Konstruktion:*

1. *$\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und $a_n < b_n$ heißt eine Intervallschachtelung, wenn*
   (a) *für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subset I_n$;*
   (b) *es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Intervall I_n gibt mit Länge $b_n - a_n < \varepsilon$.*

   Sei $\mathfrak{I}$ die Menge der Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$.
2. *Zwei Intervallschachtelungen $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißen äquivalent, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_n \cap J_n \neq \emptyset$.*
3. $\mathbb{R} := (\mathfrak{I}, \sim)$.



Beispiel 2.12 *Eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ ist $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit*

- $a_0 = 1$ *und* $a_{n+1} = \frac{3a_n^2+2}{4a_n}$ *für* $n \in \mathbb{N}$,
- $b_0 = 2$ *und* $b_{n+1} = \frac{3b_n^2+2}{4b_n}$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

2.3.1 Nur eine vollständige Erweiterung?

Zu diesen verschiedenen Einführungen von $\mathbb{R}$ sollte man aber einige Fragen klären. Zum Beispiel:

- Liefern diese Verfahren alle das gleiche Ergebnis?
- Man findet, mit $\mathbb{Q}$ angefangen, eine größere Menge, die man $\mathbb{R}$ nennt. Wenn man ein ähnliches Verfahren loslässt auf $\mathbb{R}$, bekommt man dann eine noch größere Menge?

Selbstverständlich sind monoton wachsende Folgen keine monoton fallenden Folgen und man hat streng genommen zwei verschiedene Ergebnisse, wenn man bei den ersten beiden Konstruktionen nur die Form der Konstruktion betrachtet. Trotzdem soll man das Gefühl haben, dass diese zwei Methoden keinen wesentlichen Unterschied herbeiführen. In der Mathematik verwendet man den Begriff **isomorph**. Man meint mit „A ist isomorph zu B“, dass es nicht nur eine bijektive Abbildung von A nach B gibt, sondern dass diese Abbildung auch die Struktur erhält[3].

Bevor wir die zweite Frage beantworten können, brauchen wir:

Definition 2.14 *Sei* $(\mathbb{K}, \leq)$ *total geordnet. Dann heißt* $\mathbb{K}$ vollständig bezüglich der Ordnung $\leq$, *wenn jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge* $M \subset \mathbb{K}$ *eine kleinste obere Schranke hat. Diese kleinste obere Schranke von* M *heißt das* „Supremum von M“ *und man schreibt* $\sup M$.

Theorem 2.15 *Es gibt, bis auf Isomorphien*[4]*, eine eindeutige Erweiterung* $\mathbb{R}$ *von* $\mathbb{Q}$*, die vollständig ist bezüglich der Ordnung* $\leq$.

Es gibt Erweiterungen von $\mathbb{Q}$, die echt kleiner sind als $\mathbb{R}$, aber nicht vollständig bezüglich der Ordnung sind. Zum Beispiel ist auch $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] := \left\{p + q\sqrt{2}; p, q \in \mathbb{Q}\right\}$ eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

2.4 Eigenschaften

2.4.1 Abzählbarkeit

Wir haben gesehen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist. Wie ist das mit $\mathbb{R}$?

Theorem 2.16 $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

[3] Der Begriff Isomorphie hängt ab von der betreffenden Struktur.

Definition 2.13 *Zwei total geordnete Körper* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *und* $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, \leqq)$ *heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ *gibt, so dass:*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$;
2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$;
3. $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)$.

[4] A und B heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, die die Struktur von A und B behält.

Beweis. Wir nehmen an, $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ sei eine Abzählung von $\mathbb{R}$, und werden einen Widerspruch erzeugen. Das funktioniert wie folgt. Zu jedem x_n kann man die Dezimalentwicklung als Folge nehmen. So wie $\sqrt{2}$ die Äquivalenzklasse von der monoton wachsenden und beschränkten Folge $\{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.412,\ \dots\}$ darstellt. Wir definieren y durch eine Folge $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, die wir als Dezimalentwicklung definieren, wo die n-te Dezimale von y (eine Ziffer von 0 bis 9) ungleich der n-ten Dezimale von x_n gewählt wird (und auch ungleich 9). Also zum Beispiel für die reellen Zahlen

$$\begin{array}{lcl} x_0 & \cong & \{50,\ 51,\ 51.3,\ 51.34,\ 51.343,\ 51.3436\dots\} \\ x_1 & \cong & \{400,\ 440,\ 444,\ 444.6,\ 444.66,\ 444.666...\} \\ x_2 & \cong & \{0,\ .1,\ .19,\ .191,\ .1912,\ .19121,\ .19123...\} \\ x_3 & \cong & \{3,\ 3.1,\ 3.12,\ 3.123,\ 3.1234,\ 3.12345,\ \dots\} \\ & & \dots \end{array}$$

wären die Dezimale, die zu meiden sind, $1.693\dots$. Wir ersetzen dann die Ziffer k durch $k+1$ oder $k-1$. Die Ziffern 9 und 0 sollen dabei vermieden werden. Nehme zum Beispiel

$$y \cong \{2,\ 2.7,\ 2.78,\ 2.784,\ \dots\}.$$

Die Zahl y liegt in $\mathbb{R}$ (die Folge ist monoton wachsend und beschränkt) aber nicht in der Abzählung, weil y sich von jedem x_n in mindestens einer Dezimalstelle unterscheidet und daher keinem x_n gleicht.

Die Ziffern 9 und 0 sollen vermieden werden, weil

$$1.00000000... \ = .9999999999... \ .$$

Die Dezimalentwicklung von reellen Zahlen ist leider nicht eindeutig (surjektiv aber nicht injektiv!). ∎

Obwohl $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und also deutlich weniger Elementen hat als das überabzählbare $\mathbb{R}$, gelten die folgende Ergebnisse:

Lemma 2.17

- *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*
- *Für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gibt es $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ so dass $p < x < q$.*
- *$\mathbb{Q}$ liegt* dicht *in $\mathbb{R}$, das heißt, für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$.*

Die Beweise dieser Aussagen sollte man selber zeigen können.

2.4.2 Vollständigkeit

Einen ganz wichtigen Bestandteil von Theorem 2.15 möchten wir noch mal betonen.

Korollar 2.18 $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist vollständig, das heißt, jede nicht leere, beschränkte Menge aus $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.*

Für eine andere Möglichkeit, diese Vollständigkeit zu formulieren, braucht man den Begriff „Grenzwert“.

Definition 2.19 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge von Zahlen in* $\mathbb{R}$*. Die Folge heißt* konvergent *nach* $a \in \mathbb{R}$*, wenn Folgendes gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und nennt* a *den* Limes *oder* Grenzwert.

Die meistbenutzten Formulierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ fasst man wie folgt zusammen:

Theorem 2.20 *Sei* $\mathbb{R}$ *wie in Definition 2.5. Dann gilt:*

- *Jede beschränkte nicht leere Menge in* $\mathbb{R}$ *hat ein Supremum in* $\mathbb{R}$.
- *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *hat einen Limes in* $\mathbb{R}$.
- *Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *hat einen Limes in* $\mathbb{R}$.
- *Jede Cauchy-Folge in* $\mathbb{R}$ *ist konvergent in* $\mathbb{R}$.

Analysis 1, Woche 3

Komplexe Zahlen I

3.1 Etwas Imaginäres

Zusätzlich zu den reellen Zahlen führen wir das Symbol i ein und wir vereinbaren:

$$i^2 = -1.$$

Wir möchten die reellen Zahlen erweitern mit i. Das heißt, wir möchten mit i addieren und multiplizieren können. Sofort sieht man, dass die kleinste Menge, die $\mathbb{R} \cup \{i\}$ umfasst und abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist, mindestens Zahlen der Form $x + iy$ enthalten sollte und wir auch für solche Zahlen Addition und Multiplikation definieren müssen. Betrachten wir also

$$\mathbb{R}[i] = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$$

- Die Addition wird wie üblich[1] definiert:

  $$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b).$$

  Man sieht fast sofort, dass Assoziativität und Kommutativität für diese Addition gelten, dass auch ein neutrales Element, $0 + i0$, zur Addition existiert und dass jedes Element ein additiv Inverses hat.

- Wenn wir die „normale“ Regel für Multiplikation in $\mathbb{R}$ erhalten möchten, dann sollte gelten

  $$\begin{aligned}(x + iy)(a + ib) &= x\ \ (a + ib) + iy\ \ (a + ib) \\ &= x\ a + x\ ib + iy\ a + iy\ ib \\ &= x\ a + i\ x\ b + i\ y\ a + i\ i\ y\ b \\ &= (xa - yb) + i(xb + ya).\end{aligned}$$

  Die Multiplikation definieren wir auch so. Wir schreiben vorläufig mal $\odot$:

  $$(x + iy) \odot (a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

[1] Das Wort ‘üblich’ ist eigentlich nur eine Ausrede, um die Feinheiten unter den Teppich zu kehren. Formell unterscheidet man drei verschiedene $+$. Schreiben wir $+$ für die bekannte Addition in $\mathbb{R}$, $\dotplus$ für die Notation in $\mathbb{R}[i] = \{x \dotplus iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ und $\oplus$ für die Addition in $\mathbb{R}[i]$, würde es so ausschauen:

$$(x \dotplus iy) \oplus (a \dotplus ib) = (x + a) \dotplus i(y + b).$$

Weil $(\mathbb{R}[i], \oplus)$ eine Gruppe bildet, folgt, dass diese Notation sehr stabil ist und dass man ohne Probleme dreimal $+$ schreiben kann.

Jeder Buchhalter kann direkt kontrollieren, dass Assoziativität und Kommutativität für die Multiplikation gelten. Sogar die Distributivität folgt unmittelbar. Auch findet man gleich das neutrale Element:

$$(x+iy) \odot (1+i0) = (x\ 1 - y\ 0) + i\,(x\ 0 + y\ 1) = x + iy.$$

Für das inverse Element bei der Multiplikation muss man sich einige Mühe geben. Für $x + iy \neq 0 + i0$, also $x \neq 0$ und $y \neq 0$, hat man $x^2 + y^2 \neq 0$, und es ist folgendes wohldefiniert:

$$(x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Eine Kontrollrechnung ergibt

$$\begin{aligned}(x+iy)^{-1} \odot (x+iy) &= \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \odot (x+iy) = \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}x - \frac{-y}{x^2+y^2}y\right) + i\left(\frac{x}{x^2+y^2}y + \frac{-y}{x^2+y^2}x\right) = 1 + i0.\end{aligned}$$

Man kann $\mathbb{R}$ sogar als Teilmenge von $\mathbb{R}[i]$ auffassen, indem man $x + i0$ und x identifiziert. Die Multiplikation $\odot$ in $\mathbb{R}[i]$ verträgt sich mit der Multiplikation in $\mathbb{R}$:

$$x \odot a = (x+i0) \odot (a+i0) = (x\ a - 0\ 0) + i\,(x\ 0 + 0\ a) = x\ a + i0 = x\ a.$$

Deshalb gibt es keine Probleme, wenn wir statt $(x+iy)\odot(a+ib)$ ab jetzt nur $(x+iy)\,(a+ib)$ schreiben. Man setzt

$$(\mathbb{C},+,\cdot) = (\mathbb{R}[i],+,\odot)$$

und nennt $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Die Tatsache, dass $(\mathbb{C},+,\cdot)$ eine vernünftige Struktur hat, fasst man zusammen in:

Lemma 3.1 *$(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper.*

Beispiel 3.2

- $(1+i2) + (3+i4) = 4 + i6$,
- $(1+i2)\,(3+i4) = -5 + i10$,
- $\dfrac{1+i2}{3+i4} = \frac{11}{25} + i\frac{2}{25}$,
- $i^2 = (0+i1)^2 = (0+i1)\,(0+i1) = -1 + i0 = -1$.

Endlich können wir die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen:

Beispiel 3.3 *Man löst $z^2 = -17$ wie folgt:*

$$z^2 = -17 \Leftrightarrow z^2 - \left(i\sqrt{17}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{17}\right)\left(z + i\sqrt{17}\right) = 0$$

und

$$\left(z - i\sqrt{17}\right)\left(z + i\sqrt{17}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{17} = 0 \text{ oder } z + i\sqrt{17} = 0\right).$$

Man findet $z \in \left\{i\sqrt{17}, -i\sqrt{17}\right\}$.

Obwohl $\mathbb{C}$ nicht $\mathbb{R}^2$ ist, kann es nützlich sein, die Darstellung in $\mathbb{R}^2$ zu benutzen, um Fragen zu veranschaulichen.

Definition 3.4 *Sei $z \in \mathbb{C}$ und schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Der* Realteil*:* $\mathrm{Re}(z) = x$*;*
2. *Der* Imaginärteil*:* $\mathrm{Im}(z) = y$*;*
3. *Der* Betrag[2]*:* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$*;*
4. *Das* Argument*:* $\mathrm{Arg}(z) =$ *„die Größe des Winkels $\measuredangle(1, 0, z)$ gegen den Uhrzeigersinn gemessen".*

Bemerkung 3.4.1 *Die Definition des Arguments ist hier derart, dass $\mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Mit einer anderen Buchführung hätte man auch zum Beispiel $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ nehmen können. Für $z = 0$ definieren wir kein Argument.*

Man sollte noch kontrollieren, ob der oben definierte Betrag übereinstimmt mit dem schon vorher definierten Betrag für reelle Zahlen:

$$|x + i0|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \left\{ \begin{array}{c} x \text{ (wenn } x \geq 0) \\ -x \text{ (wenn } x < 0) \end{array} \right\} = |x|_{\mathbb{R}}\,;$$

also können wir ohne Probleme $|\ \ |$ schreiben.

Nützlich ist auch die sogenannte *komplexe Konjugation*??.

Definition 3.5 *Für $z \in \mathbb{C}$, mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$, schreibt man $\overline{z} = x - iy$.*

Bemerkung 3.5.1 *$\overline{z}$ nennt man das komplex Konjugierte von z.*

Lemma 3.6 *Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- $z\,\overline{z} = |z|^2$;
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Der Beweis ist direkt.

Die komplexe Konjugation kommt u.a. zur Hilfe bei der Division:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\,\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = |z|^{-2}\,w\overline{z}.$$

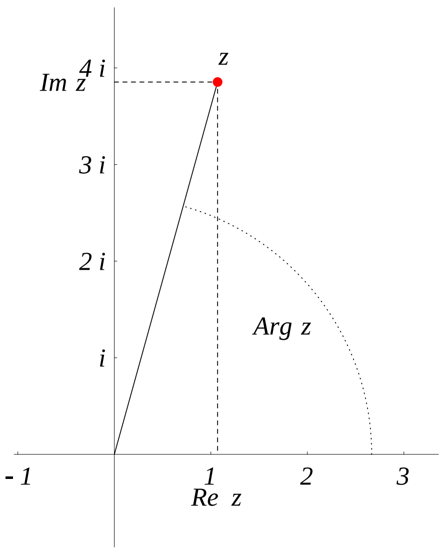
Zum Beispiel:

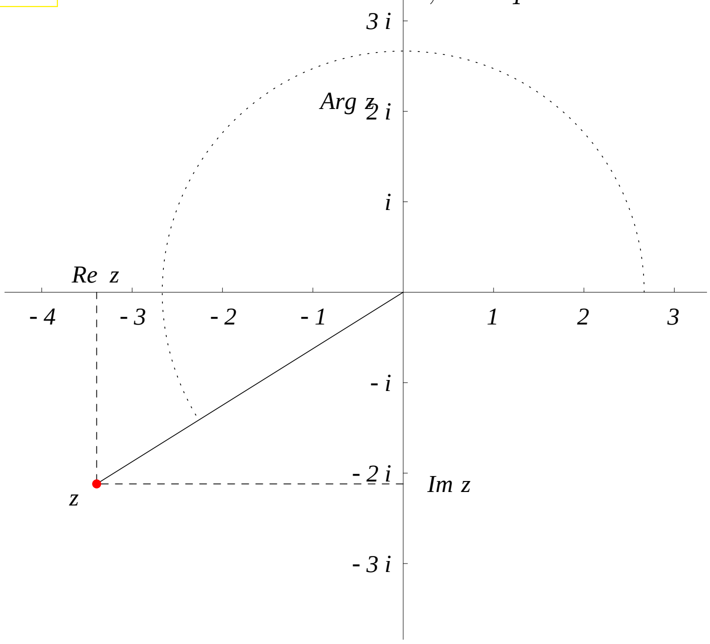
$$\frac{1-2i}{-3+4i} = \frac{1-2i}{-3+4i}\,\frac{-3-4i}{-3-4i} = \frac{(1-2i)\,(-3-4i)}{(-3+4i)\,(-3-4i)} = \frac{-11+2i}{3^2+4^2} = -\frac{11}{25} + i\frac{2}{25}.$$

Man hat jetzt zwei 'verschiedene' Möglichkeiten eine komplexe Zahl zu schreiben:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z), \\ z &= |z|\left(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))\right). \end{aligned}$$

[2] „Absolute value" oder „modulus" in Englisch.





Addition zweier komplexer Zahlen kann man darstellen, indem man das Parallelogramm zu den beiden Punkten komplett macht. Überraschenderweise kann man auch zu der Multiplikation eine geometrische Darstellung finden.

Lemma 3.7 *Wenn $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt:*

1. $|zw| = |z|\,|w|$,
2. *und für $zw \neq 0$ gilt, dass*

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) & \textit{für } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) < 2\pi, \\ \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) - 2\pi & \textit{für } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \geq 2\pi. \end{array}$$

Bemerkung 3.7.1 *Grob zusammengefasst: ein Produkt in $\mathbb{C}$ ist „Längen multiplizieren und Winkel addieren".*

Beweis. Wir schreiben $z = x + iy$ und $w = u + iv$ und finden:

$$\begin{aligned} |zw| &= |(xu - yv) + i\,(xv + yu)| = \sqrt{(x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2) + (x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2)} = \\ &= \sqrt{x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)\,(v^2 + y^2)} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{v^2 + u^2} = |z|\,|w|\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der 'zweiten' Schreibweise und $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$, $\operatorname{Arg}(w) = \beta$, haben wir[3]

$$\begin{aligned} & zw = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot |w|\,(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = \; & |z|\,|w|\,((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)) = \\ = \; & |z|\,|w|\,(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))\,. \end{aligned}$$

Also

$$\cos(\operatorname{Arg}(zw)) = \cos(\alpha + \beta) \text{ und } \sin(\operatorname{Arg}(zw)) = \sin(\alpha + \beta)$$

und weil $0 \leq \alpha + \beta \leq 4\pi$, findet man $\operatorname{Arg}(zw) = \alpha + \beta$ oder $\operatorname{Arg}(zw) = \alpha + \beta - 2\pi$. ■

[3]Die altbekannten Winkelformeln für sin und cos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

3.2 Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Definition 3.8 *Eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ nennt man Polynom. *Wenn $a_n \neq 0$, dann sagt man: „p hat Grad n“. Eine Zahl $z_1 \in \mathbb{C}$ derart, dass $p(z_1) = 0$ gilt, heißt eine* Wurzel *von p.*

Man kann mit diesem i jetzt Quadratwurzeln von negativen Zahlen ziehen. Was passiert aber, wenn man $z^2 = i$ oder $z^2 = 2 + 2i$ zu lösen versucht? Gibt es Lösungen von $z^5 = i$? Und wenn es sie gibt, kann man sie auch berechnen?

3.2.1 Das Lösen von $z^n = w$

Wir fangen gleich mal allgemeiner an und fragen uns, ob wir

$$z^n = w \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

lösen können.

Benutzt man das letzte Lemma, dann findet man

$$|z|^n = |z^n| = |w|,$$

und weil $|w| \geq 0$ ist und $|z| \geq 0$ sein sollte, folgt

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}. \tag{3.1}$$

Weil

$$\operatorname{Arg}(z^n) = \operatorname{Arg}(w),$$

wenn z eine Lösung ist, läßt der zweite Teil des gleichen Lemmas folgern, dass

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg}(z) - 2k\pi,$$

wobei man ein $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ zulassen muss. Also hat man

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{n} (\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi) \text{ für ein } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{3.2}$$

Das heißt, wenn z eine Lösung ist von $z^n = w$, dann kann man (3.1) und (3.2) kombinieren und bekommt

$$\begin{aligned} z &= |z| (\cos(\operatorname{Arg}(z)) + i \sin(\operatorname{Arg}(z))) = \\ &= \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{1}{n} (\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi) \right) + i \sin\left(\frac{1}{n} (\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi) \right) \right). \end{aligned}$$

Lemma 3.9 *Die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^n = w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ sind:*

$$\left\{ \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi}{n} \right) \right) ;\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Bemerkung 3.9.1 *Man bemerke, dass es für $w \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen gibt.*

Beweis. Vorher haben wir schon gezeigt, dass jede Lösung diese Form hat. Mit Lemma 3.7 sieht man direkt, dass man auch tatsächlich Lösungen hat:

$$\begin{aligned} z^n &= \left(\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\mathrm{Arg}\,(w)+\frac{k}{n}2\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{n}\mathrm{Arg}\,(w)+\frac{k}{n}2\pi\right)\right)\right)^n = \\ &= |w|\left(\cos\left(\mathrm{Arg}\,(w)+k2\pi\right)+i\sin\left(\mathrm{Arg}\,(w)+k2\pi\right)\right) = \\ &= |w|\left(\cos\left(\mathrm{Arg}\,(w)\right)+i\sin\left(\mathrm{Arg}\,(w)\right)\right) = w. \end{aligned}$$

Man erinnere sich, dass sin und cos 2π-periodisch sind[4]. ■

Beispiel 3.10 *Gefragt:* $z^6 = -4-4\sqrt{3}i$.

Es folgt $|z|^6 = |z^6| = \left|-4-4\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-4)^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64} = 8$ *und*

$$|z| = \sqrt[6]{8} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Auch hat man $\mathrm{Arg}(z^6) = \mathrm{Arg}(-4-4\sqrt{3}i) = \frac{4}{3}\pi$ *(fertigen Sie eine Skizze an) und damit*

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right) = \frac{2}{9}\pi+\frac{1}{3}k\pi.$$

Die Lösungen sind

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{9}\pi+i\sin\frac{5}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{8}{9}\pi+i\sin\frac{8}{9}\pi\right),$$
$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{9}\pi+i\sin\frac{11}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{14}{9}\pi+i\sin\frac{14}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{9}\pi+i\sin\frac{17}{9}\pi\right).$$

Leider ist das kaum einfacher zu schreiben. Man sieht aber so direkt, dass diese 6 Lösungen in der komplexen Ebene die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks bilden.

Beispiel 3.11 *Gefragt:* $z^2 = 1+2i$.

Es folgt $|z|^2 = |z^2| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ *und*

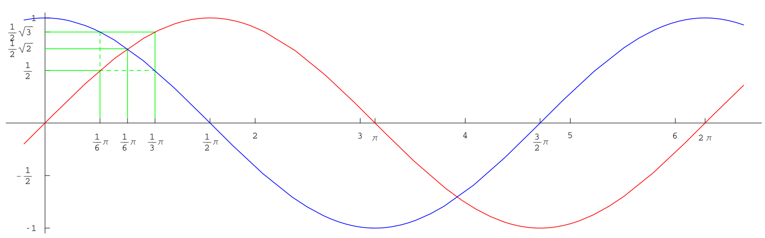
$$|z| = \sqrt[4]{5}.$$

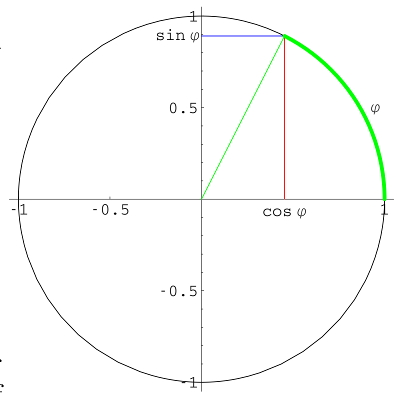
Auch $\mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}(1+2i) = \arctan(2)$ *und damit*

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{1}{2}\arctan(2) \text{ oder } \mathrm{Arg}(z) = \frac{1}{2}\arctan(2)+\pi.$$

---

[4]Vorläufig werden wir die Funktionen sin und cos benutzen, so wie man sie in der Schule eingeführt hat, das heißt, als 'Projektionen' von Punkten auf dem Einheitskreis zu den beiden Achsen. Und dann gibt es noch $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$.



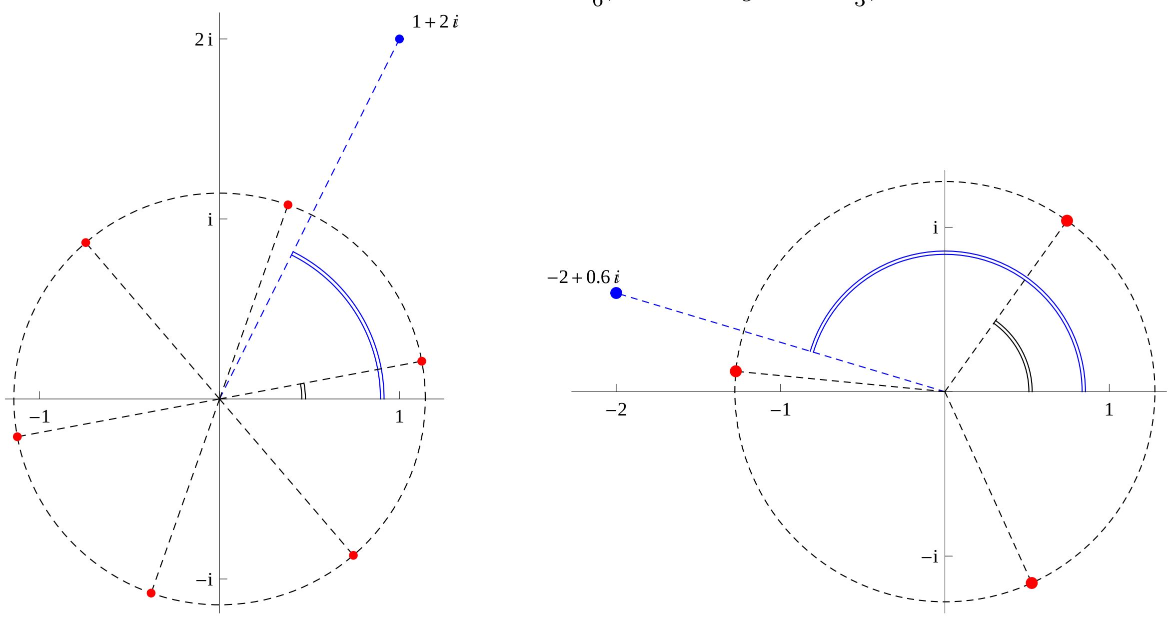


Der Graph für den Sinus geht durch $(0,0)$ und ist hier rot; der für Cosinus ist blau; für den Winkel benutzt man die Bogenlänge auf dem Einheitskreis und nicht Grad oder "degree".

Die Lösungen sind

$$\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)\right) \text{ und}$$
$$-\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)\right).$$

Beispiel 3.12 *Darstellungen in der komplexen Ebene der Lösungen von $z^6 = 1+2i$ und von $z^3 = -2+.6i$. Der Winkel in schwarz ist $\frac{1}{6}$, beziehungsweise $\frac{1}{3}$, vom blauen Winkel.*



Beispiel 3.13 *Schreibe ohne trigonometrische Funktionen:* $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)$.

Setze $x = \sqrt[4]{5}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)$ und $y = \sqrt[4]{5}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)$, und man hat $(x+iy)^2 = 1+2i$. Nun vergleicht man den Real- und Imaginärteil von rechter und linker Seite und findet

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ und } 2xy = 2.$$

So folgt $y = \frac{1}{x}$ und $x^2 - x^{-2} = 1$. Via $x^2\left(x^2 - x^{-2}\right) = x^2$ bekommt man

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Weil x^2 nicht negativ ist, hat man $x^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$. Weil x positiv ist, folgt

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right) = \frac{x}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt{\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2}}.$$

3.2.2 Das Lösen von $z^2 + \beta z + \gamma = 0$

Der Trick, den wir im letzten Beispiel angewendet haben, ist auch nützlich für das Berechnen der Wurzeln eines quadratischen Polynoms:

$$z^2 + \beta z + \gamma = 0 \Leftrightarrow \left(z + \tfrac{1}{2}\beta\right)^2 = \tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma.$$

Dieser Trick wird die quadratische Ergänzung genannt. Setzen wir $w = z + \frac{1}{2}\beta$, dann können wir $w^2 = \frac{1}{4}\beta^2 - \gamma$ lösen, entweder durch

$$|w| = \sqrt{\left|\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right|} \text{ und } \operatorname{Arg}(w) = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right) + 2k\pi$$

oder mit $w = x + iy$ durch

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right) \text{ und } 2xy = \operatorname{Im}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right).$$

Wie vorhin hat man $y = \frac{1}{2}x^{-1}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right)$ (wenn nicht zufälligerweise $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right) = 0$ gilt) und es folgt $x^2 - Bx^{-2} = A$ und

$$x^4 - Ax^2 - B = 0,$$

wobei $A = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right)$ und $B = \frac{1}{4}x^{-2}\left(\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right)\right)^2$. Als nächstes löst man nach x^2, x und anschließend nach y auf. Bemerke, dass man zwei Lösungen für x und das dazugehörende y findet. Schlussendlich bekommt man

$$z = x + iy - \frac{1}{2}\beta.$$

Beispiel 3.14 *Wenn man zum Beispiel $z^2 = -4$ lösen möchte, dann kann man auf einem Schmierblatt $z = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$ schreiben. Wenn man anschliessend das Schmierblatt dahin tut, wo es hingehört, nämlich ins Altpapier, und $z \in \{2i, -2i\}$ als Antwort liefert, wird das niemand einem übel nehmen.*

Schlimmer wird es schon, wenn man $z^2 = 2i$ löst durch $z = \pm\sqrt{i}\sqrt{2}$. Jetzt ist diese Wurzel aus i wohl ganz fehl am Platz. Da hilft nur noch

$$|z|^2 = \left|z^2\right| = 2 \textit{ also } |z| = \sqrt{2} \textit{ und}$$

$$2\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}\left(z^2\right) + 2k\pi = \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi \textit{ für } k \in \{0,1\}.$$

Man bekommt zwei Möglichkeiten: $z = z_1$ und $z = z_2$, wobei

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i, \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1 - i. \end{aligned}$$

Wenn man unbedingt die Wurzelfunktion für komplexe Zahlen definieren möchte, hat man ein Problem. Wir werden später zeigen, dass man dazu entweder eine nicht-stetige Funktion oder eine mehrwertige Funktion verwenden sollte.

Beispiel 3.15 *Wenn man Maple bittet $z^2 + \left(1 + 4\sqrt{2} + i\left(3 + \sqrt{2}\right)\right)z + \sqrt{2} + 11i = 0$ zu lösen, bekommt man wiederum zwei Möglichkeiten.*

```
> solve(z^2+(1+4*2^(1/2)+I*(3+2^(1/2)))*z+2^(1/2)+11*I=0,z);
```

$$-2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{I} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{2} + 26\,\mathrm{I}\sqrt{2} + 22 - 22\,\mathrm{I}},\ -2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{2} + 26\,\mathrm{I}\sqrt{2} + 22 - 22\,\mathrm{I}}$$

Leider der gleiche Unfug mit Wurzeln aus komplexen Zahlen. Erst wenn man das vernünftig schreibt oder schreiben lässt, findet man $z_1 = -1 - i\sqrt{2}$ und $z_2 = -4\sqrt{2} - 3i$.

Analysis 1, Woche 4

Komplexe Zahlen II

A1

4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Wir haben gesehen, dass eine Gleichung wie $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ meistens zwei Lösungen hat und, dass $z^n = \alpha$ sogar n Lösungen in $\mathbb{C}$ hat.

Theorem 4.1 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Die Gleichung*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{4.1}$$

hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

Beweis. Einen Beweis werden Sie spätestens in der Vorlesung Funktionentheorie bekommen. Der Beweis wird analytische Methoden verwenden. ∎

Lemma 4.2 *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und schreibe*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \tag{4.2}$$

Wenn man eine Lösung z_0 von (4.1) hat, das heißt $p(z_0) = 0$, dann gibt es $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ so, dass

$$p(z) = (z - z_0)\left(z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-2} z + b_{n-1}\right).$$

Beweis. Wir erläutern den Algorithmus, den man benutzt bei der Division $p(z) / (z + w)$:

- Erster Schritt:

$$\begin{array}{lll}
z + w \ / & z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n & \setminus \ z^{n-1} \\
 & \underline{z^n + w z^{n-1}} & \\
 & (a_1 - w) z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n &
\end{array}$$

- Zweiter Schritt:

$$\begin{array}{lll}
z + w \ / & z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n & \setminus \ z^{n-1} + (a_1 - w) z^{n-2} \\
 & \underline{z^n + w z^{n-1}} & \\
 & (a_1 - w) z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n & \\
 & \underline{(a_1 - w) z^{n-1} + w (a_1 - w) z^{n-2}} & \\
 & \qquad (a_2 - w (a_1 - w)) z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n &
\end{array}$$

usw. Man findet am Ende einen konstanten Restterm, den wir c nennen. Also

$$\frac{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}{z+w} = z^{n-1} + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1} + \frac{c}{z+w}.$$

Nehmen wir $w = -z_0$,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - w = a_1 + z_0, \\ b_2 &= a_2 - w\,(a_1 - w) = a_2 + z_0\,(a_1 + z_0)\,, \\ b_3 &= \ldots\,, \end{aligned}$$

und schreiben wir $q(z) = z^{n-1} + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1}$, dann folgt

$$\frac{p(z)}{z - z_0} = q(z) + \frac{c}{z - z_0}$$

und

$$p(z) = (z - z_0)\, q(z) + c.$$

Man findet $0 = p\,(z_0) = (z_0 - z_0)\, q(z_0) + c = c$ und dann auch, dass

$$p(z) = (z - z_0)\, q(z)$$

mit q ein Polynom von Grad $n - 1$. ■

Korollar 4.3 *Sei $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und definiere p durch (4.2). Dann gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$p(z) = (z - z_1)\,(z - z_2) \ldots (z - z_n)\,. \tag{4.3}$$

Beweis. Wir benutzen vollständige Induktion. Für $n = 1$ hat man $p(z) = z + a_1$, und das Ergebnis folgt, wenn wir $z_1 = -a_1$ nehmen.

Jetzt nehmen wir an, dass sich jedes Polynom von Grad n schreiben lässt wie in (4.3).

Sei P ein Polynom von Grad $n + 1$:

$$P(z) = z^{n+1} + a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \cdots + a_n z + a_{n+1}.$$

Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass $P(z) = 0$ mindestens eine Lösung hat: nennen wir sie z_0. Mit dem letzten Lemma gibt es ein Polynom p so, dass

$$P(z) = (z - z_0)\, p(z)$$

Weil p Grad n hat, gibt es $z_1, \ldots, z_n$ mit

$$p(z) = (z - z_1)\,(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

und damit folgt die Behauptung: $P(z) = (z - z_0)\,(z - z_1)\,(z - z_2) \ldots (z - z_n)$. ■

4.1.1 Sein und haben

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass man ein Polynom von Grad n schreiben kann als Produkt von n linearen Faktoren. Das heißt, die Wurzeln $z_1, \dots, z_n$ existieren. Eine ganz andere Frage ist, ob man diese z_i auch explizit berechnen kann. Approximieren und den Limes nehmen wird, wenn man das vernünftig macht, sicher funktionieren. Wenn man diese Wurzeln aber durch ein algebraisches Verfahren berechnen möchte, wie es die pq-Formel[1] macht für Polynome von Grad 2, dann geht das leider selten. Für allgemeine Polynome von Grad 3 kann man durch die Methode von Cardano[2] die Wurzeln finden und für allgemeine Polynome von Grad 4 gibt es die Methode von Ferrari. Dann hört es auf. Im Allgemeinen hat man für Polynome von Grad 5 und höher keine algebraische Methode um die Wurzeln zu finden: "es gibt die Wurzeln, aber man hat sie nicht explizit". Es gibt sogar einen Satz, der sagt, dass es keine algebraische Formel geben kann.

Übrigens scheint Cardano (1501-1576) die Methode nicht selber erfunden zu haben sondern er soll sie bloß abgeschrieben haben.

4.1.2 Reelle Koeffizienten und komplexe Wurzeln.

Lemma 4.4 *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und definiere p durch (4.2). Wenn $p(z_1) = 0$ dann gilt auch $p(\overline{z_1}) = 0$.*

Beweis. Weil die a_i reell sind hat man sofort

$$\begin{aligned} p(\overline{z_1}) &= (\overline{z_1})^n + a_1 (\overline{z_1})^{n-1} + a_2 (\overline{z_1})^{n-2} + \dots + a_{n-1} (\overline{z_1}) + a_n = \\ &= \overline{z_1^n + a_1 z_1^{n-1} + a_2 z_1{}^{n-2} + \dots + a_{n-1} z_1 + a_n} = \overline{p(z_1)} = 0. \end{aligned}$$

■

4.2 Ungleichungen und $\mathbb{C}$

Es gibt keine totale Ordnung von $\mathbb{C}$, die zu der Körperstruktur passt. Wenn wir $i > 0$ nehmen würden, dann müsste $-1 = i^2 > 0$ stimmen. Ebenso führt $-i > 0$ zu $-1 > 0$. Obwohl es keine vernünftige Anordnung in $\mathbb{C}$ gibt, gibt es doch einige nützliche Ungleichungen.

Lemma 4.5 *Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$ *und* $|\mathrm{Im}\, z| \le |z|$;
2. $|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
3. *die Dreiecksungleichung:* $|z + w| \le |z| + |w|$.

[1] Wieso sind p und q so beliebt? Es gibt die Englische Redensart: Mind your p's and q's. Eine Erklärung die man im Internet findet:

Mind your pints and quarts. This is suggested as deriving from the practise of chalking up a tally of drinks in English pubs (on the slate). Publicans had to make sure to mark up the quart drinks as distinct from the pint drinks.

[2] Siehe `http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html`
`http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html`

Beweis. Aussage 1 folgt sofort. Aussage 2 folgt aus

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \leq (\operatorname{Re} z)^2 + 2\,|\operatorname{Re} z|\,|\operatorname{Im} z| + (\operatorname{Im} z)^2 = \\ &= (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2 . \end{aligned}$$

Für 3 braucht man, dass $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, und wendet dies an für $\operatorname{Re}(z\overline{w})$. Man hat so:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\,\overline{(z+w)} = (z+w)\,(\overline{z}+\overline{w}) = \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = z\overline{z} + \left(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\right) + w\overline{w} = \\ &= z\overline{z} + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + w\overline{w} \leq \\ &\leq |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 . \end{aligned}$$

Und weil der Betrag nicht negativ ist, folgt

$$|z+w| \leq |z| + |w| .$$

■

4.3 Geometrische Überlegungen

Beispiel 4.6 *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq \beta$. Weil $|z-\alpha|$ die Distanz von α zu z darstellt, kann man $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-\alpha| = |z-\beta|$ beschreiben als die $z \in \mathbb{C}$, die die gleiche Distanz zu α als auch zu β haben. Geometrisch gesprochen wäre das die Mittelsenkrechte. Berechnen kann man dies auch. Man hat*

$$(z-\alpha)\,\overline{(z-\alpha)} = |z-\alpha|^2 = |z-\beta|^2 = (z-\beta)\,\overline{(z-\beta)}.$$

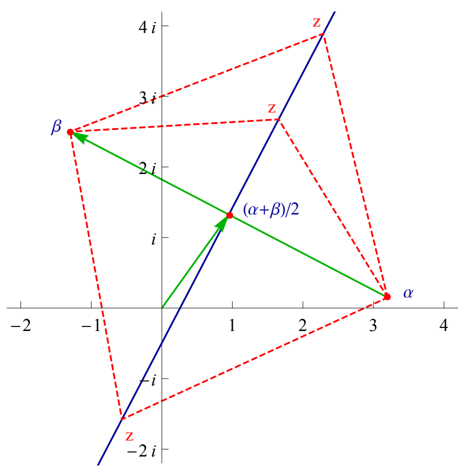
Dies wird

$$\overline{(\beta-\alpha)}z + (\beta-\alpha)\,\overline{z} = |\beta|^2 - |\alpha|^2 .$$

Schreibt man $z = x + iy$, so folgt nach einigen Schritten,dass

$$x \operatorname{Re}(\beta-\alpha) + y \operatorname{Im}(\beta-\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(|\beta|^2 - |\alpha|^2\right) . \qquad (4.4)$$

Mit Schulkenntnissen sollte man erkennen, dass (4.4) die Gleichung einer Geraden in der Ebene ist, senkrecht auf $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\beta-\alpha) \\ \operatorname{Im}(\beta-\alpha) \end{pmatrix}$ und mit dem Stützpunkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\alpha+\beta) \\ \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$.



Beispiel 4.7 *Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $ab \neq 0$. Dann beschreibt $\{z \in \mathbb{C}; a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z = c\}$ eine Gerade in $\mathbb{C}$. Und jede Gerade in $\mathbb{C}$ lässt sich so darstellen. Wenn man bedenkt, dass $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, ist $a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z = c$ gleich*

$$\overline{(a+ib)}z + (a+ib)\,\overline{z} = 2c$$

Nennt man $w = a + ib$, dann wird das

$$\overline{w}z + w\overline{z} = 2c. \tag{4.5}$$

Beispiel 4.8 *Sei $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann beschreibt $\{z \in \mathbb{C}; |z + w| = r\}$ einen Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $-w$. Und jeden Kreis in $\mathbb{C}$ kann man so beschreiben. Weil $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$ gilt, ist $|z + w| = r$ gleich*

$$z\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + w\overline{w} = r^2. \tag{4.6}$$

Wir können die Formel für Kreis und Gerade kombinieren und finden dann das folgende Lemma.

Lemma 4.9 *Sei K ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$ mit $|w|^2 > ab$ derart, dass*

$$K = \{z \in \mathbb{C}; az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\}. \tag{4.7}$$

Beweis. Wenn $a = 0$, dann hat man einen Ausdruck der Form (4.5) und beschreibt (4.7) eine Gerade. Wenn $a \neq 0$, dann ist (4.7) gleich

$$z\overline{z} + \overline{\left(\frac{w}{a}\right)}z + \left(\frac{w}{a}\right)\overline{z} + \frac{b}{a} = 0$$

und man hat

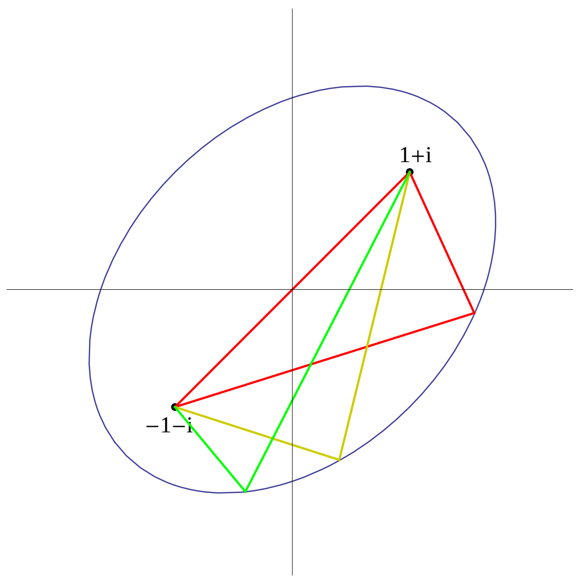
$$\left|z + \frac{w}{a}\right|^2 = \left|\frac{w}{a}\right|^2 - \frac{b}{a} = \frac{|w|^2 - ab}{a^2}.$$

Wenn, und nur wenn $|w|^2 > ab$ gilt, ist die rechte Seite positiv und es gibt einen Kreis. ■

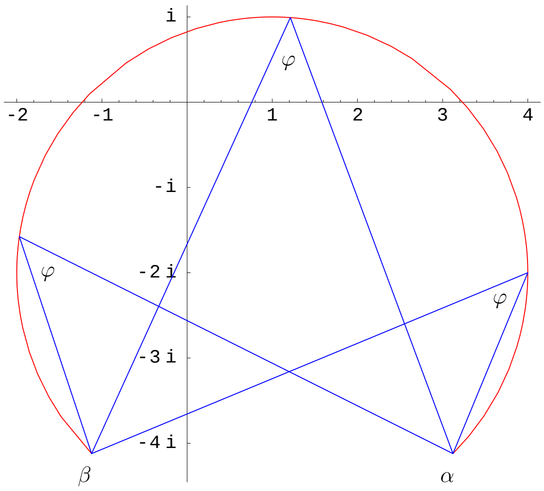
Beispiel 4.10 *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell > |\alpha - \beta|$. Die Menge*

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - \alpha| + |z - \beta| = \ell\}$$

beschreibt eine Ellipse. Wenn man $\alpha = 1 + i$, $\beta = -1 - i$ und $\ell = 4$ nimmt, bekommt man die folgende Figur.



Beispiel 4.11 *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann beschreibt die Menge $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg}(z-\alpha) = \operatorname{Arg}(z-\beta)+\varphi\}$ einen Teil von einem Kreis durch α und β. Einen Beweis werden wir später geben.*



4.4 Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$

Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ lassen sich graphisch in der Ebene darstellen. Für Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ bräuchte man 2×2 reelle Dimensionen für eine ähnliche Darstellung. Trotzdem lassen sich einige einfache Abbildungen graphisch erklären.

Beispiel 4.12

1. *Eine Verschiebung in $\mathbb{C}$ läßt sich beschreiben durch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit*
$$f(z) = z + w.$$
2. *Die Spiegelung an der reellen Achse kann man beschreiben durch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit*
$$f(z) = \overline{z}.$$
3. *Eine Rotation um 0 kann man beschreiben durch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit*
$$f(z) = wz,$$
wobei $w \in \mathbb{C}$ so ist, dass $|w| = 1$. Der Winkel der Rotation ist $\operatorname{Arg} w$.
4. *Eine Skalierung zentriert in 0 wird $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit*
$$f(z) = wz,$$
wobei $w \in \mathbb{R}^+$. Der Skalierungsfaktor ist genau w.

   Wenn man $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nimmt, dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = wz$ eine Kombination einer Rotation mit Winkel $\operatorname{Arg}(w)$ und einer Skalierung mit Faktor $|w|$.
5. *Kombinationen von Verschiebungen, Rotationen und Skalierungen heißen Gleichförmigkeitstransformationen. Die allgemeine Formel einer solchen Abbildung ist*
$$f(z) = \alpha z + \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } \alpha \neq 0. \tag{4.8}$$
Ein solches f bildet eine Gerade auf einer Gerade ab und einen Kreis auf einen Kreis. Nimmt man auch noch eine Spiegelung dazu, bekommt man eine Abbildung der Form $f(z) = \alpha\overline{z} + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \neq 0$.

6. *Die Spiegelung am Einheitskreis wird eine Inversion genannt. Die dazugehörende Abbildung ist* $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}. \tag{4.9}$$

Manchmal nennt man auch $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ *mit* $f(z) = \frac{1}{z}$ *eine Inversion.*

Die Inversion in (4.9) bildet eine Teilmenge der Form

$$K = \{z \in \mathbb{C}; az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\}$$

mit $0 \notin K$ *ab auf*

$$f(K) = \{f(z); z \in \mathbb{C} \text{ mit } az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\},$$

das heißt $f(K) = \left\{\zeta \in \mathbb{C}; b\zeta\overline{\zeta} + \overline{w}\zeta + w\overline{\zeta} + a = 0\right\}$. *Denn schreibt man* $\zeta = (\overline{z})^{-1}$, *so folgt* $z = \left(\overline{\zeta}\right)^{-1}$ *und ergibt die Gleichung*

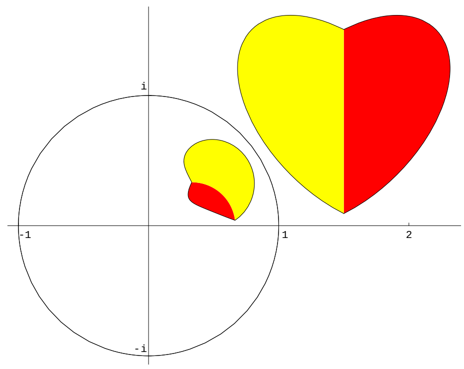
$$az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0,$$

dass

$$a\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta} + \overline{w}\frac{1}{\overline{\zeta}} + w\frac{1}{\zeta} + b = 0$$

und, nachdem man mit $\zeta\overline{\zeta}$ *multipliziert hat,*

$$a + \overline{w}\zeta + w\overline{\zeta} + b\zeta\overline{\zeta} = 0.$$



Definition 4.13 *Sei* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ *mit* $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. *Man nennt*

$$f(z) = \frac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta} \tag{4.10}$$

eine gebrochen lineare Abbildung.

Bemerkung 4.13.1 *So wie es hier definiert ist, müsste man Bedenken haben, denn wir sagen nicht, welche* z *erlaubt sind. Für* $\gamma = 0$ *und* $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ *folgt* $\delta \neq 0$ *und ist (4.10) wohldefiniert auf* $\mathbb{C}$. *Für* $\gamma \neq 0$ *ist (4.10) nur definiert auf* $\mathbb{C} \setminus \{\delta/\gamma\}$.

Meistens definiert man jedoch die gebrochen linearen Abbildungen als Abbildung von $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *nach* $\mathbb{C}^*$ *und die Definition ist wie folgt für* $\gamma \neq 0$:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{\delta/\gamma\}, \\ \infty & \text{für } z = \delta/\gamma, \\ \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{für } z = \infty. \end{cases} \tag{4.11}$$

Für $\gamma = 0 \neq \alpha\delta$ *ist (4.10) wohldefiniert auf* $\mathbb{C}$ *und man setzt* $f(\infty) = \infty$. *Man könnte denken, dass wir in (4.11) mit* $\frac{1}{0}$ *und* $\frac{\infty}{\infty}$ *gerechnet haben, aber sagen Sie es bitte nicht laut. Hier ist* ∞ *nur ein Symbol, dass man als „unendlich“ aussspricht.*

Bemerkung 4.13.2 *Wenn $\gamma = 0$ in $f(z) = \dfrac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta}$, dann folgt aus $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, dass $\alpha \neq 0$ und f ist wie in (4.8). Wenn $\gamma \neq 0$, dann gilt*

$$f(z) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} \frac{1}{\gamma z - \delta}$$

und f ist die Kombination von den hier oben genannten Abbildungen:

$$\begin{array}{lll} f_1(z) = \gamma z, & f_2(z) = z - \delta, & f_3(z) = \frac{1}{z}, \\ f_4(z) = \overline{z}, & f_5(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} z, & f_6(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma}. \end{array}$$

Es gilt nämlich: $f(z) = (f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$.

Lemma 4.14 *Sei f eine gebrochene lineare Abbildung. Wenn $E \subset \mathbb{C}^*$ ein Kreis oder eine Gerade ist, dann ist auch $f(E)$ ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}^*$.*

Beweis. Weil jede gebrochene lineare Abbildung zusammengesetzt werden kann aus Verschiebung, Drehskalierung und $z \mapsto z^{-1}$, brauchen wir es nur für diese Abbildungen einzeln zu beweisen. Für eine Verschiebung oder Drehskalierung kann man die Aussage glauben oder sie auch leicht selbst beweisen. Für die Inversion ist dies schwieriger. Wir verwenden dazu Lemma 4.9.

Sei

$$K = \{z \in \mathbb{C}; a\, z\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\}.$$

Wenn E ein Kreis ist, gilt $E = K$ für ein $a \neq 0$; wenn E eine Gerade ist, gilt $E = K \cup \{\infty\}$ mit $a = 0$.

Für die Inversion setzen wir $\xi = f(z) = z^{-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}; a\ z\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\}\right) = \\ = \left\{\xi \in \mathbb{C}; a\ \frac{1}{\xi}\overline{\left(\frac{1}{\xi}\right)} + \overline{w}\frac{1}{\xi} + w\overline{\left(\frac{1}{\xi}\right)} + b = 0\right\} \\ = \left\{\xi \in \mathbb{C}; a + \overline{w}\overline{\xi} + w\xi + b\xi\overline{\xi} = 0\right\} \end{aligned}$$

und man hat das gewünschte Ergebnis gezeigt, denn die Gleichung innerhalb der letzten Zeile gehört zu einer Gerade oder zu einem Kreis. Man sollte noch betrachten was mit 0 und ∞ passiert.

- Wenn $ab \neq 0$ ist K und $f(K)$ ein Kreis und es gilt sowohl $\{0, \infty\} \not\subset E$ als auch $\{0, \infty\} \not\subset f(E)$.
- Wenn $a \neq 0$ und $b = 0$ wird ein Kreis durch 0 auf einer Gerade in $\mathbb{C}^*$ abgebildet mit $f(0) = \infty$.
- Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ wird eine Gerade in $\mathbb{C}^* \backslash \{0\}$ auf einen Kreis durch 0 abgebildet mit $f(\infty) = 0$.
- Wenn $a = b = 0$ wird eine Gerade durch 0 auf einer Gerade durch 0 abgebildet mit $f(0) = \infty$ und $f(\infty) = 0$. ■

Lemma 4.15 *Die inverse Abbildung zu einer gebrochen linearen Abbildung ist auch eine gebrochen lineare Abbildung.*

Beweis. Wenn $w = \dfrac{\alpha\ z - \beta}{\gamma\ z - \delta}$, mit $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, dann hat man $z = \dfrac{\delta\ w - \beta}{\gamma\ w - \alpha}$ wenn $w \neq \dfrac{\alpha}{\gamma}$. Man kann leicht sehen, dass $f^{\text{inv}}(\infty) = \dfrac{\delta}{\gamma}$ und $f^{\text{inv}}(\dfrac{\alpha}{\gamma}) = \infty$ auch passen. ■

Gehen wir mal zurück zu Beispiel 4.11. Dort haben wir die Menge

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg}(z-\alpha) = \operatorname{Arg}(z-\beta) + \varphi\}$$

betrachtet für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ mit $\alpha \neq \beta$. Setzen wir $w = \cos\varphi + i\sin\varphi$, dann folgt aus $\operatorname{Arg}(z-\alpha) = \operatorname{Arg}(z-\beta) + \varphi$, dass

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = rw$$

für irgendein $r \in \mathbb{R}^+$. Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ ist eine gebrochen lineare Abbildung, dann ist also auch f^{inv} eine gebrochen lineare Abbildung. Dann beschreibt $\left\{f^{\text{inv}}(rw); r \in \mathbb{R}\right\}$ einen Kreis oder eine Gerade, weil $\{rw; r \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade beschreibt. Weil wir nur eine halbe Gerade haben, nämlich $\{rw; r \in \mathbb{R}^+\}$, bekommen wir mit $\left\{f^{\text{inv}}(rw); r \in \mathbb{R}^+\right\}$ wahrscheinlich nur einen Teil dieses Kreises. Indem wir die beiden Endpunkte betrachten, haben wir $f^{\text{inv}}(0) = \alpha$ und $f^{\text{inv}}(\infty) = \beta$. Das heisst, wir haben wahrscheinlich nur einen Bogen des Kreises und dieser Bogen verbindet α mit β. Weil $\operatorname{Arg}(z-\alpha) > \operatorname{Arg}(z-\beta)$ kann man sich davon überzeugen, dass dieser Bogen rechts von der Geraden $\alpha\beta$ in der Richtung α nach β liegt.

Analysis 1, Woche 5

Folgen und Fundamente

A1

5.1 Cauchy-Folgen und Konvergenz

Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ und wird meistens dargestellt durch

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in \mathbb{R}$ vorgeschrieben. Eine Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$.

5.1.1 Monotone Folgen

Die reellen Zahlen haben wir eingeführt, indem wir monoton wachsende Folgen in $\mathbb{Q}$ benutzt haben. Bei einer wachsenden, beschränkten, rationalen Folge $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ und der dadurch definierten Zahl $x \in \mathbb{R}$ schreibt man

$$q_n \uparrow x.$$

Wir haben bemerkt, dass man mit monoton wachsenden, beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$ keine noch größere Zahlenmenge bekommt. Diese Aussage werden wir mal genauer betrachten, und dafür brauchen wir Teilfolgen.

Definition 5.1 *Eine Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt eine* Teilfolge *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, wenn es eine streng wachsende Funktion*

$$(k \mapsto n_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

gibt, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2 *Die Folge $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine Teilfolge von $\{n\}_{n=0}^{\infty}$:*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \dots\}.$$

Die Folge $\{1 + n^2 + (-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ ist keine Teilfolge von $\{n\}_{n=0}^{\infty}$, denn in

$$\left\{1 + n^2 + (-1)^n\right\}_{n=0}^{\infty} = \{2, 1, 6, 9, 18, \dots\}$$

stehen 2 und 1 falsch herum.

Lemma 5.3 *Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine wachsende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein kleinstes $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n \le x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung 5.3.1 *Wir schreiben in dem Fall, dass $x_n \uparrow x$ für $n \to \infty$ oder einfach nur $x_n \uparrow x$.*

Bemerkung 5.3.2 *Für eine fallende beschränkte Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ schreiben wir $x_n \downarrow x$, wenn $-x_n \uparrow -x$. Also x ist hier die größte untere Schranke.*

Beweis. Entweder a) gibt es eine streng wachsende Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ oder b) x_n ist konstant für n genügend groß, sagen wir für $n \geq N$. Im zweiten Fall nimmt man $x = x_N \in \mathbb{R}$. Betrachten wir nun den ersten Fall und schreiben wir $y_k = x_{n_k}$. Weil $y_k \in \mathbb{R}$, gibt es $q_{k,m} \in \mathbb{Q}$ mit $q_{k,m} \uparrow y_k$ für $m \to \infty$. Weil $y_0 < y_1$ gibt es m_1 mit $q_{0,0} \leq y_0 \leq q_{1,m_1}$; weil $y_1 < y_2$ gibt es m_2 mit $q_{1,m_1} \leq y_1 \leq q_{2,m_2}$ usw. Das heißt, wir finden eine wachsende Folge

$$q_{1,m_1} \leq q_{2,m_2} \leq q_{3,m_3} \leq \dots$$

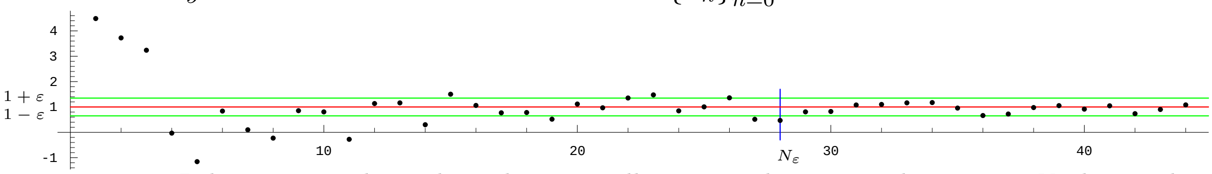
und weil $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ beschränkt ist, ist auch $\{q_{n,m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ beschränkt. Dies bedeutet, dass die Folge $\{q_{n,m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ zu einem Element von $\mathbb{R}$ führt. Nennen wir dieses Element x. Es gilt $q_{n,m_n} \uparrow x$. Weil $x_k \leq x_{n_k} = y_k \leq q_{k+1,m_{k+1}}$ folgt $x_k \leq x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wenn $\tilde{x} < x$ gilt, gibt es $x_{n_k} = y_k \geq q_{k,m_k} > \tilde{x}$. Das heißt, x ist das kleinste. ■

5.1.2 Cauchy-Folgen sind konvergente Folgen

In Definition 2.19 ist definiert worden, was eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist.

> *Eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ heißt konvergent, wenn es $y \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass*
>
> $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon n > N_\varepsilon \implies |x_n - y| < \varepsilon, \tag{5.1}$$
>
> Man schreibt
>
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = y$$

und die Zahl y heißt *Grenzwert* oder *Limes* von $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.



Konvergenz in $\mathbb{R}$ kann man sich wie hier oben vorstellen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, derart, dass wenn man mit n an N_ε vorbei ist, dann liegen die zugehörigen a_n innerhalb einer Bandbreite ε von dem Limes. Der im Bild dargestellte Limes ist 1.

Definition 5.4 *Eine Folge, die nicht konvergent ist, nennt man* divergent.

Wir haben auch Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ betrachtet. Diese Cauchy-Folgen werden wir uns nun etwas ausgiebiger anschauen.

> *Eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn folgendes gilt:*
>
> $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ n, m > N_\varepsilon \implies |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

In den ersten Wochen haben wir schon genannt, dass Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ immer auch konvergent sind und umgekehrt. Diesmal folgt der Satz mit einem Beweis:

Theorem 5.5 *Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen.*

- *Wenn sie konvergent ist, dann ist sie eine Cauchy-Folge.*
- *Wenn sie eine Cauchy-Folge ist, dann ist sie konvergent.*

Beweis Theorem 5.5: Konvergent ⇒ Cauchy. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N_\varepsilon^{\text{konv}}$ die zugehörige Zahl aus (5.1). Dann passt $N_\varepsilon^{\text{Cauchy}} := N_{\varepsilon/2}^{\text{konv}}$ für die Definition in (5.2). Denn für $n, m > N_{\varepsilon/2}^{\text{konv}}$ gilt:

$$|x_n - x_m| = |x_n - y + y - x_m| \leq |x_n - y| + |y - x_m| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

■

Die Behauptung in der anderen Richtung ist schwieriger und braucht mehrere Zwischenschritte.

Lemma 5.6 *Jede Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|x_n - x_m| < 1$ gilt für $n, m > N_1$. Dies folgt aus der Definition von Cauchy-Folge, wenn man $\varepsilon = 1$ nimmt. Als nächstes setzen wir

$$M = \max\left\{|x_0|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_1}|, |x_{N_1+1}| + 1\right\}.$$

Weil hier endlich viele Zahlen stehen, ist $M \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Für $n \in \{0, \dots, N_1\}$ gilt dann direkt, dass $|x_n| \leq M$, und für $n \geq N_1 + 1$ folgt

$$|x_n| = |x - x_{N_1+1} + x_{N_1+1}| \leq |x - x_{N_1+1}| + |x_{N_1+1}| < 1 + |x_{N_1+1}| \leq M.$$

Das heißt, dass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und bedeutet, dass die Folge durch M beschränkt ist. ■

Lemma 5.7 *Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge in $\mathbb{R}$. Wenn es eine wachsende Teilfolge gibt sind wir fertig. Nehmen wir also an, so eine Folge gibt es nicht. Das bedeutet, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ nur höchstens endlich viele $\left\{m_1^k, m_2^k, \dots, m_{\max}^k\right\}$ gibt mit

$$k < m_1^k < m_2^k < \dots < m_{\max}^k =: m(k) \text{ und } x_k \leq x_{m_1^k} \leq x_{m_2^k} \leq \dots \leq x_{m_{\max}^k}.$$

Wenn es überhaupt keinen größeren gibt, dann nehmen wir $m(k) := k$.

- Setze $n_0 := m(0)$ und $y_0 := x_{n_0}$.

  Aus der Konstruktion folgt, dass $x_n \leq y_0$ gilt für alle $n > n_0$.

- Setze $n_1 := m(n_0 + 1) > n_0$ und $y_1 := x_{n_1}$.

  Es gilt $y_0 \geq x_{n_1} = y_1$ und außerdem, dass $x_n \leq y_1$ für alle $n > n_1$.

- Setze $n_2 := m(n_1 + 1) > n_1$ und $y_2 := x_{n_{21}}$.

  Es gilt $y_1 \geq x_{n_2} = y_2$ und außerdem, dass $x_n \leq y_2$ für alle $n > n_2$. Und so weiter. Wir setzen iterativ

$$n_0 := m(0) \text{ und } n_{k+1} = m(n_k + 1) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

und finden für $y_k := x_{n_k}$, dass $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. ■

Eine Cauchy-Folge hat also eine beschränkte monotone Teilfolge. Wenn diese Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ wachsend ist, gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \uparrow y$ und auch $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = y$ gilt.

Lemma 5.8 *Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \uparrow x \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Bemerkung 5.8.1 *Man schreibt statt $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ manchmal auch $x_n \to y$.*

Beweis. Weil x die kleinste obere Schranke für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, ist $x - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ keine obere Schranke. Das bedeutet, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > x - \varepsilon$. Weil die Folge wachsend ist und nach oben durch x beschränkt ist, gilt

$$x - \varepsilon < x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq \cdots \leq x$$

und für $n \geq N$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$. ■

Lemma 5.9 *Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge mit einer nach x konvergenten Teilfolge. Dann konvergiert $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach x.*

Beweis. Weil $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es für $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$n, m > N_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Für die konvergente Teilfolge $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$n > N_\varepsilon^{(2)} \Rightarrow |x_{k_n} - x| < \varepsilon.$$

Nehmen wir $N_\varepsilon = \max\left(N_{\varepsilon/2}^{(1)}, N_{\varepsilon/2}^{(2)}\right)$, so folgt für $n > N_\varepsilon$, dass

$$|x_n - x| \leq \left|x_n - x_{k_{N_\varepsilon+1}}\right| + \left|x_{k_{N_\varepsilon+1}} - x\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Den ersten Term kann man abschätzen, weil $n > N_{\varepsilon/2}^{(1)}$ und $k_{N_\varepsilon+1} \geq N_\varepsilon + 1 > N_{\varepsilon/2}^{(1)}$; den zweiten Term, weil $k_{N_\varepsilon+1} \geq N_\varepsilon + 1 > N_{\varepsilon/2}^{(2)}$. ■

Beweis Theorem 5.5: Cauchy $\Rightarrow$ konvergent. Lemma 5.6 zeigt, dass die Cauchy-Folge beschränkt ist, und Lemma 5.7, dass Sie eine monotone beschränkte Teilfolge hat. Diese Teilfolge hat nach Lemma 5.8 einen Limes x und durch Lemma 5.9 konvergiert dann auch die Cauchy-Folge nach x. ■

Korollar 5.10 *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent in $\mathbb{C}$.*
Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist Cauchy in $\mathbb{C}$.

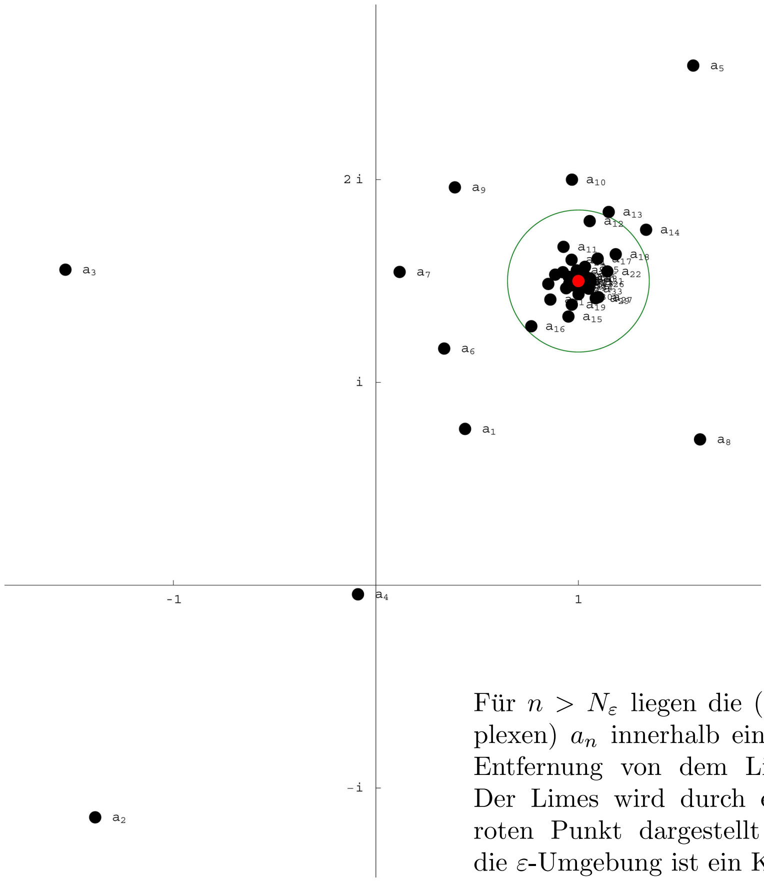
Beweis. Man braucht eigentlich nur zu bemerken, dass

$$|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \text{ und } |\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \text{ und } |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen zeigt man

$$\begin{array}{ccc}
\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\{\mathrm{Re}\, z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy}\\ \{\mathrm{Im}\, z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy}\end{array}\right. \\
 & & \Updownarrow \\
\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\{\mathrm{Re}\, z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\\ \{\mathrm{Im}\, z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\end{array}\right.
\end{array}$$

■



Für $n > N_\varepsilon$ liegen die (komplexen) a_n innerhalb einer ε-Entfernung von dem Limes. Der Limes wird durch einen roten Punkt dargestellt und die ε-Umgebung ist ein Kreis.

5.1.3 Rechenregeln

Wir bringen hier die wichtigsten Rechenregeln für den Limes.

Lemma 5.11 *Seien $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ und $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $c \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(a_n) = \mathrm{Re}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,(a_n) = \mathrm{Im}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.

Bemerkung 5.11.1 *Weil $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ liegt, gelten diese Regeln selbstverständlich auch für Folgen in $\mathbb{R}$.*

Bemerkung 5.11.2 *Zu 4 soll man folgendes bemerken. Wenn* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *dann gibt es* N *derart, dass für* $n > N$ *folgt* $b_n \neq 0$. *Für diese* n *ist* a_n/b_n *wohldefiniert.*

Bemerkung 5.11.3 *Wenn man* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}(a_n)$ *und* $\operatorname{Arg}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ *vergleicht, findet man nicht immer den gleichen Grenzwert. Betrachte* $a_n = 1 - \frac{i}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}\left(1 - \frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2\pi,$$
$$\operatorname{Arg}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) = \operatorname{Arg}(1) = 0.$$

Bemerkung 5.11.4 *Man kann auch reelle Folgen wie* $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ *betrachten. Für eine solche Folge möchte man* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *schreiben. Das heißt dann, der Limes existiert nicht (oder existiert nur im uneigentlichen Sinne), und es gibt für jedes* $M \in \mathbb{N}$ *eine Zahl* $N_M \in \mathbb{N}$, *so dass* $a_n > M$ *wenn* $n > N_M$.

Ähnlich kann man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *definieren. Die Rechenregeln, die hier oben stehen, gelten im allgemeinen nicht. Es gilt jedoch:*

1. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $c > 0$, *dann* $\lim_{n\to\infty} ca_n = \infty$.
2. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *dann* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.
3. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{R}$, *dann* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.
4. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *dann* $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.
5. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{R}^+$, *dann* $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.

Einen Beweis dieser Behauptungen dürfen Sie sich selber ausdenken.

Übrigens, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *dann kann man so allgemein nichts sagen zu* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$. *Auch aus* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *kann man noch nichts folgern für* $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n)$.

Beweis von Lemma 5.11. Nennen wir $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N_{\varepsilon/(1+|c|)} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/(1+|c|)$ für $n > N_{\varepsilon/(1+|c|)}$. Es folgt, dass für $n > N_{\varepsilon/(1+|c|)}$

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| \leq |c|\,\frac{\varepsilon}{(1+|c|)} < \varepsilon.$$

Man könnte sich fragen, warum wir $\varepsilon/(1+|c|)$ statt $\varepsilon/|c|$ verwenden. Eigentlich sollte $\varepsilon/|c|$ doch reichen? Jein! Für $c \neq 0$ klappt es, aber den Fall $c = 0$ müssen wir dann getrennt behandeln, weil da $\varepsilon/|c|$ nicht definiert ist.

2. Sei $\varepsilon > 0$. Dann müssen wir zeigen, dass es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Weil $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, gibt es $N^a_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n > N^a_{\varepsilon/2}$. Ebenso gibt es $N^b_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n > N^b_{\varepsilon/2}$. Setzen wir $N_\varepsilon = \max\left(N^a_{\varepsilon/2}, N^b_{\varepsilon/2}\right)$, dann folgt für $n > N_\varepsilon$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

3. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\varepsilon_1 = \frac{1}{2|b|+2}\varepsilon$ und $\varepsilon_2 = \min\left(\frac{1}{2|a|+2}\varepsilon, 1\right)$. Es gibt $N^a_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon_1$ für $n > N^a_{\varepsilon_1}$ und $N^b_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \varepsilon_2$ für $n > N^b_{\varepsilon_1}$. Für $n > N_\varepsilon = \max\left(N^a_{\varepsilon_1}, N^b_{\varepsilon_2}\right)$ haben wir $|b_n - b| < \varepsilon_2 \leq 1$, also auch $|b_n| \leq |b_n - b| + |b| \leq |b| + 1$, und

$$\begin{aligned}
|(a_n b_n) - (ab)| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| = \\
&\leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \leq \\
&\leq (|b| + 1)\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| < \\
&< (|b| + 1)\,\frac{\varepsilon}{2\,|b| + 2} + |a|\,\frac{\varepsilon}{2\,|a| + 2} \leq \\
&\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

4. Sei $\varepsilon > 0$. Nehmen wir[1] $\varepsilon_1 = \min\left(\frac{1}{2}\,|b|\,\varepsilon, 1\right)$ und $\varepsilon_2 = \min\left(\frac{1}{4}\frac{|b|^2}{|a|+1}\varepsilon, \frac{1}{2}\,|b|\right)$. Dann gibt es $N^a_{\varepsilon_1}, N^b_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon_1$ für $n > N^a_{\varepsilon_1}$ und $|b_n - b| < \varepsilon_2$ für $n > N^b_{\varepsilon_2}$. Also gilt auch $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$ für $n > N^a_{\varepsilon_1}$ und $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \frac{1}{2}\,|b| = \frac{1}{2}\,|b|$ für $n > N^b_{\varepsilon_1}$. Damit zeigt sich, dass für $n > N_\varepsilon := \max\left(N^a_{\varepsilon_1}, N^b_{\varepsilon_2}\right)$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b} + \frac{a_n}{b} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b}\right| + \left|\frac{a_n}{b} - \frac{a}{b}\right| \leq \\
&\leq \frac{|a_n|}{|b|\,|b_n|}\,|b - b_n| + \frac{1}{|b|}\,|a_n - a| \leq \\
&\leq \frac{|a| + 1}{\frac{1}{2}\,|b|^2}\,|b - b_n| + \frac{1}{|b|}\,|a_n - a| < \\
&< \frac{|a| + 1}{\frac{1}{2}\,|b|^2}\varepsilon_2 + \frac{1}{|b|}\varepsilon_1 \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

5. Weil die Dreiecksungleichung impliziert

$$-\,|a_n - a| \leq |a_n| - |a| \leq |a_n - a|\,,$$

folgt $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ und wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ für die Folge $\{|a_n|\}_{n=0}^\infty$ das N_ε für $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ wählen.

6. Weil $|\mathrm{Re}\, a_n - \mathrm{Re}\, a| \leq |a_n - a|$ folgt die letzte Aussage auf ähnliche Art. ■

5.1.4 Das Einschließungslemma.

Lemma 5.12 (Einschließungslemma) *Wenn $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ und $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ drei reelle Folgen sind, wobei*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n \text{ und } a_n \leq b_n \leq c_n,$$

dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

[1]Frage: Wieso diese eigenartigen ε_1 und ε_2? Antwort: Weil es damit klappt. Frage: Wieso klappt es denn mit diesen Zahlen? Antwort: Weil man erst das Ende berechnet und dann im Rückwärtsgang anschaut, was man dazu braucht.

Bemerkung 5.12.1 *Das Lemma ist auch bekannt als das Lemma der Räuber und Gendarmen. Auf Englisch heißt es das Sandwichlemma.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^c \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - \ell| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon^a$ und $|c_n - \ell| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon^c$. Für $n > \max(N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^c)$ gilt

$$b_n - \ell \geq a_n - \ell \geq -|a_n - \ell| > -\varepsilon \text{ und } b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq |c_n - \ell| < \varepsilon,$$

also $|b_n - \ell| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon^b := \max(N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^c)$. ■

Beispiel 5.13 *Wir wollen* $\lim_{n\to\infty} n^2 2^{-n}$ *bestimmen.*

Wir setzen $a_n = n^2 2^{-n}$ *und betrachten* a_{n+1}/a_n. *Es gilt*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2\, 2^{-(n+1)}}{n^2 2^{-n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2}$$

und für $n \geq 10$ *folgt*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1.1^2}{2} \leq 0.7\ .$$

Es folgt also, dass $a_{n+1} \leq 0.7\ a_n$ *und* $a_{n+2} \leq 0.7\ a_{n+1}$ *und so weiter. Kombinieren wir diese Ungleichungen, so finden wir*

$$a_{n+3} \leq 0.7\ a_{n+2} \leq (0.7)^2\, a_{n+1} \leq (0.7)^3\, a_n \leq \dots \leq (0.7)^{n-7}\, a_{10}.$$

Für $n \geq 10$ *gilt, dass*

$$0 \leq a_n \leq (0.7)^{n-10}\, a_{10}.$$

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} (0.7)^{n-10}\, a_{10}$ *gilt, folgt mit dem Einschließungslemma, dass*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 2^{-n} = 0.$$

Lemma 5.14 *Sei* $k \in \mathbb{N}^+$ *und sei* $s \in (0,1)$. *Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} n^k s^n = 0$.

Ein Beweis findet man, wenn man das letzte Beispiel betrachtet.

5.2 Analytische Fundamente

Wir erinnern uns nochmal an obere und untere Schranken. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ hat eine obere Schranke $s_o \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $a \in A$ gilt $a \leq s_o$; A hat eine untere Schranke $s_u \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $a \in A$ gilt $s_u \leq a$. Wenn $A \subset \mathbb{R}$ endlich viele Elemente hat, ist das Maximum dieser Elemente eine obere Schranke und sogar die kleinste obere Schranke. Das Minimum ist dann die größte untere Schranke. Wenn A mehr als endlich viele Elemente hat, kann A beschränkt sein ohne ein Maximum zu haben. Wir definieren mal genau was man mit Maximum meint.

Definition 5.15 *Sei* $A \subset \mathbb{R}$.

1. *Wenn es* $a \in A$ *gibt mit* $x \leq a$ *für alle* $x \in A$, *dann nennt man* a *das Maximum von* A.
2. *Wenn es* $a \in A$ *gibt mit* $x \geq a$ *für alle* $x \in A$, *dann nennt man* a *das Minimum von* A.

Wenn A endlich viele Elemente hat, findet man das übliche Maximum definiert. Wenn A mehr als endlich viele Elemente hat, hat man nicht unbedingt ein Maximum.

Zum Beispiel hat $A = \left\{\frac{n+1}{n+2}; n \in \mathbb{N}\right\}$ kein Maximum, denn $\frac{n+1}{n+2} \leq 1$ aber für jede Zahl $x < 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n+1}{n+2} > x$.

Die Menge $B = \left\{\frac{n}{n^2+5}; n \in \mathbb{N}\right\}$ hat aber wieder ein Maximum, nämlich $\frac{2}{9}$. Diese Zahl bekommt man, wenn man $n = 2$ nimmt.

Das Maximum einer Menge muss in der Menge liegen. Allgemeiner ist der folgende Begriff.

Definition 5.16 *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

1. *Das* Supremum *von A ist definiert durch*

$$\sup A = \textit{die kleinste obere Schranke für } A.$$

   Wenn A nicht nach oben beschränkt ist, dann setzt man $\sup A = \infty$ (also $\sup A$ existiert nicht als eine reelle Zahl und nur, wie man sagt, im uneigentlichen Sinne). Wenn $A = \emptyset$, dann $\sup A = -\infty$.

2. *Das* Infimum *von A ist definiert durch*

$$\inf A = \textit{die größte untere Schranke für } A.$$

Beispiel 5.17 *Für $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$ gilt $\sup A = \sqrt{2}$ und $\inf A = -\sqrt{2}$.*
Für $B = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$ gilt $\sup B = 1$ und $\inf B = 0$.

Bemerkung 5.17.1 *Wenn also A ein Maximum hat, dann gilt $\sup A = \max A$. Eine beschränkte Menge hat nicht unbedingt ein Maximum. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ impliziert, dass jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum hat.*

Bemerkung 5.17.2 *Übrigens heißt eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) beschränkt, wenn es $R \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt $|a| < R$.*

5.2.1 Limes Superior und Limes Inferior

Definition 5.18 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ eine reelle Folge.*

1. *Der* Limes Superior *von $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ ist definiert durch*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right).$$

2. *Der* Limes Inferior *von $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ ist definiert durch*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right).$$

Bemerkung 5.18.1 *Wenn* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *nicht nach oben beschränkt ist, sagt man*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$$

im uneigentlichen Sinne. Das heißt, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *existiert nicht als Zahl.*
Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$*, dann sagt man auch* $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *im uneigentlichen Sinne.*
Wenn $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *nicht nach unten beschränkt ist, sagt man* $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *im uneigentlichen Sinne.*
Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, dann sagt man auch* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$ *im uneigentlichen Sinne.*

Lemma 5.19 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *eine beschränkte reelle Folge. Dann existiert* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *in* $\mathbb{R}$*.*

Beweis. Weil auch $\{a_n\}_{n=k}^\infty$ beschränkt ist, existiert $\sup_{k\geq n} a_k$. Weil

$$\sup_{k\geq n+1} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k$$

ist $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ mit $b_n = \sup_{k\geq n} a_k$ eine fallende beschränkte Folge. Eine fallende beschränkte reelle Folge hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$: $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert. ■

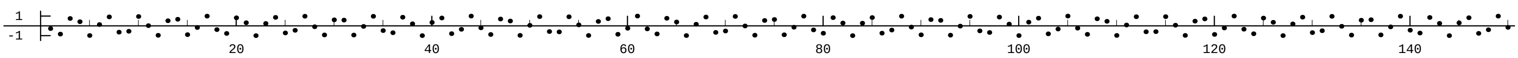
Beispiel 5.20 *Für* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *mit* $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ *gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \text{ und } \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Wir können vermuten, dass auch für $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ *mit* $b_n = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^{2n}\right)$ *gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = 1 \text{ und } \liminf_{n\to\infty} b_n = -1.$$

Hier steht eine Skizze von $\{(n,b_n)\,;n\in\mathbb{N}\}$*:*



Die Notation verführt dazu, mit dem Limes Superior und dem Limes Inferior zu rechnen wie mit dem Limes. Leider ist eine solche Annahme falsch. Einige Regeln, die gelten, stehen im folgenden Lemma.

Lemma 5.21 *Wenn* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *und* $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ *reelle Folgen sind mit* $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} b_n$, $\liminf_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$*, dann gilt:*

1. $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$;
2. $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus

$$\sup_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq \sup_{k\geq n}\left(a_k + \sup_{\ell\geq n} b_\ell\right) = \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{\ell\geq n} b_\ell$$

und Limesrechnung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k + \sup_{\ell\geq n} b_\ell\right) = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sup_{\ell\geq n} b_\ell;$$

die zweite aus

$$\sup_{k\geq n}\left(a_k+b_k\right) \geq \sup_{k\geq n}\left(a_k + \inf_{\ell\geq n} b_\ell\right) = \sup_{k\geq n} a_k + \inf_{\ell\geq n} b_\ell$$

und eine ähnliche Limesrechnung. ■

Beispiel 5.22 *Die Ungleichungen in Lemma 5.21 können strikt sein. Betrachte die Folge* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*, definiert durch* $a_n = \left((-1)^n - 1\right)n$ *und* $b_n = \left((-1)^{n+1} - 1\right)n$*. Die ersten Terme sind wie folgt:*

$$\begin{array}{rl} a_n: & 0,\quad -2,\quad 0,\quad -6,\quad 0,\quad -10,\quad 0,\quad -14,\quad 0,\quad \ldots \\ b_n: & 0,\quad 0,\quad -4,\quad 0,\quad -8,\quad 0,\quad -12,\quad 0,\quad -16,\quad \ldots \\ a_n+b_n: & 0,\quad -2,\quad -4,\quad -6,\quad -8,\quad -10,\quad -12,\quad -14,\quad -16,\quad \ldots \end{array}$$

Dann hat man

$$-\infty = \limsup_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 0+0=0.$$

Ein Beispiel, bei dem die zweite Ungleichung strikt ist, darf man selber basteln.

5.2.2 Bolzano-Weierstrass

Definition 5.23 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge. Dann heißt* h Häufungswert *für diese Folge, wenn es eine Teilfolge* $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ *gibt mit* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = h$*.*

Statt Häufungswert sagt man auch Häufungspunkt.

Theorem 5.24 (Bolzano-Weierstrass)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ *(in* $\mathbb{C}$*) hat einen Häufungswert in* $\mathbb{R}$ *(in* $\mathbb{C}$*).*

Beweis. Sei also $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte komplexe Folge. Dann gibt es $M \in \mathbb{R}^+$ so, dass $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und also auch $|\operatorname{Re} a_n| < M$ und $|\operatorname{Im} a_n| < M$. Wenn unendlich viele Zahlen $\{a_n\}$ in dem Quadrat

$$Q_0 = [-M,M] + i\,[-M,M] = \{z\in\mathbb{C};\ -M \leq \operatorname{Re} z \leq M \text{ und } -M \leq \operatorname{Im} z \leq M\}$$

liegen, dann liegen auch unendlich viele Zahlen $\{a_n\}$ in einem der vier Teilquadrate mit halb so großen Längen. Nenne dieses Teilquadrat, das auch unendlich viele Zahlen $\{a_n\}$ enthält, Q_1. Es könnte zum Beispiel $Q_1 = [0,M] + i\,[-M,0]$ sein. Wir wiederholen diese Aufteilung und finden eine Folge von Quadraten:

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots\ .$$

Nehme $a_{n_0} = a_0 \in Q_0$. Dann gibt es $a_{n_1} \in Q_1$ mit $n_1 > 0$, $a_{n_2} \in Q_2$ mit $n_2 > n_1$, $a_{n_3} \in Q_3$ mit $n_3 > n_2$ usw. Wir bekommen eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a_{n_k} \in Q_k$. Weil $a_{n_k}, a_{n_\ell} \in Q_{\min(k,\ell)}$ gilt, hat man

$$\left|a_{n_k} - a_{n_\ell}\right| \leq \left|\operatorname{Re}\left(a_{n_k} - a_{n_\ell}\right)\right| + \left|\operatorname{Im}\left(a_{n_k} - a_{n_\ell}\right)\right| \leq 4M\left(\frac{1}{2}\right)^{\min(k,\ell)}.$$

So ist die Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge, und Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ sind konvergent. Der Limes, der zu dieser Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ gehört, ist ein Häufungswert für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. ■

Lemma 5.25 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine reelle Folge. Dann ist* $\limsup_{n\to\infty} a_n$, *wenn er existiert in* $\mathbb{R}$, *der größte Häufungswert und* $\liminf_{n\to\infty} a_n$, *wenn er existiert in* $\mathbb{R}$, *der kleinste Häufungswert von* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Beweis. Selber machen. ■

Analysis 1, Woche 6

Spezielle Funktionen und Grenzwerte

6.1 Funktionen

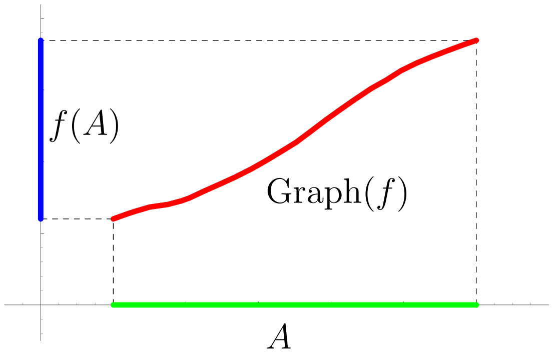
Funktionen oder Abbildungen sind wir schon mehrere Male begegnet. In Abschitt 1.1.2 hat man eine Funktion wie folgt definiert.

Definition 6.1 *Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die auf eindeutige Weise zu jedem Element $a \in A$ ein Element $b \in B$ zuordnet.*

Auch Eigenschaften einer Funktion wie Surjektivität und Injektivität wurden definiert.

Notation 6.2 *Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Man nennt*

1. *die Menge A den* ***Definitionsbereich****;*
2. *die Menge B den* ***Wertebereich****;*
3. *die Menge $f(A) = \{b \in B; \exists a \in A\}$ die* ***Wertemenge****;*
4. *die folgende Teilmenge von $A \times B$:*
$$\text{Graph}(f) = \{(a, f(a))\,; a \in A\}\,,$$
den ***Graph*** *der Funktion.*



Bemerkung 6.2.1 *Wenn man $f(x) = x^2$ als Funktion betrachten möchte, dann reicht diese Vorschrift nicht. Man muss auch noch den Definitionsbereich angeben. Einige Beispiele:*

1. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv.*
2. *Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv aber injektiv.*
3. *Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv und injektiv, also auch bijektiv..*

4. *Die Funktion* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ *mit* $f(x) = x^2$ *ist nicht surjektiv und nicht injektiv.*

NB $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ *und* $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$.

Bemerkung 6.2.2 *Manchmal wird statt* B *auch* $f(A)$ *als Wertebereich gehandelt und man nennt* $f(A)$ *das Bild von* A.

6.2 Nochmals Polynome

Ein Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{6.1}$$

kann man betrachten als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Es ist sogar möglich p als Funktion auf die Menge der $k \times k$-Matrizen zu betrachten.

Lemma 6.3 *Sei* p *ein Polynom von Grad* $n \geq 1$.

1. *Dann ist* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *surjektiv.*

2. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist injektiv, dann und nur dann, wenn* $n = 1$.

Bemerkung 6.3.1 *Für* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kann man eine solche Aussage nicht machen. Zum Beispiel* $p(x) = x^2$ *als Funktion von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$ *ist nicht surjektiv. Und* $p(x) = x^3$, *als Funktion von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$, *ist injektiv und hat Grad* 3.

Beweis. 1. Sei $w \in \mathbb{C}$ und betrachte $p(z) - w = 0$. Dann ist $p(z) - w$ auch ein Polynom von Grad n und der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass er eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Anders gesagt, es gibt $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = w$.

2. ($\Leftarrow$) Wenn p von Grad 1 ist, also $p(z) = a_1 z + a_0$ mit $a_1 \neq 0$, dann ist $a_1 z + a_0 = w$ für jede $w \in \mathbb{C}$ eindeutig lösbar.

2. ($\Rightarrow$) Sei p ein Polynom von Grad $n > 1$. Als Folgerung dieses Fundamentalsatzes gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Wenn nicht alle z_i gleich sind, dann hat p zwei verschiedene Nullstellen, dass heißt $p(z_i) = p(z_j) = 0$ für $z_i \neq z_j$ und p ist nicht injektiv. Wenn alle z_i gleich sind, dann hat man

$$p(z) = a_n (z - z_1)^n$$

und hat $p(z) = a_n$ genau n unterschiedliche Lösungen, nämlich die n Einheitswurzeln, und p ist wiederum nicht injektiv. ∎

Lemma 6.4 *Angenommen,* $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ *sind alle verschieden. Dann gilt folgendes*

1. *Es gibt genau ein Polynom* n*-ten Grades mit* $a_n = 1$, *der* $z_1, z_2, \dots, z_n$ *als Nullstellen hat. Wenn* $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$, *dann hat man* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

2. *Es gibt genau ein Polynom* n*-ten Grades mit* $p(z_0) = 1$, *der* $z_1, z_2, \dots, z_n$ *als Nullstellen hat. Wenn* $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$, *dann hat man* $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Beweis. 1. Ein solches Polynom ist

$$p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n) . \tag{6.2}$$

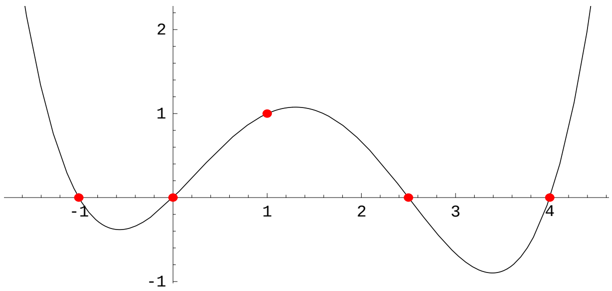
Aus Lemma 4.2 folgt, dass wenn p die Nullstelle z_1 hat, es ein Polynom q von Grad $n-1$ gibt so, dass $p(z) = (z - z_1)\, q(z)$. Man hat auch $q(z_i) = p(z_i)/\,(z_i - z_1) = 0$ für $i > 1$. Eine wiederholte Anwendung ergibt, dass p tatsächlich wie in (6.2) ist.

2. Man nimmt

$$p(z) = \frac{(z - z_1)\ \ (z - z_2)\ \ \dots\ \ (z - z_n)}{(z_0 - z_1)\,(z_0 - z_2) \dots (z_0 - z_n)} \tag{6.3}$$

und bekommt Eindeutigkeit indem man den ersten Teil benutzt.

Man sieht sofort, dass reelle Nullstellen, sowohl in (6.2) als auch in (6.3), reelle Koeffizienten liefern. ∎



Eine Skizze vom Graphen des Polynoms p von Grad 4 mit $p(-1) = p(0) = p(\frac{5}{2}) = p(4) = 0$ und $p(1) = 1$.

Korollar 6.5 *Angenommen, $z_0, z_1, \dots, z_n$ sind $n+1$ unterschiedliche, reelle (oder komplexe) Zahlen. Für die reellen (oder komplexen) Zahlen $f_0, f_1, \dots, f_n$ gibt es ein Polynom p mit höchstens Grad n so, dass $p(z_i) = f_i$ für $i = 0, 1, \dots, n$.*

Beweis. Man nehme

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right) f_i. \tag{6.4}$$

Es folgt, dass $p(z_k) = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\prod\limits_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{z_k - z_j}{z_i - z_j} \right) f_i = \left(\prod\limits_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{z_k - z_j}{z_k - z_j} \right) f_k = f_k.$ ∎

Bemerkung 6.5.1 *Mann nennt (6.4) die Lagrangesche Interpolationsformel.*

6.3 Rationale Funktionen

Definition 6.6 *Eine* rationale Funktion *f besteht aus dem Quotient zweier Polynome, sagen wir p und q. Wenn q die Nullstellen $z_1, \dots, z_k$ hat, dann heisst dass:*

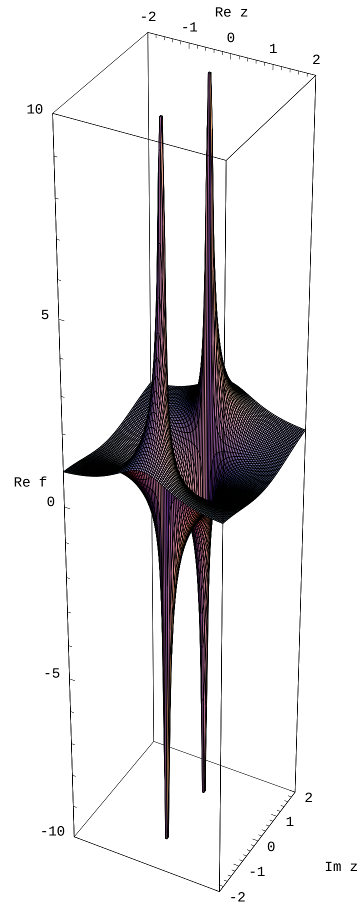
$$f : \mathbb{C} \backslash \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C} \text{ und } f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}. \tag{6.5}$$

Bemerkung 6.6.1
Man darf davon ausgehen, dass p und q keine gemeinsame Nullstelle haben. Denn wenn sie eine solche hätten, ließe sich die Formel $\frac{p(z)}{q(z)}$ *vereinfachen. Zum Beispiel*

$$\frac{z^4-2z^2+1}{z^4-1} = \frac{(z^2-1)^2}{(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{z^2-1}{z^2+1}.$$

Wenn p und q keine gemeinsame Nullstelle haben, dann nennt man eine Nullstelle von q einen Pol von f. Wenn $z = z_1$ *eine n-fache Nullstelle für q ist, heißt* z_1 *ein n-facher Pol von f. In der Nähe eines Pols ist eine rationale Funktion unbeschränkt. Hier rechts steht eine Skizze zum Graphen des reellen Teils von* $\frac{z^2-1}{z^2+1}$, *das heißt, von der Funktion* $f_1 : \mathbb{C}\backslash\{i,-i\} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f_1(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right).$$



Proposition 6.7 *Seien p und q Polynome mit* $q(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\dots(z-z_k)^{n_k}$ *und* $z_1,\dots,z_k$ *alle verschieden und* $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Dann lässt sich die rationale Funktion f in (6.5) schreiben als*

$$\begin{aligned} f(z) \quad = \quad & \frac{c_{1,1}}{(z-z_1)^{n_1}} + \frac{c_{1,2}}{(z-z_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{c_{1,n_1}}{(z-z_1)} + \\ & + \frac{c_{2,1}}{(z-z_2)^{n_2}} + \frac{c_{2,2}}{(z-z_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{c_{2,n_2}}{(z-z_2)} + \\ & + \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad + \\ & + \frac{c_{k,1}}{(z-z_k)^{n_k}} + \frac{c_{k,2}}{(z-z_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{c_{k,n_k}}{(z-z_k)} + \\ & + r(z), \end{aligned}$$

wobei $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ *und r ein Polynom ist mit* $\mathrm{Grad}(r) = \mathrm{Grad}(p) - \mathrm{Grad}(q)$, *wenn* $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(q)$. *Wenn* $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$ *hat man* $r = 0$.

Bemerkung 6.7.1 *Man nennt diesen Vorgang* die Zerlegung in Partialbrüche. *Aus dieser neuen Darstellung folgt, dass es zum Verständnis einer rationalen Funktion reicht, das Verhalten von einzelnen Polen zu studieren. Der Grund für diesen Aufwand soll, wenn nicht jetzt, spätetens bei der Integration deutlich werden.*

Beispiel 6.8 *Bevor wir einen Beweis geben, erinnern wir nochmal an den* Divisionsalgorithmus. *Wir haben ihn benutzt, um Faktoren aus einem Polynom zu holen. Auch bei der Abtrennung von Standardtermen aus einer rationalen Funktion wird er benutzt. Als Beispiel:*

$$f(x) = \frac{x^6+x^5+x^4+1}{x^4-2x^2+1}.$$

Die Division liefert

$$\begin{array}{rlll} x^4-2x^2+1 & / & x^6+x^5+x^4+1 & \backslash \quad x^2+x+3 \\ & & \underline{x^6-2x^4+x^2} & \\ & & \quad x^5+3x^4-x^2+1 & \\ & & \quad \underline{x^5-2x^3+x} & \\ & & \qquad 3x^4+2x^3-x^2-x+1 & \\ & & \qquad \underline{3x^4-6x^2+3} & \\ & & \qquad\quad 2x^3+5x^2-x-2 & \end{array}$$

und also

$$\frac{x^6+x^5+x^4+1}{x^4-2x^2+1}=x^2+x+3+\frac{2x^3+5x^2-x-2}{x^4-2x^2+1}.$$

Wir verfolgen mit

$$\begin{aligned} \frac{2x^3+5x^2-x-2}{x^4-2x^2+1} &= \frac{2x^3+5x^2-x-2}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)} = \\ = \ & \frac{(2x^3+5x^2-x-2)+{-1}\,(x^2+2x+1)+1\,(x^2+2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)} = \end{aligned}$$

Hier ist -1 *so gewählt, dass* $((2x^3+5x^2-x-2)+{-1}\,(x^2+2x+1))_{x=1}=0$, *das heißt, man berechnet* c *derart, dass*

$$0=\left(2x^3+5x^2-x-2\right)_{x=1}+c\left(x^2+2x+1\right)_{x=1}=4+c\;4.$$

Demzufolge ist $(2x^3+5x^2-x-2)-1\,(x^2+2x+1)$ *ein Polynom mit* $x=1$ *als Nullstelle. Und weil* $x=1$ *eine Nullstelle ist, kann man einen Faktor* $(x-1)$ *ausklammern in*

$$\left(2x^3+5x^2-x-2\right)-1\left(x^2+2x+1\right)=2x^3+4x^2-3x-3.$$

Dazu benutzt man wiederum eine Division:

$$\begin{array}{rlll} x-1 & / & 2x^3+4x^2-3x-3 & \backslash \quad 2x^2+6x+3 \\ & & \underline{2x^3-2x^2} & \\ & & \quad 6x^2-3x-3 & \\ & & \quad \underline{6x^2-6x} & \\ & & \qquad 3x-3 & \\ & & \qquad \underline{3x-3} & \\ & & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Man findet $2x^3+4x^2-3x-3=(x-1)\,(2x^2+6x+3)$ *und geht wie folgt weiter:*

$$\begin{aligned} &= \frac{(2x^3+5x^2-x-2)-1\,(x^2+2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)}+\frac{1\,(x^2+2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)} = \\ &= \frac{(x-1)\,(2x^2+6x+3)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(6x+2x^2+3)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}+\frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Das gleiche tun wir mit

$$\begin{aligned} \frac{(2x^2+6x+3)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)} &= \frac{(2x^2+6x+3)-\frac{11}{4}\,(x^2+2x+1)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}+\frac{\frac{11}{4}\,(x^2+2x+1)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)} = \\ &= \frac{\left(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)(x-1)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}=\frac{-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+2x+1}+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}. \end{aligned}$$

Es wurde benutzt, dass

$$\left(2x^2+6x+3\right)-\frac{11}{4}\left(x^2+2x+1\right)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\left(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)(x-1).$$

Noch einmal ähnliches:

$$\frac{-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+2x+1}=\frac{-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{(x+1)^2}=\frac{-\frac{3}{4}(x+1)+\frac{1}{2}}{(x+1)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}.$$

Insgesamt bringt es uns zu

$$\frac{x^6+x^5+x^4+1}{x^4-2x^2+1}=x^2+x+3+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}+\frac{-\frac{3}{4}}{x+1}.$$

Wenn man dieses Beispiel genau betrachtet, gibt es eigentlich nur einen wichtigen Schritt.

Lemma 6.9 *Seien p und q Polynome mit $\operatorname{Grad}(p)\leq\operatorname{Grad}(q)-1$ und so, dass p und q keine gemeinsame Nullstelle haben. Sei z_1 eine m-fache Nullstelle von q, sagen wir*

$$q(z)=(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z),$$

dann gibt es ein Polynom $\tilde{p}$ mit $\operatorname{Grad}(\tilde{p})\leq\operatorname{Grad}(q)-2$ und eine $c\in\mathbb{C}$ so, dass

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z)}{(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z)}=\frac{\tilde{p}(z)}{(z-z_1)^{m-1}\,\tilde{q}(z)}+\frac{c}{(z-z_1)^m}. \tag{6.6}$$

Beweis von Lemma 6.9. Weil $\tilde{q}(z_1)\neq 0$, ist $c=\frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}$ wohldefiniert und es ist folgendes erlaubt:

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z)}=\frac{p(z)-\frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)+\frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)}{(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z)}=\frac{p(z)-\frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)}{(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z)}+\frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\frac{1}{(z-z_1)^m}.$$

Weil $P(z)=p(z)-\frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)$ ein Polynom ist mit $z=z_1$ als Nullstelle und mit $\operatorname{Grad}(P)\leq\operatorname{Grad}(q)-1$, gibt es ein Polynom $\tilde{p}$ mit $\operatorname{Grad}(\tilde{p})=\operatorname{Grad}(P)-1$ so, dass

$$P(z)=(z-z_1)\,\tilde{p}(z).$$

Es folgt, dass

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z)}=\frac{\tilde{p}(z)}{(z-z_1)^{m-1}\,\tilde{q}(z)}+\frac{c}{(z-z_1)^m}.$$

■

Beweis von Theorem 6.7. Der erste Schritt wäre, im Fall $\operatorname{Grad}(p)\geq\operatorname{Grad}(q)$, durch eine Division eine rationale Funktion zu bekommen mit dem Grad des Zählers kleiner als dem Grad des Nenners. Das liefert uns ein Polynom r und ein Polynom p_1 mit $\operatorname{Grad}(p_1)\leq\operatorname{Grad}(q)-1$ derart, dass

$$\frac{p(z)}{q(z)}=r(z)+\frac{p_1(z)}{q(z)}.$$

Als nächsten Schritt vereinfachen wir $\frac{p_1(z)}{q(z)}$ so, dass p_1 und q keine gemeinsame Nullstelle haben. Jetzt brauchen wir das Theorem nur für solche $\frac{p_1(z)}{q(z)}$ zu beweisen.

Das beweisen wir mit vollständiger Induktion nach dem Grad von q.

1) Wenn Grad$(q) = 1$, dann gilt Grad$(p_1) = 0$ und $\frac{p_1(z)}{q(z)}$ hat schon die gefragte Form.

2) Nehmen wir an, dieses Theorem stimmt für alle q mit Grad n. Wenn wir ein Polynom q von Grad $n+1$ haben, dann erlaubt uns Lemma 6.9 die Induktionsannahme zu nutzen, denn (6.6) gibt uns eine rationale Funktion mit Grad n im Nenner. ■

Die oben durchgeführte Spaltung kann eine langwierige Sache sein, wenn man all diese Schritte verfolgt. Weil man aber jetzt weiß, was zu erwarten ist, kann man schneller voran kommen.

Beispiel 6.10 *Nehmen wir* $\dfrac{z^5}{z^4+2z^2+1}$. *Die erste Division läßt sich kaum kürzen:*

$$\frac{z^5}{z^4+2z^2+1} = \frac{z^5+2z^3+z}{z^4+2z^2+1} - \frac{2z^3+z}{z^4+2z^2+1} = z - \frac{2z^3+z}{z^4+2z^2+1}.$$

Dann muss man immer noch den Nenner faktorisieren:

$$z^4+2z^2+1 = \left(z^2+1\right)^2 = \left((z-i)(z+i)\right)^2 = (z-i)^2(z+i)^2.$$

Wir können jetzt aber verwenden, dass wir wissen, es gibt $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, *so dass*

$$\frac{2z^3+z}{z^4+2z^2+1} = \frac{2z^3+0z^2+1z+0}{z^4+2z^2+1} = \frac{a}{(z-i)^2} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{(z+i)^2} + \frac{d}{z+i}.$$

Die rechte Seite kann man zusammennehmen:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{(z-i)^2} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{(z+i)^2} + \frac{d}{z+i} = \\
= &\frac{a(z+i)^2 + b(z+i)^2(z-i) + c(z-i)^2 + d(z-i)^2(z+i)}{(z-i)^2(z+i)^2} = \\
= &\frac{(b+d)z^3 + (a+ib+c-id)z^2 + (2ia+b-2ic+d)z + ib-a-c-id}{\left(z^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Man muss nur noch ein lineares System von 4 Gleichungen lösen:

$$\left\{\begin{aligned}
b+d &= 2,\\
a+ib+c-id &= 0,\\
2ia+b-2ic+d &= 1,\\
ib-a-c-id &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Es folgt $a = \frac{1}{4}i$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{4}i$ *und* $d = 1$ *und das Ergebnis lautet:*

$$\frac{z^5}{z^4+2z^2+1} = z - \frac{\frac{1}{4}i}{(z-i)^2} - \frac{1}{z-i} + \frac{\frac{1}{4}i}{(z+i)^2} - \frac{1}{z+i}.$$

6.4 Potenzen und Wurzeln

Potenzen mit ganzen Zahlen sind definiert durch

$$\begin{array}{lll}
\text{wenn } n \in \mathbb{N}^+: & z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ Faktoren}} & \text{für } z \in \mathbb{C},\\
\text{wenn } n = 0: & z^0 = 1 & \text{für } z \in \mathbb{C},\\
\text{wenn } n \in \mathbb{Z}^-: & z^n = \frac{1}{z^{-n}} & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.
\end{array}$$

Die ersten Erweiterungen sind die Wurzelfunktionen:

- Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dann ist $(y \mapsto y^n) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ bijektiv. Dann gibt es genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}_0^+$ von $x = y^n$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$.
- Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, dann ist $(y \mapsto y^n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Dann gibt es genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}_0^+$ von $x = y^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Bijektivität folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen $(y \mapsto y^n) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit n gerade und $(y \mapsto y^n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit n ungerade, monoton wachsend, also injektiv, und surjektiv sind. Dann ist diese Definition erlaubt.

Definition 6.11 *1. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ gerade. Dann wird $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch*

$$\sqrt[n]{x} = y, \text{ wenn } y^n = x \text{ und } y \geq 0.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ ungerade. Dann wird $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sqrt[n]{x} = y, \text{ wenn } y^n = x.$$

6.4.1 Potenzen mit rationalen Koeffizienten

Was machen wir mit $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^+$? Für $x > 0$ gibt es kein Problem.

Definition 6.12 *Sei $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Die Funktion $\left(x \mapsto x^{\frac{m}{n}}\right) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ wird definiert durch*

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Auch für diese Definition muß man zeigen, dass sie korrekt ist. Jede rationale Zahl hat ja mehrere Darstellungsmöglichkeiten: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \dots$. Man kann jedoch sehen, dass $y_1 = x^{\frac{km}{kn}}$ und $y_2 = x^{\frac{m}{n}}$ das gleiche Ergebnis liefern. Denn

$$y_1^{kn} = \left(\sqrt[kn]{x^{km}}\right)^{kn} = x^{km} \text{ und } y_2^{kn} = \left(y_2^n\right)^k = \left(\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n\right)^k = \left(x^m\right)^k = x^{km}$$

und weil $\left(y \mapsto y^{kn}\right) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ injektiv ist, folgt $y_1 = y_2$. Weil $\frac{km}{kn}$ und $\frac{m}{n}$ in $\mathbb{Q}$ mit $k \in \mathbb{N}$ die gleiche Zahl vertritt, ist x^p wohldefiniert für $p \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Das ganze sieht aus wie eine Trivialität bis man folgendes betrachtet:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(-1)^5} = (-1)^{\frac{5}{3}} = (-1)^{\frac{10}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^{10}} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Um derartige Probleme zu vermeiden, definieren wir $x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ nicht für $x < 0$.

Für positive x passt das alles wie man möchte und man kann wie 'üblich' mit den Koeffizienten verfahren:

Lemma 6.13 *Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $p, q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:*

1. $x^{p+q} = x^p x^q$;
2. $x^{pq} = (x^p)^q$;
3. $(xy)^p = x^p y^p$.

Beweis. Wenn p und q in $\mathbb{Z}$ liegen, dann folgen diese Ergebnisse aus einer wiederholten Anwendung der Körpereigenschaften. Übrig bleibt, es zu beweisen für $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$. Da verwenden wir die Definition und, dass diese Gleichungen für ganze Zahlen gelten.

Wir setzen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{k}{\ell}$ mit $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n, \ell \in \mathbb{N}^+$.

1. Die erste Behauptung:
$$\left(x^{p+q}\right)^{n\ell} = \left(x^{\frac{m}{n}+\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell} = \left(x^{\frac{m\ell+kn}{n\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[n\ell]{x^{m\ell+kn}}\right)^{n\ell} = x^{m\ell+kn},$$
$$\left(x^p x^q\right)^{n\ell} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n\ell}\left(x^{\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[n]{x^m}^n\right)^{\ell}\left(\sqrt[\ell]{x^k}^{\ell}\right)^{n} = \left(x^m\right)^{\ell}\left(x^k\right)^{n} = x^{m\ell+kn},$$
und die Injektivität von $\left(x \mapsto x^{n\ell}\right) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ liefert $x^{p+q} = x^p x^q$.

2. Die zweite Behauptung:
$$\left(x^{pq}\right)^{n\ell} = \left(x^{\frac{mk}{n\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[n\ell]{x^{mk}}\right)^{n\ell} = x^{mk},$$
$$\left(\left(x^p\right)^q\right)^{n\ell} = \left(\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[\ell]{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^k}^{\ell}\right)^{n} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{kn} = \left(\sqrt[n]{x^m}^n\right)^{k} = \left(x^m\right)^k = x^{mk},$$
und die Injektivität von $\left(x \mapsto x^{n\ell}\right) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ liefert $x^{pq} = \left(x^p\right)^q$.

3. Die dritte Behauptung:
$$\left((xy)^p\right)^n = \sqrt[n]{(xy)^m}^n = (xy)^m = x^m y^m = \sqrt[n]{x^m}^n\,\sqrt[n]{y^m}^n = \left(x^p\right)^n\left(y^p\right)^n = \left(x^p y^p\right)^n$$
und die Injektivität von $\left(x \mapsto x^n\right) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ liefert $(xy)^p = x^p y^p$.

■

6.5 Einige Standardfolgen und deren Grenzwerte

Lemma 6.14 *1.* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^q} = 0$ *für* $q \in \mathbb{Q}^+$*;*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ *für* $x \in \mathbb{R}^+$*;*

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$*;*

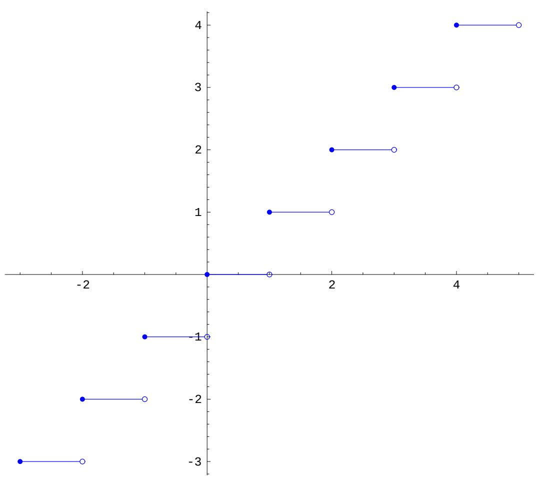
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n^m z^n = 0$ *für* $m \in \mathbb{N}$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$.

Definition 6.15 *Die Entierfunktion, Gauß-klammer oder Ganzzahlfunktion:*

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$[x] = \text{die größte Zahl } n \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } n \leq x.$$

Manchmal wird auch $\lfloor\cdot\rfloor$ *geschrieben.*

Eine Skizze des Graphes der Entierfunktion findet man rechts.



Bemerkung 6.15.1 *Es folgt, dass*

$$[x] \leq x < [x] + 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis von Lemma 6.14. Sei $\varepsilon > 0$. 1. Man nehme $N_\varepsilon = \left[\varepsilon^{-1/q}\right] + 1$:

$$\left|\frac{1}{n^q} - 0\right| = n^{-q} \leq \left(\left[\varepsilon^{-1/q}\right] + 1\right)^{-q} < \left(\varepsilon^{-1/q}\right)^{-q} = \varepsilon.$$

2. Man nehme $N_\varepsilon = \left[\frac{x-1}{n}\right] + 1$. Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass

$$(1+y)^n \geq 1 + ny \text{ für } y > -1.$$

Nimmt man $y = \frac{1}{n}(x-1)$, dann findet man $\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq x$ und daraus folgt

$$1 + \frac{x-1}{n} \geq \sqrt[n]{x}.$$

Für $x \geq 1$ gilt also

$$\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| = \sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}.$$

Wenn wir also $N = \left[\frac{x-1}{\varepsilon}\right] + 1$ nehmen, folgt für $n > N$, dass

$$\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Für $0 < x < 1$ benutzen wir, dass $x^{-1} > 1$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{-1}} = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{-1}}}.$$

3. Statt der Bernoullischen Ungleichung hat man auch für $n \geq 2$ und $y \geq 0$

$$(1+y)^n \geq 1 + \binom{n}{1} y + \binom{n}{2} y^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} y^2.$$

Man benutze dazu die Binomialformel. Nimmt man $y = \sqrt[n]{n} - 1$, so bekommt man

$$n - 1 = \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

und es folgt

$$\sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Weil

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

folgt das Ergebnis aus Lemma 5.11, 1., und das Einschließungslemma.

4. Wenn $m = 0$, hat man mit der Bernoullischen Ungleichung

$$|z|^n = \frac{1}{\left(1 + |z|^{-1} - 1\right)^n} \leq \frac{1}{1 + n\left(|z|^{-1} - 1\right)} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{|z|^{-1} - 1} = \frac{1}{n} \frac{|z|}{1 - |z|}. \tag{6.7}$$

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{|z|}{1-|z|} = 0$, gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = 0$.

Wenn $m \geq 1$ hat man

$$|n^m z^n| = \left| \sqrt[n]{n} \ |z|^{\frac{1}{m}} \right|^{mn} \leq \left| \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) |z|^{\frac{1}{m}} \right|^{mn}.$$

Weil $|z| < 1$ gilt, und weil $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) = 1$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ und $0 < \theta < 1$, so dass

$$\left| \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) |z|^{\frac{1}{m}} \right| \leq \theta.$$

Wie in (6.7) hat man

$$\theta^n = \frac{1}{\left(1 + \left(\theta^{-1} - 1\right)\right)^n} \leq \frac{1}{1 + n\left(\theta^{-1} - 1\right)} \leq \frac{1}{n\left(\theta^{-1} - 1\right)} = \frac{1}{n} \frac{\theta}{1 - \theta},$$

und mit

$$|n^m z^n| \leq \frac{1}{n^m} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^m \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^m,$$

folgt $\lim_{n\to\infty} n^m z^n = 0$ ■

6.6 Wie man ohne Taschenrechner $\sqrt[3]{5}$ berechnen kann.

Algorithmus 6.1 `Sei` $m \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ `und` $w \in \mathbb{R}^+$`. Wir definieren:`

$$\begin{aligned} a_0 &= w + 1, \\ a_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{m}\right) a_n + \frac{w}{m a_n^{m-1}} \quad \texttt{für} \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Bemerkung 6.15.2 *Wir werden zeigen, dass* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[m]{w}$*. Auf diese Art haben wir eine Möglichkeit gefunden, durch eine rationale Funktion eine Wurzel* $\sqrt[n]{w}$ *zu approximieren. Ein Taschenrechner oder Computer macht genau dasselbe. Mehr als wiederholtes Addieren und Subtrahieren schafft er leider nicht und auch wenn der Verkäufer Ihnen erzählt hat, dass das Gerät* $\sqrt[3]{5}$ *exakt berechnen kann, dann stimmt das leider nicht. Da wird auch bloß mit so einer algebraischen Funktion approximiert bis man genügend viele richtige Ziffern hat. Der Algorithmus konvergiert übrigens sehr schnell. Hier die ersten 12 Zwischenergebnisse für* $\sqrt[3]{5}$*:*

```
6
4.0462962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962
2.7993274908751591703624057915417595086372043190514600359479196707577579167557994837116928486033768
2.0789055161910019112094675663932928614164724951340265204151217969453887091577713899001238167699734
1.7715744998156100817161027536799547399587805079010651721168735427293262233193090928807418708239413
1.7120929359518477257669396726534003932117293068780213134883620269893886778181967594401577926524688
1.7099785632381726163824235897841792566237277792297540454448592445786949679146346251789445785300990
1.7099759466807007766583233241323163689104106108151309625305176214739705069907146931137725297381644
1.7099759466766969893531182471276468005156763849568810139677863400061010906849308111946964029994281
1.7099759466766969893531088725438601098680551105944491099820694702859579820632400960096926316743885
1.7099759466766969893531088725438601098680551105430549243828617074442959205041732162571870100217336
1.7099759466766969893531088725438601098680551105430549243828617074442959205041732162571870100201890
```

Später werden wir noch mal zeigen, dass die Grenzkurve zwischen den richtigen schwarzen und den falschen roten Ziffern nicht nur zufälligerweise wie $x = c\ 2^y$ *aussieht.*

Bemerkung 6.15.3 *Man kann statt $a_0 = w + 1$ einen beliebigen positiven Anfangswert nehmen. Der einzige Vorteil bei $a_0 = w + 1$ ist, dass $w + 1 \geq \sqrt[m]{w}$ gleich eine fallende Folge liefert.*

Lemma 6.16 *Sei $m \in \mathbb{N}\backslash \{0, 1\}$, $w \in \mathbb{R}^+$ und die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definiert wie in (6.8). Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[m]{w}$.*

Beweis. Erstens beweisen wir, dass für die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x + \frac{w}{mx^{m-1}}$$

gilt, dass $f(x) \geq \sqrt[n]{w}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Wir haben für $x > 0$ die folgenden gleichwertigen Aussagen:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{m}\right) x + \frac{w}{mx^{m-1}} \geq \sqrt[m]{w} \Leftrightarrow (m-1)\, x + \frac{w}{x^{m-1}} \geq m \sqrt[m]{w} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & m - 1 + \frac{w}{x^m} \geq m \frac{\sqrt[m]{w}}{x} \Leftrightarrow \frac{w}{x^m} \geq 1 + m \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x}\right)^m \geq 1 + m \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \left(1 + \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right)\right)^m \geq 1 + m \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right).
\end{aligned}$$

Setzt man $y = \frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1$, dann erkennt man, dass die letzte Ungleichung stimmt wegen der Bernoullischen Ungleichung (Lemma 1.8):

$$(1 + y)^m \geq 1 + my \text{ für } y \geq -1.$$

Damit hat man auch

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) x + \frac{w}{mx^{m-1}} \geq \sqrt[m]{w}.$$

Nehmen wir an, dass $a_n \in \mathbb{R}^+$, dann finden wir $f(a_{n+1}) \geq \sqrt[m]{w}$. Weil $a_0 > 0$ gilt, kann man zeigen, dass $a_n \geq \sqrt[m]{w}$ für $n \in \mathbb{N}\backslash \{0\}$.

Für $a_n \geq \sqrt[m]{w}$ finden wir

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) a_n + \frac{w}{ma_n^{m-1}} = a_n - \frac{a_n^m - w}{ma_n^{m-1}} \leq a_n.$$

So haben wir eine monoton fallende Folge bekommen, die von unten beschränkt ist. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt, dass $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ einen Grenzwert a hat. Und weil $a_n \geq \sqrt[m]{w}$ gilt auch $a \geq \sqrt[m]{w}$.

Jetzt, nachdem wir die Existenz des Limes gezeigt haben, können wir damit rechnen:

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)a_n + \frac{w}{ma_n^{m-1}}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)a_n\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{w}{ma_n^{m-1}} = \\
&= \left(1-\frac{1}{m}\right)\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{w}{m}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^{m-1}} = \\
&= \left(1-\frac{1}{m}\right)\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{w}{m}\frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n^{m-1}} = \\
&= \left(1-\frac{1}{m}\right)\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{w}{m}\frac{1}{(\lim_{n\to\infty} a_n)^{m-1}} = \\
&= \left(1-\frac{1}{m}\right)a + \frac{w}{m}\frac{1}{a^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\frac{1}{m}a = \frac{w}{m}\frac{1}{a^{m-1}},$$

und daraus, dass $a^m = w$. ∎

Analysis 1, Woche 7

Reihen I

A1

7.1 Folgen aus Folgen

Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle oder komplexe Folge ist, kann man daraus eine neue Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konstruieren durch

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

oder netter geschrieben

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die Folge $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$ nennt man *eine Reihe*, die Zahlen a_n *die Glieder* dieser Reihe und s_n *die Partialsummen.*

Die Hauptfrage, die man bei eine Reihe stellt, ist:

- Konvergiert sie? Anders gesagt, existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$?

Die zweite Frage ist meistens viel schwieriger zu beantworten:

- Wenn sie konvergiert; gegen was konvergiert sie? Anders gesagt, kann man $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ berechnen?

Oft benutzt man für $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$ auch kurzerhand $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Weil man aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ abkürzt durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, muss oft aus dem Kontext deutlich werden, was genau gemeint ist.

Beispiel 7.1 *Die* harmonische Reihe *ist definiert als* $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$*:*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Sie ist nicht konvergent:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots\dots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \dots\dots} + \frac{1}{2^m} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \quad \frac{1}{2} \quad + \qquad \frac{1}{2} \qquad + \qquad \frac{1}{2} \qquad + \quad \dots . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Hier ist 2^m die kleinste Zweierpotenz größer gleich n. Man findet, dass $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt ist.

Möchte man dies präzise zeigen, dann bemerkt man, dass wegen (7.1) für die Teilfolge $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ gilt, dass

$$s_{2^k} \geq \tfrac{1}{2}k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist diese Teilfolge unbeschränkt, und daher auch die Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ selbst. Weil die Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton ist, kann man sogar sagen, dass $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Beispiel 7.2 *Die* geometrische Reihe *für $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als $\left\{\sum_{k=0}^{n} z^k\right\}_{n=0}^{\infty}$. Sie konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$.*

Das sieht man wie folgt. Für $z \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \\ = \frac{(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z)}{(1 - z)} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

und man bekommt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} z^{n+1}}{1 - z} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \text{wenn } |z| < 1, \\ \text{divergent} & \text{wenn } |z| \geq 1. \end{cases}$$

Wenn $z = 1$ hat man

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1,$$

und es folgt auch hier Divergenz.

Lemma 7.3 *1. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ existiert, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist nicht ausreichend für die Konvergenz der Reihe $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$.

Beweis. 1. Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b$. Setzt man $s = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, dann sieht man sofort, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = s - s = 0.$$

2. Die harmonische Reihe ist ein Beispiel, das besagt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ keine ausreichende Bedingung ist für die Konvergenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$. Also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ existiert.}$$

■

Bemerkung 7.3.1 *Die erste Aussage dieses Lemmas, nämlich*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ existiert } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

ist äquivalent zu der logischen Umkehrung[1]

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht nach } 0 \Rightarrow \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ divergiert.}$$

7.2 Konvergenz für Reihen mit positiven Gliedern

Lemma 7.4 *Sei $q \in \mathbb{Q}^+$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^q}$ konvergiert genau dann, wenn $q > 1$.*

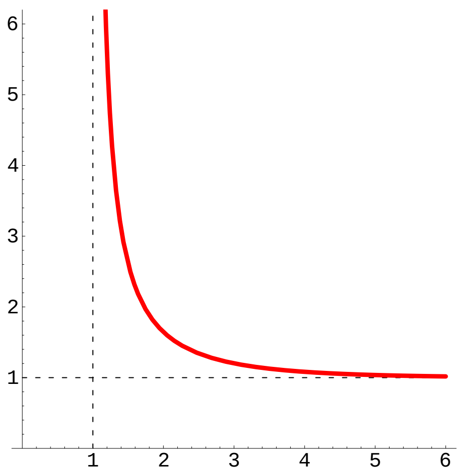
Bemerkung 7.4.1 *Anders gesagt: die Folge $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn $q > 1$. Oder nochmals anders gesagt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q}$ existiert genau dann, wenn $q > 1$. Dies gilt sogar für $q \in \mathbb{R}$ aus $(1, \infty)$.*

Bemerkung 7.4.2 *Die Funktion*

$$\left(q \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \right) : (1, \infty) \to \mathbb{R}$$

heißt die Riemann-Zeta-Funktion. Sie wird oft mit ζ notiert. Man kann zeigen, dass:

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \tfrac{1}{6}\pi^2, \\ \zeta(4) &= \tfrac{1}{90}\pi^4, \\ \zeta(6) &= \tfrac{1}{945}\pi^6, \\ \zeta(8) &= \tfrac{1}{9450}\pi^8. \end{aligned}$$



Die Riemann-Zeta-Funktion ist hier definiert auf dem Intervall $(1, \infty)$. Später werden wir sehen, dass diese Funktion sich sogar vernünftig definieren lässt auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Beweis. Für $q > 1$ gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^q} + \frac{1}{6^q} + \frac{1}{7^q} + \frac{1}{8^q} + \cdots + \frac{1}{n^q} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{4^q} + \frac{1}{4^q} + \frac{1}{4^q} + \frac{1}{4^q} + \frac{1}{8^q} + \cdots + \frac{1}{2^{kq}} \end{aligned}$$

[1] Aus der Logik:

Wenn A und B zwei Aussagen sind, dann ist die Behauptung $A \Rightarrow B$ gleichwertig zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

"Wenn es ein normales Fahrrad ist, dann hat es zwei Räder" ist gleichwertig zu *"Wenn es keine zwei Räder hat, ist es kein normales Fahrrad"*.

"Wenn es zwei Räder hat, ist es ein normales Fahrrad" ist eine ganz andere Aussage.

wiederum mit $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl so, dass $2^k \geq n$. Man findet

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1 + \frac{2}{2^q} + \frac{4}{4^q} + \cdots + \frac{2^k}{2^{kq}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{q-1}} + \frac{1}{2^{2(q-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{k(q-1)}} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \left(\frac{1}{2^{q-1}} \right)^{\ell} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{q-1}}} \end{aligned}$$

weil $\frac{1}{2^{q-1}} < 1$ für $q > 1$. Also ist $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine monotone und beschränkte Folge und deshalb konvergent.

Für $q \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^q} + \cdots + \frac{1}{n^q} \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \end{aligned}$$

und $s_n \to \infty$ für $n \to \infty$. ■

Ein wichtiges Werkzeug haben wir im Beweis soeben gesehen, nämlich ein Vergleichskriterium.

Lemma 7.5 (Majorantenkriterium) *Seien* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *reelle Folgen mit*

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1. *Wenn die Reihe* $\left\{ \sum_{n=0}^{k} b_n \right\}_{k=0}^{\infty}$ *konvergiert, dann konvergiert die Reihe* $\left\{ \sum_{n=0}^{k} a_n \right\}_{k=0}^{\infty}$.
2. *Wenn die Reihe* $\left\{ \sum_{n=0}^{k} a_n \right\}_{k=0}^{\infty}$ *divergiert, dann divergiert die Reihe* $\left\{ \sum_{n=0}^{k} b_n \right\}_{k=0}^{\infty}$.

Beweis. Weil die zweite Aussage die logische Umkehrung der ersten Aussage ist, brauchen wir nur eine zu beweisen.

Wir nehmen an, die Folge $\left\{ \sum_{n=0}^{k} b_n \right\}_{k=0}^{\infty}$ ist konvergent, dass heißt, $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n = s \in \mathbb{R}$. Weil $a_n \leq b_n$ findet man, dass die Folge $\left\{ \sum_{n=0}^{k} a_n \right\}_{k=0}^{\infty}$ nach oben beschränkt ist durch s. Weil $a_n \geq 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt es, dass $\left\{ \sum_{n=0}^{k} a_n \right\}_{k=0}^{\infty}$ monoton wachsend ist. Eine beschränkte monoton wachsende Folge hat einen Limes. ■

7.3 Konvergenz für Reihen mit beliebigen Gliedern

Intermezzo. *Betrachten wir zunächst als Beispiel die Reihe* $\left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$, *dass heißt, die Folge der Partialsummen mit den Gliedern* $\left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \ldots \right\}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots .$$

Wenn wir wie folgt verfahren,

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots=\\
=\ &1+\underbrace{\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}+\underbrace{\frac{1}{4}-2.\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}+\underbrace{\frac{1}{6}-2.\frac{1}{6}}+\frac{1}{7}+\underbrace{\frac{1}{8}-2.\frac{1}{8}}+\dots\\
=\ &\boxed{1}+\boxed{\frac{1}{2}}-\boxed{1}+\boxed{\frac{1}{3}}+\boxed{\frac{1}{4}}-\boxed{\frac{1}{2}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\boxed{\frac{1}{3}}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\boxed{\frac{1}{4}}+\dots
\end{aligned}$$

dann sieht man, dass so jedes positive Glied sich kürzt mit dem korrespondierenden negativen Glied und man so als Limes 0 bekommt. Andererseits hat man auch

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots=\\
=\ &\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\dots=\\
=\ &\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\dots\ \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\geq\frac{1}{2}.$$

Oder doch nicht?

In dem komischen ‘Beweis’ haben wir umgeordnet beim Addieren und das ist im Allgemeinen nur gültig bei endlich vielen Änderungen. Die Kommutativität besagt, dass $a+b=b+a$ und wenn man diese Regel (und die Assoziativität) 4 mal benutzt, hat man auch

$$a+b+c+d+e=e+d+c+b+a.$$

Dass man diese Regel auch unendlich oft benutzen darf, ist nie gesagt worden und ist im Allgemeinen auch nicht gültig.

Definition 7.6 *Die Folge* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *heißt eine* Umordnung *von* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*, wenn es eine bijektive Abbildung* $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *gibt, so dass* $b_n=a_{\sigma(n)}$*.*

Im Allgemeinen kann sich der Limes einer Reihe ändern nach Umordnen. Für Reihen mit positiven Gliedern gibt es eine Ausnahme.

Lemma 7.7 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine reelle Folge mit*

1. $a_n\geq 0$ *und*
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k=\ell$ *existiert.*

Dann gilt auch für jede Umordnung σ*, dass* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{\sigma(k)}=\ell$*.*

Beweis. Setze $N_\sigma(n) = \max\{\sigma(k); 0 \le k \le n\}$ und weil $a_k \ge 0$ folgt, dass

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \le \sum_{k=0}^{N_\sigma(n)} a_k \le \ell.$$

Weil $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und beschränkt ist, ist die Folge konvergent, sagen wir $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Also gilt $s \le \ell$. Ebenso ist die Inverse σ^{invers} von σ eine Umordnung und dies liefert $\ell \le s$. ■

Für Reihen mit sowohl negativen als auch positiven Glieder hat man im Intermezzo gesehen, dass eine Umordnung zu einem anderen Ergebnis führen kann. Auch für Reihen in $\mathbb{C}$ gibt es dieses Phänomen. Dies passiert jedoch nicht bei jeder solchen Folge. Solche Reihen haben einen Namen.

Definition 7.8 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge.*
Die Reihe $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* unbedingt konvergent,
wenn für jede Umordnung σ die Reihe $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Bemerkung 7.8.1 *Wenn eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent ist, heißt sie* bedingt konvergent. *Die Reihe* $\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist bedingt konvergent.*

Proposition 7.9 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen und setze $a_n = a_n^+ - a_n^-$ durch*

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{wenn } a_n \ge 0, \\ 0 & \text{wenn } a_n < 0. \end{cases} \quad \text{und } a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a_n \ge 0, \\ |a_n| & \text{wenn } a_n < 0. \end{cases}$$

1. *Die Reihe* $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist unbedingt konvergent genau dann,*
   wenn $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^-\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *beide konvergieren.*
2. *Wenn die Reihe* $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *unbedingt konvergent ist, dann gilt für jede Umordnung, dass*
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beweis. 1. $\Longrightarrow$: (durch Widerspruch) Nehmen wir an $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Wir schreiben $b_n = a_n^+$. Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} b_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, dann folgt, weil $b_n \ge 0$ ist, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \infty$. Denn nach oben beschränkte wachsende Folgen haben einen Grenzwert. Wir konstruieren nun die folgende Unordnung.

Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{k=0}^{n_1} b_k \ge 1$ und nehme an, die Indizes innerhalb $\{0, 1, \ldots, n_1\}$ für die $a_k = b_k$ gilt, sind $\{m_{1,1}, \ldots, m_{1,\ell_1}\}$. Sei $m_{1,0}$ der erste Index mit $a_{m_{1,0}} < 0$.

Sei $n_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{k=0}^{n_2} b_k \ge 2 - a_{m_{1,0}}$ und nehme an, die Indizes innerhalb $\{n_1 + 1, \ldots, n_2\}$ für die $a_k = b_k$ gilt, sind $\{m_{2,1}, \ldots, m_{2,\ell_2}\}$. Sei $m_{2,0}$ der zweite Index mit $a_{m_{2,0}} < 0$.

Sei $n_3 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{k=0}^{n_3} b_k \geq 3 - a_{m_{1,0}} - a_{m_{2,0}}$ und nehme an, die Indizes innerhalb $\{n_2+1,\dots,n_3\}$ für die $a_k = b_k$ gilt, sind $\{m_{3,1},\dots,m_{3,\ell_3}\}$. Sei $m_{3,0}$ der dritte Index mit $a_{m_{3,0}} < 0$. Und so weiter. Die Folge

$$\Big\{\underbrace{a_{m_{1,1}},\dots,a_{m_{1,\ell_1}}}_{\text{positiv}}, \underbrace{a_{m_{1,0}}}_{\text{negativ}}, \underbrace{a_{m_{2,1}},\dots,a_{m_{2,\ell_2}}}_{\text{positiv}}, \underbrace{a_{m_{2,0}}}_{\text{negativ}}, \underbrace{a_{m_{3,1}},\dots,a_{m_{3,\ell_3}}}_{\text{positiv}}, a_{m_{3,0}}, \dots \Big\}$$

ist eine umgeordnete Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \infty.$$

Weil die Annahme ist, dass jede Umordnung konvergiert, folgt der Widerspruch.

Auch wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^-\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist, folgt ein Widerspruch.

1. $\Longleftarrow$: Sei σ eine Umordung. Weil $a_k^+ \geq 0$ kann man Lemma 7.7 verwenden. Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist auch $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^+ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^+.$$

Ähnliches trifft zu für $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(a_{\sigma(k)}^+ - a_{\sigma(k)}^-\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^-\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^+ - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^- = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^- \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^-\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(a_k^+ - a_k^-\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k. \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

2. Diese Aussage folgt aus 1 und (7.2). ■

Korollar 7.10 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbedingt konvergent ist, dann gilt für jede Umordnung σ, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beweis. Weil $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn sowohl $\left\{\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\left\{\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, reicht es, dieses Lemma für reelle Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen. Proposition 7.9.2 liefert diese Aussage. ■

Definition 7.11 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen.*
$\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt absolut konvergent, *wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.*

Proposition 7.12 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge komplexer Zahlen.*
$\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist unbedingt konvergent* $\Leftrightarrow$ $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist absolut konvergent.*

Beweis. Auch hier reicht es, die Aussage für reelle Folgen zu beweisen.

$\Longrightarrow$: Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, unbedingt konvergent ist, dann impliziert Lemma 7.9, dann konvergiert $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^-\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Weil

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ + \sum_{k=0}^{n} a_k^-$$

gilt, konvergiert $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$\Longleftarrow$: Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, liefert das Majorantenkriterium die Konvergenz von $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^-\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

Korollar 7.13 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge komplexer Zahlen.*
Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent ist, ist auch* $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent.*

Wir geben ein kurze Übersicht wie man Reihen $\left\{\sum\limits_{n=0}^{k} a_n\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ klassifizieren kann:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1.\quad \text{konvergent} & \left\{\begin{array}{lll} \text{1a.} & \text{unbedingt konvergent} & = \text{absolut konvergent} \\[2ex] \text{1b.} & \text{bedingt konvergent} & = \left(\begin{array}{c}\text{konvergent,}\\ \text{jedoch nicht absolut}\end{array}\right) \end{array}\right. \\[4ex] 2.\quad \text{divergent} & \end{array}}$$

7.4 Zwei Konvergenzkriterien

Lemma 7.14 (Quotientenkriterium) *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine komplexe Folge, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$$

existiert.

- *Wenn* $r < 1$, *dann ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*
- *Wenn* $r > 1$, *dann ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beweis. Nehme $\varepsilon = \frac{1}{2}|1-r|$. Für $r \neq 1$ ist $\varepsilon > 0$ und es gibt $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r\right| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Wenn $r < 1$ folgt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r + r < \varepsilon + r = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}r \text{ für } n > N_\varepsilon$$

und

$$|a_n| \leq \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}r\right)^{n-N_\varepsilon} |a_{N_\varepsilon}| \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Weil $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r < 1$ gilt, ist $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r\right)^{n-N_\varepsilon} |a_{N_\varepsilon}|$ eine konvergente geometrische Reihe. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n|$ und so auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$.

Wenn $r > 1$ folgt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r + r > -\varepsilon + r = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}r > 1 \text{ für } n > N_\varepsilon$$

und

$$|a_n| \geq |a_{N_\varepsilon}| > 0 \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Also entweder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht, oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Weil $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ eine notwendige Bedingung ist für Konvergenz, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. ■

Lemma 7.15 (Wurzelkriterium) *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. Setze $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in [0,\infty]$.*

- *Wenn $r < 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*
- *Wenn $r > 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*
- *Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent ist, dann gilt $r = 1$.*

Bemerkung 7.15.1 *Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Der Limes Superior einer nicht negativen Folge „existiert" immer in $[0,\infty]$.*

Beweis. Wenn $r < 1$ gilt und wir $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-r)$ nehmen, gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - r\right| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Wenn $\sqrt[n]{|a_n|} < r + \varepsilon = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}r$, folgt

$$|a_n| < \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}r\right)^n \text{ für } n > N_\varepsilon$$

und wir können fortfahren wie beim Quotientenkriterium.

Wenn $r > 1$ gilt, dann gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, so dass $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$ und also auch $|a_{n_k}| > 1$. Das heißt, entweder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht, oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Weil $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ eine notwendige Bedingung ist für Konvergenz, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Wenn man $r \neq 1$ hat, dann ist die Reihe entweder divergent (wenn $r > 1$) oder absolut konvergent (wenn $r < 1$). Damit ist bedingte Konvergenz ausgeschlossen. ■

7.5 Konvergenz bei alternierenden Gliedern

Wir haben nicht umsonst uns erst mal beschränkt auf Reihen mit positiven Gliedern. Wenn so eine Reihe konvergent ist, dann ist sie auch absolut konvergent und man muss sich keine Sorgen darüber machen, in welcher Folge man die Glieder addiert. Für Reihen mit Vorzeichenwechsel und auch für Reihen mit komplexen Gliedern ist Konvergenz eine kompliziertere Sache. Es kann sein, dass eine Umordnung konvergiert und eine andere divergiert. Einige Spezialfälle kann man aber trotzdem angehen. Insbesondere bei Reihen mit alternierenden Gliedern kann man oft relativ einfach Konvergenz beweisen.

Man nennt eine reelle Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ alternierend, wenn $b_n b_{n+1} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt, das Vorzeichen zweier aufeinanderfolgender Termen ist negativ. Ein Beispiel ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Um dieses Kriterium so einfach wie möglich hin zu schreiben, betrachten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ mit } a_n > 0$$

statt

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ mit } b_n > 0 \text{ für } n \text{ gerade und } b_n < 0 \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

Lemma 7.16 (Kriterium von Leibniz) *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge mit folgenden Eigenschaften:*

1. $a_n > 0$ *für* $n \in \mathbb{N}$;
2. $a_{n+1} \leq a_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.

Beweis. Setzen wir

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$$

und betrachten wir zusätzlich die Folgen $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ und $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ mit

$$\beta_k = \sum_{n=0}^{2\left[\frac{1}{2}k\right]} (-1)^n a_n \text{ und } \gamma_k = \sum_{n=0}^{2\left[\frac{1}{2}k\right]+1} (-1)^n a_n.$$

Die ersten Terme sind:

$$\begin{array}{lllllll}
\beta_k: & \{a_0, & a_0, & a_0 - a_1 + a_2, & a_0 - a_1 + a_2, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4, & \ldots\}, \\
\alpha_k: & \{a_0, & a_0 - a_1, & a_0 - a_1 + a_2, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4, & \ldots\}, \\
\gamma_k: & \{a_0 - a_1, & a_0 - a_1, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5, & \ldots\}.
\end{array}$$

Man findet, dass $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge und $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine monoton wachsende Folge ist. Weil beide Folgen beschränkt sind, haben sie einen Grenzwert, sagen wir ℓ_γ und ℓ_β. Weil

$$\beta_k - \gamma_k = a_{2\left[\frac{1}{2}k\right]+1}$$

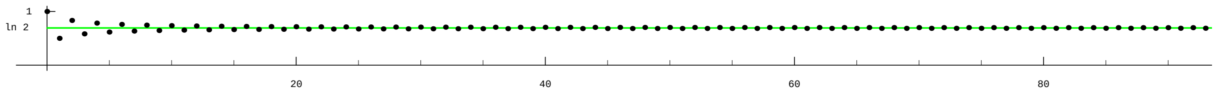
und $\lim_{k\to\infty} a_{2\left[\frac{1}{2}k\right]+1} = 0$ hat man $\ell_\beta = \ell_\gamma$. Ausserdem hat man

$$\gamma_k \le \alpha_k \le \beta_k$$

und das Sandwichlemma liefert $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \ell_\beta$. ■

Mit Hilfe dieses Kriteriums finden wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$ konvergent ist. Wir werden noch mal zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \log 2.$$

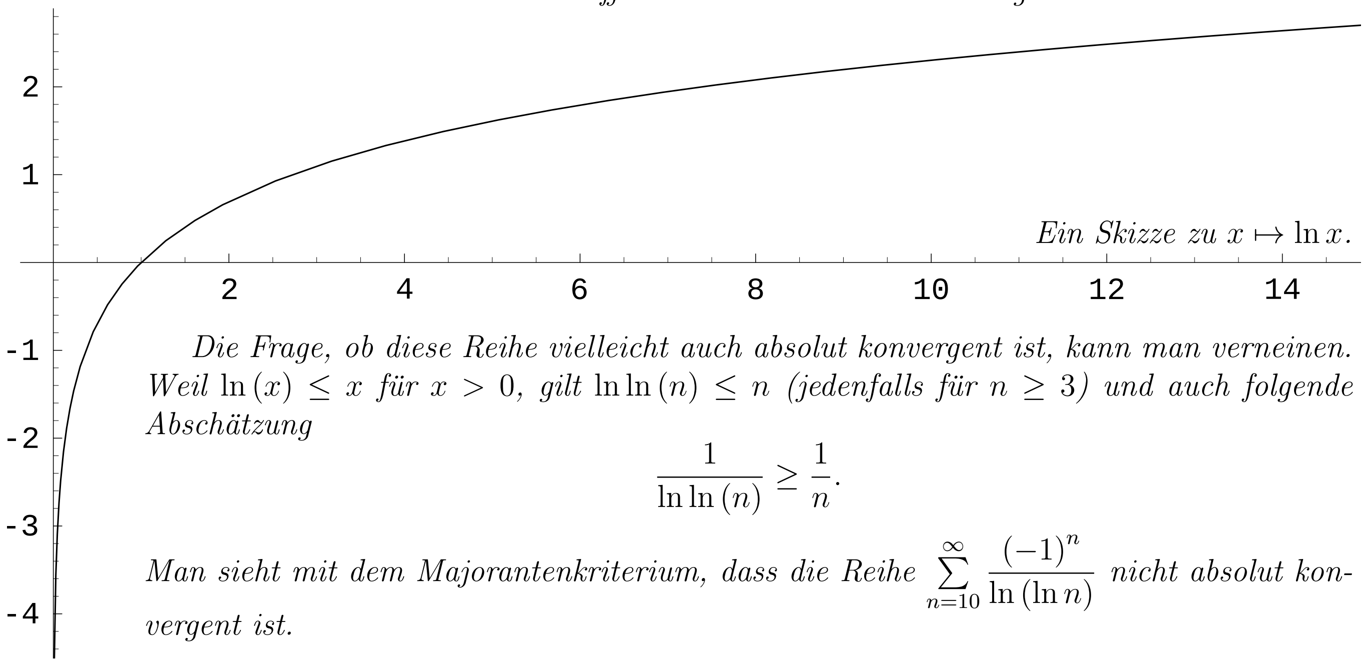


Beispiel 7.17 *Betrachten wir* $\sum_{n=10}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$.
Wir gehen davon aus, dass man aus der Schule folgende Kenntnisse mitgebracht hat:

1. $\ln x > 0$ *für* $x > 1$ *und* $\ln x > 1$ *für* $x > 3$.
2. $\ln x \to \infty$ *wenn* $x \to \infty$.
3. $\ln x > \ln y$ *wenn* $x > y$.

Weil $\ln x > 0$ *für* $x > 1$ *und* $\ln x > 1$ *für* $x > 3$ *haben wir* $\frac{1}{\ln(\ln n)} > 0$ *für* $n \ge 10$.
Weil $x \mapsto \ln x$ *monoton wachsend ist, gilt* $\left\{\frac{1}{\ln(\ln n)}\right\}_{n=10}^{\infty}$ *ist eine monoton fallende Folge.*
Weil $\ln x \to \infty$ *wenn* $x \to \infty$ *folgt* $\frac{1}{\ln(\ln n)} \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Das Kriterium von Leibniz trifft zu und die Reihe ist konvergent.



Ein Skizze zu $x \mapsto \ln x$.

Die Frage, ob diese Reihe vielleicht auch absolut konvergent ist, kann man verneinen. Weil $\ln(x) \le x$ *für* $x > 0$, *gilt* $\ln\ln(n) \le n$ *(jedenfalls für* $n \ge 3$*) und auch folgende Abschätzung*

$$\frac{1}{\ln\ln(n)} \ge \frac{1}{n}.$$

Man sieht mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=10}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ *nicht absolut konvergent ist.*

7.6 Rezeptur

Wie geht man auf eine strukturierte Art die Frage an, ob eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert? Die folgende Anleitung kann dazu helfen.

$\boxed{1}$ `Frage:` $b_n \to 0$?

$$\texttt{Antwort:} \begin{cases} \text{Ja} & \dashrightarrow \texttt{Frage } \boxed{2}. \\ \text{Nein} & \dashrightarrow \texttt{Reihe divergent.} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ `Frage:` Reihe absolut konvergent? Dazu $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ vergleichen mit bekannter Reihe:

(a) Polynomialer Typ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ und ähnlich. Benutze Majorantenkriterium mit $\frac{c}{n^q}$ und $c > 0$.

$$\texttt{Antwort:} \begin{cases} |b_n| \geq \frac{c}{n^q} \text{ und } q \leq 1 & \dashrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \ \texttt{divergent.} \\ |b_n| \leq \frac{c}{n^q} \text{ und } q > 1 & \dashrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \ \texttt{und auch} \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ \texttt{konvergent.} \end{cases}$$

Wenn b_n kein festes Vorzeichen hat und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ divergiert: $\dashrightarrow$ `Frage` $\boxed{3}$.

(b) Potenztyp: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ und ähnlich. Berechne r durch (Quotienten- oder) Wurzelkriterium.

$$\texttt{Antwort:} \begin{cases} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = r > 1 & \dashrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ \texttt{divergent.} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = r = 1 & \dashrightarrow \texttt{Frage } \boxed{3}. \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = r < 1 & \dashrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ \texttt{konvergent.} \end{cases}$$

Bemerkung: $r > 1$ sollte nicht auftreten, denn dann gilt nicht $b_n \to 0$.

(c) Anderer Typ: $\dashrightarrow$ Frage $\boxed{3}$.

$\boxed{3}$ `Frage:` Glieder alternierend und Leibniz trifft zu?

$$\texttt{Antwort:} \begin{cases} \text{Ja} & \dashrightarrow \texttt{Reihe konvergent.} \\ \text{Nein} & \dashrightarrow \boxed{4}. \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Eigene Kreativität gefragt.

Analysis 1, Woche 8

Reihen II

8.1 Summen und Produkte von Reihen

Wenn wir zwei Reihen haben die konvergieren, dann folgt aus „Grenzwert der Summe ist Summe der Grenzwerte“, dass man die zwei Reihen addieren kann und dass der Limes so ist wie man vielleicht naiv erwartet.

Lemma 8.1 *Seien* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *zwei (komplexe) Folgen und sei* $A, B \in \mathbb{C}$. *Wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = A$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = B$, *dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = A + B.$$

Bemerkung 8.1.1 *Obwohl hier umgeordnet wird, ist es so, dass man sich bei dieser bestimmten Umordnung keine Sorgen zur Konvergenz machen muss.*

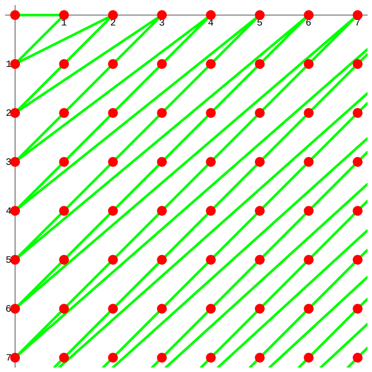
Beweis. Schreibe $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ und $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, dann folgt das Ergebnis aus

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n.$$

■

Lemma 8.2 *Seien* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *zwei (komplexe) Folgen. Wenn* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent sind, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m} \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \right).$$



Bemerkung 8.2.1 *In der Skizze sollen die roten Punkte die Zahlen* $a_i b_j$ *darstellen, und die grüne Kurve die Reihenfolge der Umordnung in* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$.

Beweis. Man bemerke, dass

$$\{(m,k-m)\,;0\le m\le k\le n\}=\{(m,\ell)\,;0\le m,\ell \text{ und } \ell+m\le n\}$$

gilt, und dies uns in den folgenden Abschätzungen die erste Gleichung liefert

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}\right|\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}|a_m b_{k-m}|=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-\ell}|a_m b_\ell|\le$$
$$\le\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}|a_m b_\ell|=\left(\sum_{m=0}^{n}|a_m|\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}|b_\ell|\right).$$

Dann ist also die Umordnung absolut konvergent, wenn $\sum_{m=0}^{\infty}a_m$ und $\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ es sind. So ist $\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}|a_m b_{k-m}|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt, und hat also einen Grenzwert. Weil absolute Konvergenz gewöhnliche Konvergenz impliziert, ist auch $\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k\right)$$

gilt, betrachten wir die folgende Abschätzung:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}-\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{\ell=0}^{n}b_\ell\right|\le\sum_{\substack{m+\ell>n\\ m,\ell\le n}}|a_m b_\ell|\le$$
$$\le\sum_{m>\frac12 n}\sum_{\ell\ge0}|a_m|\,|b_\ell|+\sum_{m\ge0}\sum_{\ell>\frac12 n}|a_m|\,|b_\ell|\,.$$

Weil $\sum_{m=0}^{\infty}a_m$ absolut konvergent ist, folgt $\lim_{n\to\infty}\sum_{m>\frac12 n}|a_m|=0$ und $A:=\sum_{m\ge0}|a_m|<\infty$. Ebenso, weil $\sum_{\ell=0}^{\infty}b_\ell$ absolut konvergent ist, folgt $\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell>\frac12 n}|b_\ell|=0$ und $B:=\sum_{\ell\ge0}|b_\ell|<\infty$. Wir finden

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}-\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{\ell=0}^{n}b_\ell\right|\le B\sum_{m>\frac12 n}|a_m|+A\sum_{\ell>\frac12 n}|b_\ell|\,.$$

Das Ergebnis folgt aus dem Einschließungslemma. ■

8.2 Potenzreihen

Definition 8.3 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine (komplexe) Folge und $z\in\mathbb{C}$. Dann nennt man $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ eine Potenzreihe in z.*

Man findet für die $z\in\mathbb{C}$, bei dem $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ konvergiert, eine Funktion $\left(z\mapsto\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k\right):D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Naiv könnte man sagen, dass so eine Potenzreihe ein Polynom von Grad ∞ wäre. Das ist aber nicht üblich. Den Namen „Polynom“ reservieren wir für Funktionen von der folgenden Form mit $N\in\mathbb{N}$:

$$p(z)=\sum_{k=0}^{N}a_k z^k.$$

Lemma 8.4 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine (komplexe) Folge und sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe in* z. *Dann gibt es* $R_a \in [0,\infty]$, *so dass:*

1. *wenn* $|z| < R_a$, *dann ist* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *absolut konvergent;*

2. *wenn* $|z| > R_a$, *dann ist* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *divergent.*

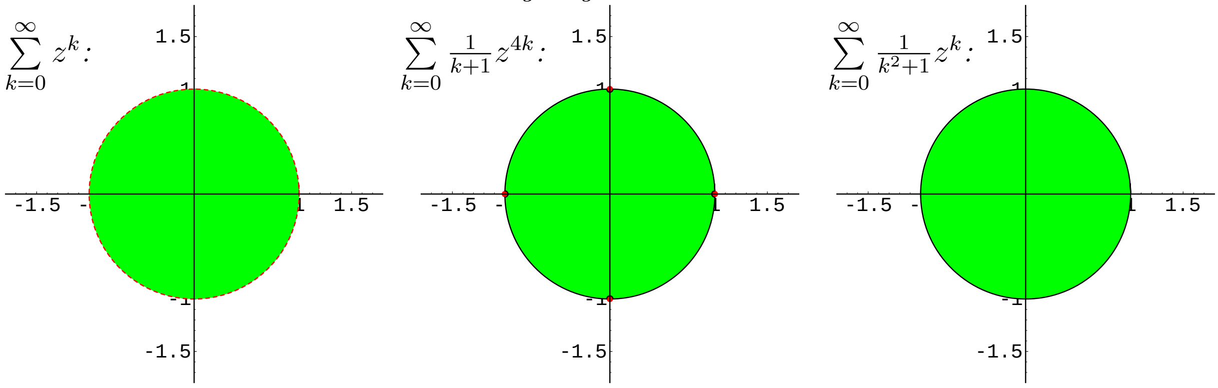
Bemerkung 8.4.1 *Dieses* R_a *heißt der* Konvergenzradius *zu* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. *Man kann ihn berechnen auf folgende Weise. Setze*

$$\ell_a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dieser Limes ℓ_a *existiert in* $[0,\infty]$. *Das heißt, entweder* $\ell_a \in [0,\infty)$ *ist eine reelle Zahl, oder das Symbol* ∞. *Es gilt*

$$R_a = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \ell_a = \infty, \\ \ell_a^{-1} & \text{wenn } \ell_a \in \mathbb{R}^+, \\ \infty & \text{wenn } \ell_a = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Bemerkung 8.4.2 *Für* $|z| = R_a$ *kann nicht ohne weiteres eine Aussage machen, ob die Potenzreihe konvergent oder divergent ist. Wir geben drei Beispiele mit gleichem Konvergenzradius aber unterschiedlichen Konvergenzgebieten:*



Beweis. Man benutze das Wurzelkriterium. Für die Potenzreihe gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergent,}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ divergent.}$$

Das Ergebnis folgt, indem man bemerkt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell_a\,|z|\,.$$

Die genügenden Bedingungen für Konvergenz, respektive Divergenz, nämlich $\ell_a\,|z| < 1$ und $\ell_a\,|z| > 1$, lassen sich mit R_a in (8.1) übersetzen in respektive $|z| < R_a$ und $|z| > R_a$. ■

8.2.1 Exponentialreihe

Definition 8.5 *Die* Exponentialreihe *in $z \in \mathbb{C}$ setzt man*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Weil für $n \in \mathbb{N}$ (und gerade) gilt, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} &= \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots(n/2)(n/2-1)\dots 3.2.1}} \leq \\ &\leq \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n\right)\dots\left(\frac{1}{2}n\right).1\dots 1.1.1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\left(\frac{1}{2}n\right)}}} = \sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

und weil $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}} = 0$ gilt (und eine ähnliche Abschätzung für ungerade n), findet man

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = 0.$$

Es folgt, dass:

Lemma 8.6 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *hat den Konvergenzradius $R = \infty$.*

Das hat wiederum zur Folge, dass $(z \mapsto \exp(z)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wohl definiert ist.

Lemma 8.7 *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z).$$

Beweis. Weil die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ absolut konvergent ist für alle $z \in \mathbb{C}$, können wir aus Lemma 8.2 schließen, dass

$$\begin{aligned} \exp(w)\exp(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m+k=n} \frac{1}{k!} w^k \frac{1}{m!} z^m \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} w^k z^{n-k} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k z^{n-k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k z^{n-k} \right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (w+z)^n &= \exp(w+z). \end{aligned}$$

■

8.2.2 Binomialreihe

Definition 8.8 *Die Binomialreihe für $s \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ setzt man*

$$\operatorname{bin}(s; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n.$$

Wir erinnern noch mal daran, dass für $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{s}{n} = \frac{s\,(s-1)\,(s-2)\dots(s-n+2)\,(s-n+1)}{n\,(n-1)\,(n-2)\quad\dots\quad 2\qquad\qquad 1} = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{s-m}{n-m}.$$

Für $n > s \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{s}{n} = 0$ und es folgt

$$\operatorname{bin}(s; z) = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n,$$

das heißt, $\operatorname{bin}(s; z)$ für $s \in \mathbb{N}$ ist ein Polynom.

Lemma 8.9 *Für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$ den Konvergenzradius $R = 1$.*

Beweis. Wenn $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, dann gilt $\binom{s}{n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben erstens $\binom{s}{n}$ in einer anderen Darstellung, nämlich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\binom{s}{n} &= \frac{s}{n}\frac{s-1}{n-1}\frac{s-2}{n-2}\dots\frac{s-n+2}{2}\frac{s-n+1}{1} = \\
&= \frac{s-n+1}{n}\frac{s-n+2}{n-1}\frac{s-n+3}{n-2}\dots\frac{s-1}{2}\frac{s}{1} = \\
&= (-1)^n\frac{n-s-1}{n}\frac{n-s-2}{n-1}\frac{n-s-3}{n-2}\dots\frac{1-s}{2}\frac{-s}{1}.
\end{aligned}$$

Es gilt also, dass

$$\binom{s}{n} = \prod_{m=1}^{n} \frac{s-m+1}{m} = (-1)^n \prod_{m=1}^{n} \frac{m-s-1}{m} = (-1)^n \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{s+1}{m}\right).$$

Sei $\varepsilon \in (0, 1)$. Wir nehmen N so, dass für $m > N$ gilt

$$\left|\frac{s+1}{m}\right| < \varepsilon.$$

Wir haben dann, dass für $n > N$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n}\right|} &= \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|} = \\
&= \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|\left|\prod_{m=N+1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|} \leq \\
&\leq \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\sqrt[n]{\prod_{m=N+1}^{n}\left(1+\left|\frac{s+1}{m}\right|\right)} \\
&\leq \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\sqrt[n]{(1+\varepsilon)^{n-N}} = \\
&= \sqrt[n]{\frac{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}{(1+\varepsilon)^{N}}}\,(1+\varepsilon)\,. \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

Weil für $s \notin \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right| \neq 0$$

und dies nicht von n abhängt, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}{(1+\varepsilon)^{N}}} = 1. \qquad (8.3)$$

Wir finden mit (8.2) und (8.3), dass

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n}\right|} \leq 1+\varepsilon. \qquad (8.4)$$

Ebenso gilt für $n > N$, ähnlich wie in (8.2), dass

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n}\right|} &= \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|} \geq \\
&\geq \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\sqrt[n]{\prod_{m=N+1}^{n}\left(1-\left|\frac{s+1}{m}\right|\right)} \\
&\geq \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\sqrt[n]{(1-\varepsilon)^{n-N}} = \\
&= \sqrt[n]{\frac{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}{(1-\varepsilon)^{N}}}\,(1-\varepsilon)\,. \qquad (8.5)
\end{aligned}
$$

Es folgt, wie bei (8.4), dass

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n}\right|} \geq 1-\varepsilon. \qquad (8.6)$$

Weil (8.4) und (8.6) für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, findet man

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n}\right|} = 1.$$

Das liefert uns, dass der Konverenzradius auch 1 ist. ■

Lemma 8.10 *Für alle $t, s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:*

$$\operatorname{bin}(t; z) \operatorname{bin}(s; z) = \operatorname{bin}(s + t; z).$$

Beweis. Weil $R = 1$ der Konvergenzradius ist, dürfen wir wegen Lemma 8.2 für $|z| < 1$ die Umordnung durchführen:

$$\begin{aligned} \operatorname{bin}(t; z) \operatorname{bin}(s; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{s}{m} z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} \binom{t}{k} z^k \binom{s}{m} z^m \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} \binom{t}{k} \binom{s}{m} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} \right) z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t+s}{n} z^n. \end{aligned}$$

Die letzte Identität benutzt das folgende Ergebnis. ■

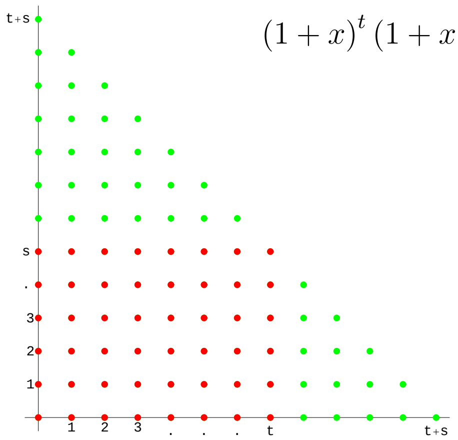
Lemma 8.11 *Sei $t, s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{t+s}{n}. \tag{8.7}$$

Beweis. Der Beweis geht in mehreren Schritten. Zuallererst nehmen wir an, dass $t, s \in \mathbb{N}$. Für $t, s \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$(1 + x)^{t+s} = \sum_{n=0}^{t+s} \binom{t+s}{n} x^n. \tag{8.8}$$

Wenn wir $(1 + x)^{t+s}$ wie folgt schreiben, finden wir



$$\begin{aligned} (1 + x)^t (1 + x)^s &= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} x^k \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} x^m = \\ &= \sum_{k=0}^{t} \sum_{m=0}^{s} \binom{t}{k} \binom{s}{m} x^{k+m} = \\ &= \sum_{n=0}^{t+s} \sum_{m+k=n} \binom{t}{k} \binom{s}{m} x^{k+m} = \\ &= \sum_{n=0}^{t+s} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} \right) x^n. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Man soll bemerken, dass die letzten zwei Summen über eine größere Menge summieren. Weil aber $\binom{t}{k} = 0$ für $k > t \in \mathbb{N}$ und $\binom{s}{m} = 0$ für $m > s \in \mathbb{N}$, bleibt die Summe gleich. Weil die beiden Polynome in (8.8) und (8.9) identisch sind, sind die Koeffizienten identisch und es folgt (8.7).

Der zweite Schritt betrifft den Fall $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}$. Für $s \in \mathbb{N}$ fest gewählt betrachten wir die folgenden Polynome in t:

$$p_1(t) = \binom{t+s}{n} \text{ und } p_2(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k}.$$

Sowohl p_1 als auch p_2 ist ein Polynom von Grad n. Das Besondere ist, dass $p_1(t) = p_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{N}$, weil dann das Ergebnis aus dem ersten Abschnitt gilt. Also ist $p_1(t) - p_2(t)$ ein Polynom von Grad höchstens n, das Nullstellen hat für alle $t \in \mathbb{N}$. Das geht nur wenn $p_1 - p_2 = 0$. Das heißt, wir haben jetzt bewiesen, dass (8.7) gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{N}$.

Der dritte Schritt betrifft den Fall $s \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{N}$. Weil die Gleichung in (8.7) symmetrisch bezüglich s und t ist, haben wir auch, dass (8.7) stimmt für alle $t \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$.

Den Trick mit den Polynomen p_1 und p_2 können wir nochmals benutzen, jetzt aber für jedes $s \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Wir bekommen dann, dass (8.7) gilt für alle $s, t \in \mathbb{C}$. ■

Wieso all dieses Getue um die Binomialreihe?

- Wenn $n > s \in \mathbb{N}$, hat man $\binom{s}{n} = 0$, und man bekommt
$$\operatorname{bin}(s; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n = (1+z)^s .$$

- Für $s \in \mathbb{Q}^+$, sagen wir $s = \frac{k}{m}$ mit $k, m \in \mathbb{N}^+$, bekommt man
$$(\operatorname{bin}(s; z))^m = \operatorname{bin}(ms; z) = \operatorname{bin}(k; z) = (1+z)^k .$$
Weil für $x \in (-1, 1)$ gilt, dass $\operatorname{bin}(s; x) \in \mathbb{R}$, hat man für ungerade m
$$\operatorname{bin}(s; x) = (1+x)^s . \tag{8.10}$$
Für gerade m findet man $\operatorname{bin}(s; z) = \pm (1+z)^s$. Weil aber $\operatorname{bin}(s; 0) = 1$ gilt, erwartet man auch da (8.10). Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass $z \mapsto \operatorname{bin}(s; z)$ stetig ist auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Aus Stetigkeit und $\operatorname{bin}(s; 0) = 1$ folgt (8.10) auch für m gerade.

- Für $s \in \mathbb{Q}^-$, benutzt man $\operatorname{bin}(s; x) \operatorname{bin}(-s; x) = \operatorname{bin}(0; x) = 1$ und damit folgt aus (8.10) für $s \in \mathbb{Q}^+$ die Gültigkeit der Formel auch für $s \in \mathbb{Q}^-$.

- Die Formel in (8.10) kann man benutzen, um x^s zu definieren für $x \in \mathbb{R}^+$ und $s \in \mathbb{C}$!
Nämlich für $x \in (0, 2)$ und $s \in \mathbb{C}$:
$$x^s = \operatorname{bin}(s; x - 1),$$
für $x \in [2, 4)$ und $s \in \mathbb{C}$:
$$x^s = \operatorname{bin}(2s; x^{\frac{1}{2}} - 1),$$
für $x \in [4, 8)$ und $s \in \mathbb{C}$:
$$x^s = \operatorname{bin}(3s; x^{\frac{1}{3}} - 1),$$
usw.

Analysis 1, Woche 9

Stetigkeit I

9.1 Grenzwerte bei Funktionen

9.1.1 Der einfachste Fall

Wir erinnern noch mal an den Grenzwert bei einer Folge. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle (oder komplexe) Folge. Dann heißt ℓ der Limes von dieser Folge, notiert als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, muss man also für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ angeben können, so dass, wenn n größer N ist, a_n weniger als ε von ℓ entfernt liegt.

Eine ähnliche Struktur möchte man beim Limes einer Funktion haben.

Definition 9.1 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man „ℓ ist der Limes von f für x gegen x_0“, notiert als*

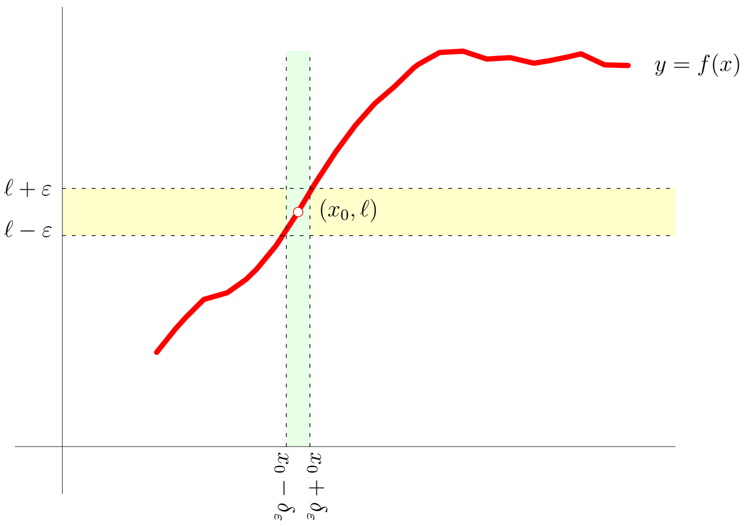
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{9.2}$$

Bemerkung 9.1.1 *Ähnlich wie man in (9.1) „$N = N_\varepsilon$“ hat, gilt auch hier „$\delta = \delta_\varepsilon$“.*

Bemerkung 9.1.2 *Ähnlich definiert man für eine Funktion $f : \mathbb{C} \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ den Limes von f für z gegen z_0.*



Um zu zeigen, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

muss man also für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ angeben können, so dass wenn x weniger als δ_ε entfernt von x_0 liegt, $f(x)$ weniger als ε entfernt von ℓ liegt.

Beispiel 9.2 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{x^5} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ *gilt* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Wir verwenden, dass

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \text{ für alle } a \in \mathbb{C}$$

und dass

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \geq \frac{1}{3!} t^3 \text{ für } t \geq 0.$$

Das erste Ergebnis zeigt, dass

$$\frac{1}{x^5} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^5 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)},$$

und das zweite zeigt, dass

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x^5 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} \right| \leq \frac{1}{|x^5| \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{x^2}\right)^3} = 6\ |x|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ *und nehme* $\delta = \frac{1}{6}\varepsilon$. *Dann folgt für* $|x - 0| < \delta$, *dass* $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Beispiel 9.3 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2 - x}$ *gilt* $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Sei $\varepsilon > 0$. *Wir nehmen* $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon\right)$. *Dann folgt für* $0 < |x - 1| < \delta$, *dass*

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2 - x} - 2 \right| = \left| \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 - x} \right|$$
$$= \left| \frac{-(x-1)^2}{x(x-1)} \right| = \left| -\frac{x-1}{x} \right| = \frac{|x-1|}{|x|} \leq 2|x - 1| < 2\delta \leq \varepsilon.$$

Die erste Ungleichung verwendet, dass für $|x - 1| < \delta \leq \frac{1}{2}$ *folgendes gilt:*

$$\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < 2.$$

9.1.2 Einseitiger Limes

Was machen wir, wenn statt einem Punkt im Definitionsgebiet von f noch viel mehr fehlt? Oder wenn wir uns absichtlich der Stelle nur von einer Seite annähern möchten? Zum Beispiel wollen wir auch den Grenzwert von $\sqrt{x}$ für $x \to 0$ nehmen können. Weil die Wurzel aber nur für nicht-negative Zahlen definiert ist, kann man nur von oben zu 0 kommen. Oder wir wollen nur für x von rechts gegen 1 den Limes von $\frac{|x-1|}{x^2-1}$ berechnen.

Definition 9.4 1. *Wenn die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist auf $(x_0, x_0 + s)$ mit $s > 0$, dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x von rechts (oder von oben) gegen x_0, und man schreibt*

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. *Wenn die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist auf $(x_0 - s, x_0)$ mit $s > 0$, dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x von links (oder von unten) gegen x_0, und man schreibt*

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

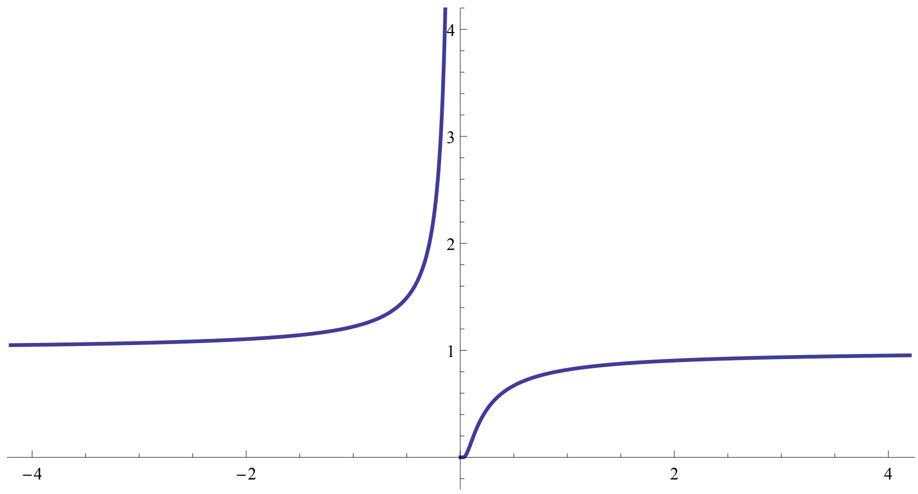


Abbildung 9.1: *Skizze zu $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{5x}\right)$. In 0 existiert nur der Limes von rechts.*

Wenn wir Grenzwerte für Funktionen in $\mathbb{C}$ nehmen wollen, dann können wir nicht nur von unten, sondern auch von der positiven imaginären Seite oder sogar noch auf andere Art dahin gehen (zum Beispiel über eine Spirale). Um all diese Möglichkeiten zusammenzufassen, braucht es den Begriff *punktierte r-Umgebung*:

- Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a - r, a + r)$ heißt r-Umgebung von a in $\mathbb{R}$.
- Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ heißt punktierte r-Umgebung von a in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 9.4.1 *Auch in $\mathbb{C}$ werden (punktierte) Umgebungen benutzt. Statt Intervalle in $\mathbb{R}$ benutzt man kreisförmige Umgebungen:*

- *Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Menge $B_r(a) := \{x \in \mathbb{C}; |x-a| < r\}$ heißt r-Umgebung von a in $\mathbb{C}$.*

- *Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Menge $B_r(a)^* := \{x \in \mathbb{C}; 0 < |x-a| < r\}$ heißt punktierte r-Umgebung von a in $\mathbb{C}$.*

Die Notation $B_r(a)$ und $B_r(a)^*$ werden wir auch benutzen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$.
Jede Menge U für die es ein $r > 0$ gibt mit $B_r(a) \subset U$, heißt eine Umgebung *von a.*

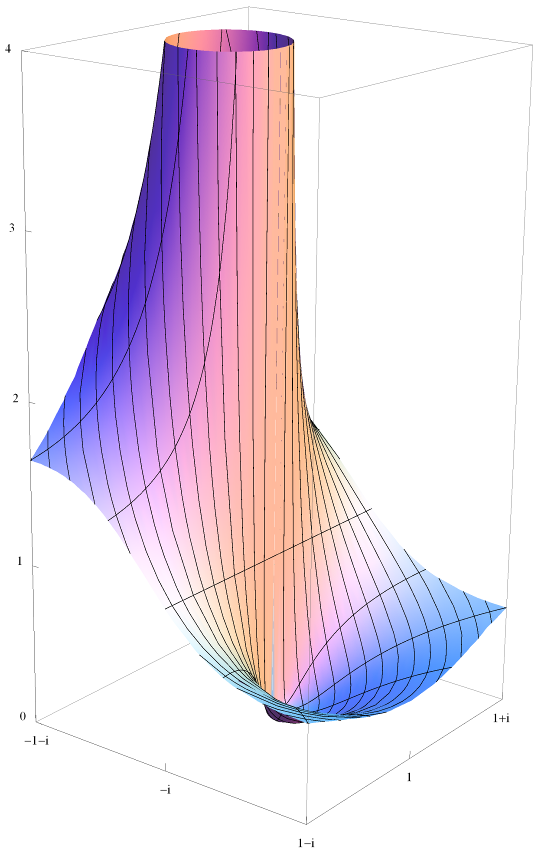
Bemerkung 9.4.2 *Sei $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) eine Funktion. Wenn $B_r(x_0)^* \cap A$ nicht leer ist für alle $r > 0$, dann sagt man „ℓ ist der Limes von f für x gegen x_0 innerhalb A“, notiert als*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (x \in A \text{ und } 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Beispiel 9.5 *Hier unten findet man eine Skizze der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch*



$$f(z) = \left| \exp\left(\frac{-1}{z}\right) \right|.$$

Wir können zeigen, dass

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{R}^+}} f(z) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{R}^-}} f(z) = \infty.$$

Bald wird man auch zeigen können, dass

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ \mathrm{Re}(z) = 0}} f(z) = 1,$$

und setzt man

$$A = \{z \in \mathbb{C}; |\mathrm{Im}(z)| < \mathrm{Re}(z)\},$$

so folgt sogar

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A}} f(z) = 0.$$

Für $f : \{z \in \mathbb{R} \setminus \{a\}; |z-a| < r\} \to \mathbb{R}$ kann man sofort zeigen, dass

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Für $f : \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}; |z-a| < r\} \to \mathbb{R}$ gibt es viele Wege um nach a zu gehen und keine solche Aussage. Siehe Abbildung 9.2.

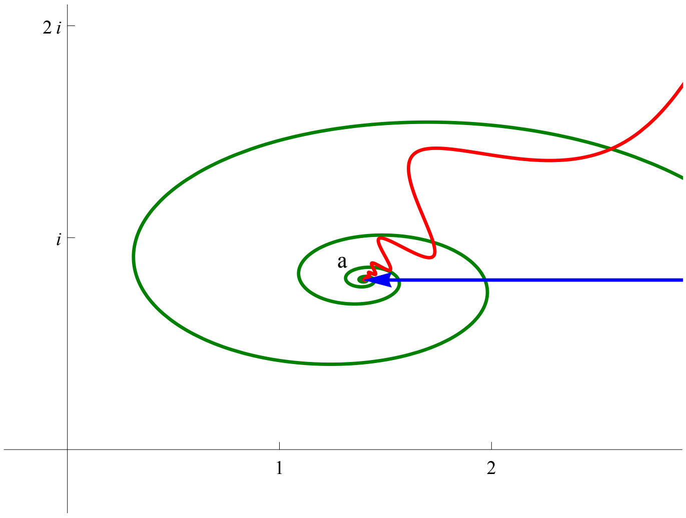


Abbildung 9.2: *Mehrere Wege führen nach $a \in \mathbb{C}$.*

9.1.3 Wenn der Limes nicht existiert

Was soll man machen, wenn man vermutet und beweisen möchte, dass eine Funktion f in x_0 keinen Limes hat?

Wir gehen mal direkt von der Definition aus. Nehmen wir an, es gilt nicht, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. entweder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht, oder
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, ist aber ungleich ℓ.

Schreiben wir (9.2) wie folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \tag{9.4}$$

dann wird die Verneinung

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : |f(x) - \ell| \geq \varepsilon, \tag{9.5}$$

ähnlich wie die Verneinung von „es gibt ein rotes Fahrrad“, die Aussage „alle Fahrräder sind nicht rot“ ist. Die Aussage in (9.5) besagt „ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ gilt nicht” und lässt sowohl Möglichkeit 1 als auch 2 zu.

Für (9.5) muss man ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass es beliebig nahe bei x_0 ein x gibt mit $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Das heißt, bei diesem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zu finden mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$ und $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$.

Bevor wir dies weiter verfolgen, zeigen wir erst das folgende Ergebnis.

Lemma 9.6 *Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\ell \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *Der Limes $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.*
2. *Für alle Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.*

Bemerkung 9.6.1 *Man sagt: für reelle Funktionen sind Limes (1.) und Folgenlimes (2.) gleichwertig.*

Bemerkung 9.6.2 *Die negative Fassung kann sehr nützlich sein und sie ist wie folgt. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\ell \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- *$f(x)$ konvergiert nicht gegen ℓ für x nach a, in kurzer Schreibweise: $f(x) \not\to \ell$ für $x \to a$.*
- *Es gibt eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $a_n \to a$ und $f(a_n) \not\to \ell$ für $n \to \infty$.*

Wenn man zeigen möchte, dass der Limes nicht gleich ℓ ist, reicht es also ‚eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zu finden, die gegen a geht, für die aber $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ nicht gegen ℓ geht.

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für $x \in B_{\delta_\varepsilon}(a)^*$ gilt $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei δ_ε passend und sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gibt es $N = N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \delta_\varepsilon$ für $n > N$. Weil $a_n \in B_{\delta_\varepsilon}(a)^*$ gilt, folgt $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Wenn $\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell$, dann wie oben bemerkt, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$, also auch für $\delta = \frac{1}{n}$, mindestens ein $x \in B_\delta(a)^*$ mit $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Nennen wir a_n eine solche zu $\delta = \frac{1}{n}$ passende x. Dann gilt $a_n \neq a$, $a_n \in B_{\delta_\varepsilon}(a)^*$ und weil $|a - a_n| < \frac{1}{n}$, auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Weil $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$ gilt nicht $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. ■

Bis jetzt haben wir immer einen Kandidaten für ℓ bereitgehalten. Wenn man zeigen möchte, dass der Limes nicht existiert, kann man folgendes benutzen.

Lemma 9.7 *Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Limes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht genau dann, wenn es*

1. *eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ gibt mit $a_n \to x_0$ und $|f(a_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$, oder es*
2. *zwei Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ gibt, mit $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ für $n \to \infty$, so dass*
$$f(a_n) \to \ell_a \text{ und } f(b_n) \to \ell_b \neq \ell_a \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn es eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt mit $a_n \to x_0$ und $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$, und $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht, dann gibt es $\varepsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ mindestens ein b_n mit $|b_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(b_n) - \ell| > \varepsilon$. Wir können eine Teilfolge wählen derart, dass $\{f(b_{n_k})\}_{k=0}^{\infty}$ monoton ist. Für monotone Folgen gibt es zwei Möglichkeiten: $|f(b_{n_k})| \to \infty$ oder $f(b_{n_k}) \to \ell_b \in \mathbb{R}$. Wenn es $\ell_b \in \mathbb{R}$ gibt, dann folgt $\ell \neq \ell_b$, weil $|\ell - \ell_b| \geq \varepsilon$.

Wenn es keine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt mit $a_n \to x_0$, so dass $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch $\left\{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ nicht. Jede Folge hat eine monotone Teilfolge. Weil beschränkt und monoton in $\mathbb{R}$ konvergent bedeutet, muss $\left\{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt sein, anders gesagt, $\left|f\left(x_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right| \to \infty$ für eine Teilfolge (sogar für die Folge).

($\Leftarrow$) Man nehme $\varepsilon = 1$ für Fall 1, beziehungsweise $\varepsilon = \frac{1}{4}|\ell_a - \ell_b|$ für Fall 2. Wenn ℓ der Limes wäre, dann gibt es kein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Für den ersten Fall gibt es nämlich $a_n \in B_\delta(x_0)$ mit $|f(a_n)| > \ell + 1$. Für den zweiten Fall gilt entweder $|\ell - \ell_a| \geq 2\varepsilon$ oder $|\ell - \ell_b| \geq 2\varepsilon$. Nehmen wir an $|\ell - \ell_a| \geq 2\varepsilon$, dann gibt es $a_n \in B_\delta(x_0)$ mit $|f(a_n) - \ell_a| < \varepsilon$ und

$$|f(a_n) - \ell| \geq |\ell_a - \ell| - |f(a_n) - \ell_a| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

■

Beispiel 9.8 $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ *existiert nicht. Nehmen Sie* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$*:*

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n} \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel 9.9 $\lim_{x \downarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ *existiert nicht. Nehmen Sie* $\left\{\frac{1}{\pi n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\left\{\frac{2}{\pi(4n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$*:*

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi n}}\right) = \sin(\pi n) = 0 \to 0 \text{ und } \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right) = \sin\left(2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 1 \to 1.$$

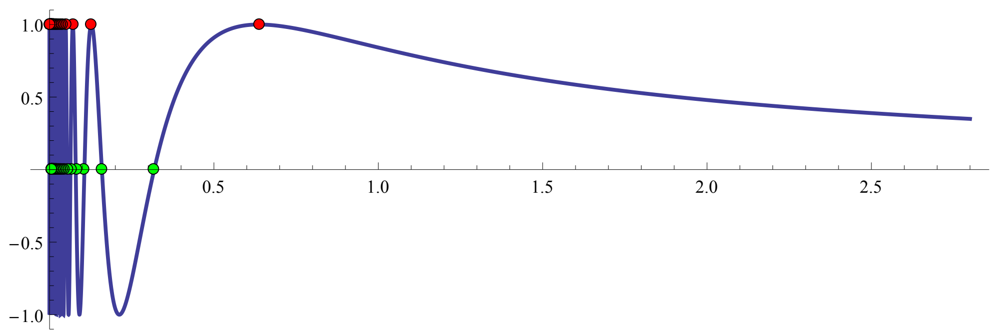


Abbildung 9.3: *Skizze zu* $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *mit in rot die Punkten* $\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1\right)$ *und in grün* $\left(\frac{1}{n\pi}, 0\right)$.

9.2 Stetigkeit

Definition 9.10 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$*) ist stetig in* $a \in \mathbb{R}$*, wenn*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Bemerkung 9.10.1 *Benutzt man die Definition vom Grenzwert, dann sieht man, dass stetig in a heißt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{9.6}$$

Weil da für $x = a$ *eine Trivialität steht:* $|f(a) - f(a)| < \varepsilon$*, kann man bei Stetigkeit die Bedingung* $0 < |x - a|$ *weglassen.*

Bemerkung 9.10.2 *Selbstverständlich passt man die Definition an, wenn f nur auf einem Teilgebiet definiert ist: Die Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) ist stetig in $a \in A$, wenn $A \cap B_r(a)^* \neq \emptyset$ für alle $r > 0$ und*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a).$$

Definition 9.11 *Die Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) heißt stetig, wenn sie stetig ist in jedem $a \in A$.*

Beispiel 9.12 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist stetig. Sei $a \in \mathbb{R}$. Um Stetigkeit in a zu beweisen, muss man für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ angeben, so dass die Implikation in (9.6) gilt. Hinten angefangen heißt das: man muss dafür sorgen, dass $|x^3 - a^3| < \varepsilon$. Weil für $|x - a| < 1$ gilt $|x| \leq |a| + 1$, bekommen wir folgende Abschätzung*

$$\left|x^3 - a^3\right| = \left|x^2 + ax + a^2\right| |x - a| \leq 3 \left(|a| + 1\right)^2 |x - a|.$$

Jetzt kann man raten, welches $\delta_\varepsilon > 0$ man nehmen kann:

$$\delta_\varepsilon = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3\left(|a| + 1\right)^2}\right). \tag{9.7}$$

Man bekommt für $|x - a| < \delta_\varepsilon$, dass $|x - a| < 1$ und dann auch

$$\left|x^3 - a^3\right| \leq 3\left(|a| + 1\right)^2 |x - a|,$$

und somit

$$3\left(|a| + 1\right)^2 |x - a| < 3\left(|a| + 1\right)^2 \frac{\varepsilon}{3\left(|a| + 1\right)^2} = \varepsilon.$$

Kurzgefasst: für δ_ε wie in (9.7) folgt

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|x^3 - a^3\right| < \varepsilon.$$

Beispiel 9.13 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist stetig. Sei $a \in \mathbb{R}$. Um Stetigkeit in a zu beweisen, müssen wir x genügend nah an a nehmen, das heißt δ_ε genügend klein, um*

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| < \varepsilon$$

zu haben für $\varepsilon > 0$, das uns gegeben wird. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Für $a = 0$ nehmen wir $\delta_\varepsilon = \varepsilon^3$. Dann gilt:

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}\right| = \sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\delta_\varepsilon} = \sqrt[3]{\varepsilon^3} = \varepsilon.$$

Für $a \neq 0$ nehmen wir $\delta_\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2}|a|, \varepsilon \sqrt[3]{a}^2\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| &= \left|\frac{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}\right| \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \\
&= \left|\frac{\left(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2\right)\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right)}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}\right| = \\
&= \frac{|x - a|}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2} \leq \text{(wird unten erklärt)} \\
&\leq \frac{|x - a|}{\sqrt[3]{a}^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{a}^2}\delta_\varepsilon \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Weil $|x-a| < \frac{1}{2}|a|$ *gilt, haben* x *und* a *das gleiche Vorzeichen, und es folgt*

$$\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2 \geq \sqrt[3]{a}^2 > 0$$

und

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a}^2}.$$

Beispiel 9.14 *1. Die Funktion* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, *ist stetig.*

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *ist nicht wohldefiniert.*

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $f(0) = 0$ *und* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *für* $x \neq 0$, *ist nicht stetig in* 0 *und stetig in* a *für jedes* $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Beispiel 9.15 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nirgendwo stetig.

Beispiel 9.16 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definiert durch*

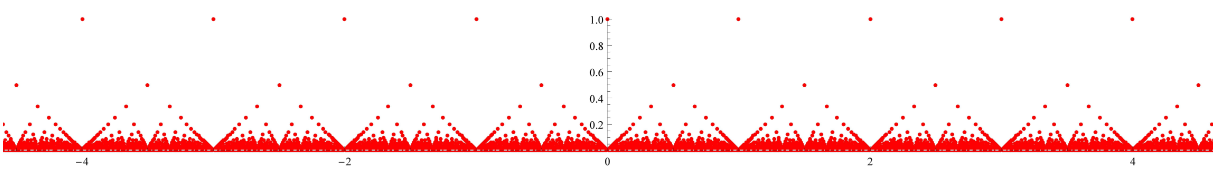
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nur in 0 *stetig.*

Beispiel 9.17 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0, \\ \frac{1}{m} & \text{wenn } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, m \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \operatorname{ggT}(|n|, m) = 1, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist stetig in jedes $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *und nicht stetig in jedes* $a \in \mathbb{Q}$. *Die Bedingung* $\operatorname{ggT}(|n|, m) = 1$ *(der größte gemeinsame Teiler) sorgt dafür, dass* $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ *als Quotient auf die einfachste Art geschrieben wird und somit, dass* f *wohldefiniert ist. Hier steht eine Skizze zu dieser Funktion:*



9.2.1 Folgenstetig

Bei dem Limes haben wir schon gesehen, dass es vernünftig sein kann, zurückzugreifen auf Grenzwerte von Folgen. Auch für Stetigkeit kann so etwas nützlich sein.

Lemma 9.18 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *f ist stetig in a.*
2. *f ist folgenstetig in a:*
   Für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.

Bemerkung 9.18.1 *Wir formulieren getrennt nochmals die negative Version. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *f ist nicht stetig in a.*
2. *Es gibt eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ und $f(a_n) \not\to f(a)$ für $n \to \infty$.*

Bemerkung 9.18.2 *Wir haben hier*

$$„a_n \to a \text{ für } n \to \infty\text{“ statt „}\lim_{n\to\infty} a_n = a\text{“}$$

und

$$„(a_n) \to f(a) \text{ für } n \to \infty\text{“ statt „}\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)\text{“}$$

geschrieben. Die Bedeutung ist gleich. Der Grund, dass wir $f(a_n) \not\to f(a)$ für $n \to \infty$ schreiben, ist, dass die Verneinung von „$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$“ genau genommen, nicht „$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$“ ist, sondern „entweder $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ existiert nicht, oder $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ existiert, ist aber ungleich $f(a)$“. Diese Aussage fasst man zusammen in „$f(a_n) \not\to f(a)$ für $n \to \infty$“.

Beweis von Lemma 9.18. Benutze die Ergebnisse in Lemma 9.6.

($\Rightarrow$) „f ist stetig in a“ kann man schreiben als: es gibt $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ und $f(a) = \ell$. Aus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ folgt „für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$“. Weil $f(a) = \ell$ können wir die Bedingung $a_n \neq a$ weglassen und auch ℓ ersetzen durch $f(a)$.

($\Leftarrow$) Wenn „für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$“ dann hat man auch „für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$“. ■

9.2.2 Stetigkeit in $\mathbb{C}$

Alle Lemmas in diesem Kapitel sind gültig für Funktionen $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Analysis 1, Woche 10

Stetigkeit II

A1

10.1 Regeln bei Grenzwerten und Stetigkeit

In der Regel ist der Student ganz begeistert von ε-δ-Geschichten. Trotzdem wollen wir ein paar Rechenregeln angeben, die oft schneller zum Ziel führen.

Lemma 10.1 *Seien $f, g : \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell_f \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \ell_g,$$

und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\ g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x)\ \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
4. *und wenn $\ell_g \neq 0$, dann* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Beweis. Weil wir gezeigt haben, dass die Aussage $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ gleichwertig ist zu $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$ für alle Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, folgen diese Behauptungen aus Lemma 5.11. Man kann auch einen direkten Beweis geben. Nehmen wir als Beispiel das Produkt. Für $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $\delta > 0$ finden, so dass $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - \ell_f \ell_g| < \varepsilon$. Dabei darf und soll man anwenden, dass es für f und g bei jedem $\varepsilon > 0$ ein dazugehörendes $\delta > 0$ gibt. Nennen wir die Zahlen für f beziehungsweise g hier $\delta_f(\varepsilon)$ und $\delta_g(\varepsilon)$.

Sei $\varepsilon > 0$ und man nehme

$$\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_f\left(\frac{\varepsilon}{2(|\ell_g| + 1)}\right), \delta_g(1), \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{2(|\ell_f| + 1)}\right)\right).$$

Bemerke, dass $\delta(\varepsilon) > 0$ gilt für jedes $\varepsilon > 0$.

Für $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ gilt $|g(x)| \leq |g(x) - \ell_g| + |\ell_g| < 1 + |\ell_g|$ und

$$|f(x)g(x) - \ell_f \ell_g| = |f(x)g(x) - \ell_f g(x) + \ell_f g(x) - \ell_f \ell_g| \leq$$

$$\leq |f(x) - \ell_f| |g(x)| + |\ell_f| \, |g(x) - \ell_g| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2(|\ell_g|+1)}(|\ell_g|+1) + |\ell_f| \frac{\varepsilon}{2(|\ell_f|+1)} \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Selbstverständlich wurde diese Zahl $\delta(\varepsilon)$ rückwirkend gefunden. ■

Korollar 10.2 *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch cf, $f+g$ und fg stetig.*

Korollar 10.3 *Jedes Polynom ist stetig auf $\mathbb{R}$ (und auch auf $\mathbb{C}$).*

Beweis. Jedes Polynom kann man schreiben als Summe und Produkt von endlich vielen Termen c und x. Die Funktionen $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) mit $f_0(x) = 1$ und $f_1(x) = x$ sind stetig: man nehme $\delta_0(\varepsilon) = 1$ und $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon$. Dann folgt aus $|x-y| < \delta_i(\varepsilon)$, dass $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Das Ergebnis folgt aus Lemma 10.1-1,2,3. ■

Korollar 10.4 *Jede rationale Funktion ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$ (allen $a \in \mathbb{C}$), wo der Nenner ungleich null ist.*

Beweis. Eine rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynome und Polynome sind stetig. Wenn der Nenner ungleich null ist kann man Lemma 10.1-4 anwenden. ■

Ein Lemma, welches wir bei 'Folgen' nicht gesehen haben, ist folgendes:

Lemma 10.5 *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Das heißt, auch $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Bemerkung 10.5.1 *Die Funktion $f \circ g$ (sprich ef-nach-ge) ist definiert durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

Beweis von Lemma 10.5. Sei wiederum $\varepsilon > 0$ gegeben. Man soll $\delta(\varepsilon) > 0$ finden, so dass

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Dabei darf man verwenden, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_g(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|x - a| < \delta_g(\varepsilon) \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

und dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_f(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|y - g(a)| < \delta_f(\varepsilon) \Rightarrow |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Man liest dies hintereinander und sieht, dass $\delta(\varepsilon) = \delta_g(\delta_f(\varepsilon))$ passt:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_g(\delta_f(\varepsilon)) &\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_f(\varepsilon), \\ |g(x) - g(a)| < \delta_f(\varepsilon) &\Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Übrigens folgt aus $\lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ nicht, dass $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \ell$. Ein Gegenbeispiel für eine solche Behauptung ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Skizzen zu f, g und $f \circ g$ findet man in Abbildung 10.1.

Setzen wir $a_n = \frac{1}{n\pi}$ so gilt $a_n \to 0$ und $g(a_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Weil jedoch sogar $g(a_n) = 0$ gilt, findet man

$$\lim_{n\to\infty} f(g(a_n)) = f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} f(x).$$

Der Limes $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ existiert sogar nicht.

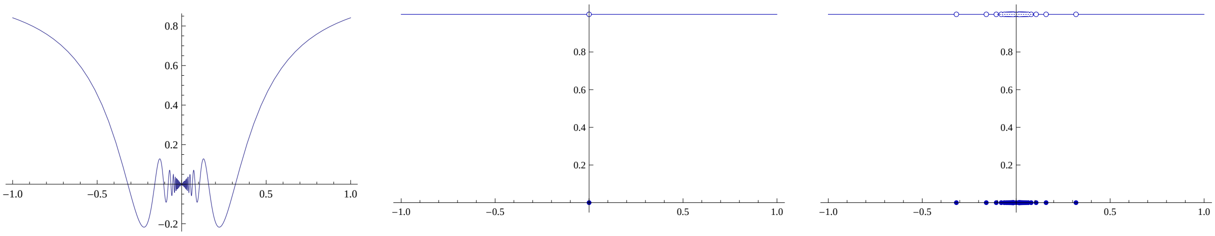


Abbildung 10.1: Skizzen zu g, f und $f \circ g$.

10.2 Uneigentliche Konvergenz und Asymptoten

Uneigentlich hat immer etwas mit ∞ zu tun. Nochmals sei bemerkt, dass ∞ keine Zahl ist und ∞ nur als Symbol benutzt wird.

10.2.1 Horizontale Asymptoten

Definition 10.6 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x nach ∞, notiert als*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} : \; x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Man sagt: f hat eine horizontale Asymptote für $x \to \infty$.

Bemerkung 10.6.1 *Die Zeile in (10.1) kann man auch ersetzen durch*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Man nehme $N = |[M]| + 1$.

Bemerkung 10.6.2 *Ähnlich wird*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell,$$

definiert durch

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} : \; x < M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{10.3}$$

Auch hier ist äquivalent

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; x < -N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{10.4}$$

Man nehme auch hier $N = |[M]| + 1$.

Beispiel 10.7 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *gilt* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. *Denn für* $x > N = N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$ *hat man*

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right| &= \left|\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right| = \left|\frac{x^2-(1+x^2)}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}\right| = \\ &= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \le \frac{1}{x^2} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

10.2.2 Vertikale Asymptoten

Definition 10.8 *Sei die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann sagt man* ∞ *ist der uneigentliche Limes von* f *für* x *nach* a, *notiert als*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

wenn

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists\delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

Man sagt $-\infty$ *ist der uneigentliche Limes von* f *für* x *nach* a, *notiert als*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

wenn

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists\delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N.$$

In beiden Fälle sagt man, dass f *eine vertikale Asymptote hat für* $x \to a$.

Bemerkung 10.8.1 *Auch kann man bloß von einer Seite kommen. Man sagt* ∞ *ist der uneigentliche Limes von* f *für* x *von oben nach* a, *notiert als*

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty,$$

wenn

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists\delta > 0 :\ 0 < x-a < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

Auch hier sagt man f *hat eine vertikale Asymptote für* $x \to a$. *Ebenso kann man* $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) = -\infty$ *und* $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) = -\infty$ *definieren.*

Beispiel 10.9 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ *gilt* $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$. *Denn für* $x \in (0, \delta_N)$ *mit* $\delta_N = N^{-1}$ *hat man*

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} > N.$$

10.2.3 Schiefe Asymptoten

Definition 10.10 *Sei die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben. Man sagt, dass* f *eine schiefe Asymptote* $ax + b$ *hat für* $x \to \infty$, *wenn*

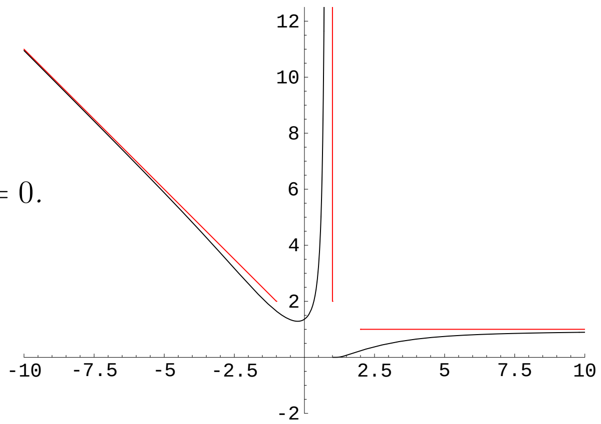
$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (ax+b)| = 0.$$

Beispiel 10.11 *Die Funktion* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ *hat* $1+x$ *als schiefe Asymptote für* $x \to \infty$. *Denn für* $x > N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ *hat man*

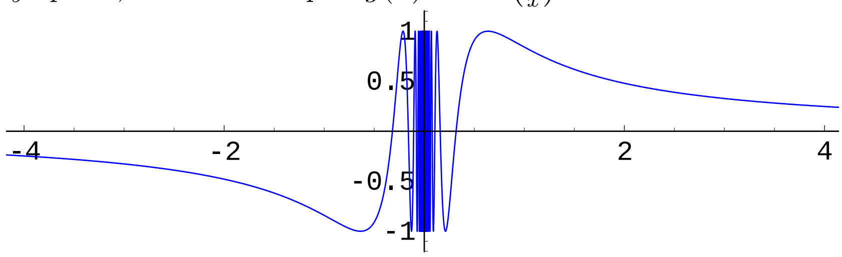
$$\left|\frac{x^2+x+1}{x} - (1+x)\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

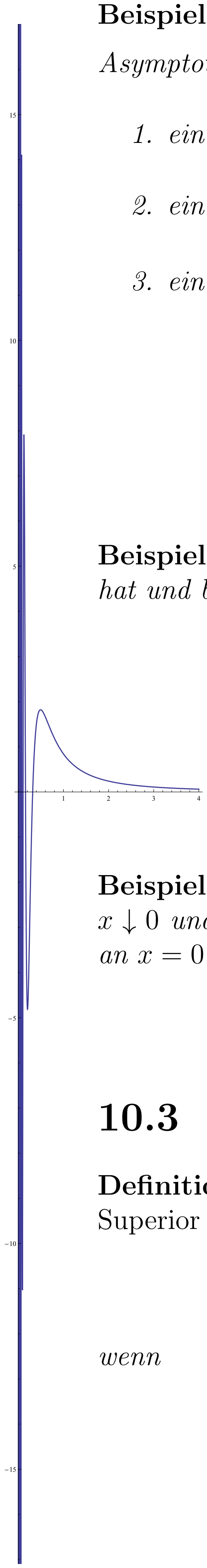
Beispiel 10.12 *Die Funktion* $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \dfrac{\exp(x)-x}{\exp(x)+1}\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$ *hat drei Asymptoten:*

1. *eine horizontale:* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$;
2. *eine vertikale:* $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = \infty$;
3. *eine schiefe:* $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - (-x+1)| = 0.$



Beispiel 10.13 *Eine Funktion, die definiert ist auf* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, *die keinen Limes für* $x \to 0$ *hat und bei* 0 *auch keine Asymptote, ist zum Beispiel* $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.





Beispiel 10.14 *Die Funktion* $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *hat keinen Limes für* $x \downarrow 0$ *und also keine Asymptote bei* 0. *In einer Skizze scheint diese Funktion sich jedoch an* $x = 0$ *zu schmiegen.*

10.3 Erweiterungen von Limes und Stetigkeit

Definition 10.15 *Sei die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann sagt man* ℓ *ist der* Limes Superior *von* f *für* x *nach* a, *notiert als*

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{0<|x-a|<\varepsilon} f(x)\right) = \ell.$$

Definition 10.16 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der* Limes Inferior *von f für x nach a, notiert als*

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\inf_{0<|x-a|<\varepsilon} f(x) \right) = \ell.$$

Man kann sich selbst überlegen, wie man $\limsup\limits_{x \downarrow a} f(x)$ oder $\liminf\limits_{x \to -\infty} f(x)$ vernünftig definiert.

Beispiel 10.17 $\limsup\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x}) = 1$ *und* $\liminf\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x}) = -1$.

Definition 10.18 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt f* oberhalb stetig *in a, wenn*

$$\limsup_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Die Funktion f heißt in a, wenn

$$\liminf_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Bemerkung 10.18.1 *Man kann selbstverständlich auch rechts-unterhalb stetig usw. definieren.*

10.4 Folgen der Stetigkeit

Theorem 10.19 (Nullstellensatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit*

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit $f(x) = 0$.

Es gibt sogar eine erste Nullstelle $x_1 \in (a,b)$ und eine letzte Nullstelle $x_2 \in (a,b)$. Das heißt: $a < x_1 \leq x_2 < b$ und

$$\begin{array}{ll} f(x) < 0 & \text{für } x \in [a, x_1), \\ f(x) = 0 & \text{für } x = x_i \text{ mit } i \in \{1,2\}, \\ f(x) > 0 & \text{für } x \in (x_2, b]. \end{array}$$

Beweis. Setze $A = \{x \in [a,b]\,; f(x) \geq 0\}$. Weil A nicht leer ist, denn $b \in A$, und A nach unten beschränkt ist, existiert $m := \inf\{x \in A\}$ in $\mathbb{R}$ wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Wir werden nun zeigen, dass $m \in (a,b)$ die erste Nullstelle ist von f in $[a,b]$. Das bedeutet $m > a$, $m < b$, $f(m) = 0$ und $f < 0$ in $[a,m)$.

- Weil $f(a) < 0$, gibt es zu $\varepsilon = -f(a)$ ein $\delta > 0$ derart, dass für $x \in [a, a+\delta)$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Daraus folgt

  $$f(x) \leq |f(x) - f(a)| + f(a) < \varepsilon + f(a) = 0 \text{ für } x \in [a, a+\delta).$$

  Also gilt $m \geq a + \delta > a$.

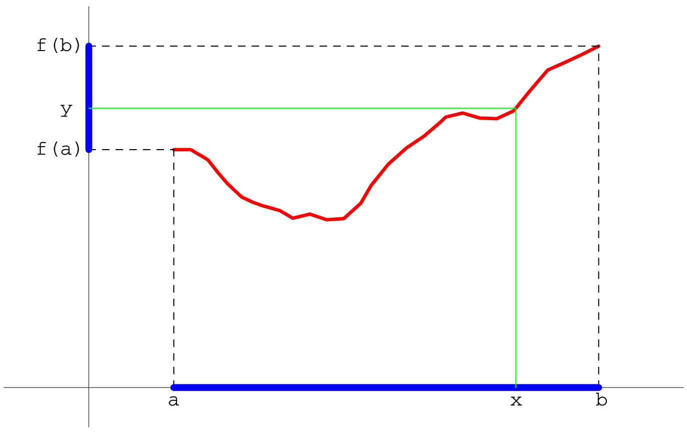
- Weil $f(b) > 0$, gibt es zu $\varepsilon = f(b)$ ein $\delta > 0$ derart, dass für $x \in (b-\delta, b]$ gilt $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Daraus folgt
$$f(b - \tfrac{1}{2}\delta) \geq f(b) - \left|f(b - \tfrac{1}{2}\delta) - f(b)\right| > f(b) - \varepsilon = 0.$$
Also $b - \frac{1}{2}\delta \in A$ und $m \leq b - \frac{1}{2}\delta < b$.

- Weil $m := \inf\{x \in A\}$ gibt es $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ mit $a_n \to m$ für $n \to \infty$. Weil f stetig ist und $f(a_n) \geq 0$ gilt, folgt
$$f(m) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0.$$
Denn wenn $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell < 0$, findet man einen Widerspruch zu der Stetigkeit von f indem man $\varepsilon = -\ell/2$ nimmt.

- Weil $\left\{m - \frac{1}{n}\right\}_{n=0}^{\infty} \notin A$ und $m - \frac{1}{n} > a$ für n genügend groß ist, ist $f(m - \frac{1}{n})$ wohldefiniert und es gilt $f(m - \frac{1}{n}) < 0$. Wegen der Stetigkeit folgt
$$f(m) = \lim_{n\to\infty} f\left(m - \frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

Also gilt $m \in (a, b)$ und $f(m) = 0$ und die Definition von A liefert $f < 0$ in $[a, m)$. Das heißt, m ist die erste Nullstelle von f in (a, b). Auf ähnliche Art gibt es auch eine letzte Nullstelle x_2 in (a, b). ■

Korollar 10.20 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = y$.*



Beweis. Verwende den Nullstellensatz für $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit entweder $g(x) = f(x) - y$ oder $g(x) = y - f(x)$. ■

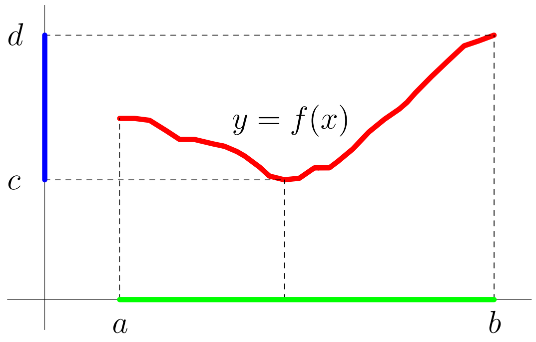
Theorem 10.21 (Weierstraß) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit*
$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \text{ für alle } x \in [a, b].$$
Anders gesagt: auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall nimmt eine stetige Funktion f ihr Minimum und Maximum an.

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $[a,b]$ mit $f(x_n) \to \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Wegen des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Theorem 5.24) hat $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ einen Häufungswert in $\mathbb{R}$. Das heißt, es gibt eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ und weil $[a,b]$ abgeschlossen ist, gilt $\tilde{x} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$. Weil f stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}) \in \mathbb{R}$. Also gilt $\sup\{f(x); x \in [a,b]\} = f(\tilde{x})$ und weil $f(\tilde{x})$ das Supremum liefert, gilt für alle $x \in [a,b]$, dass

$$f(x) \leq f(\tilde{x}) = \max\{f(x); x \in [a,b]\}.$$

Man nehme $x_{\max} = \tilde{x}$.

Ebenso zeigt man, dass es $x_{\min}$ gibt. ■



Korollar 10.22 *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $[c,d] = \{f(x); x \in [a,b]\}$.*

Beweis. Man kombiniere Theorem 10.21 und den Zwischenwertsatz. ■

Analysis 1, Woche 11

Differentialrechnung I

11.1 Ableitung einer Funktion

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ findet man als Graph der Funktion $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\ell(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Man berechnet direkt, dass $\ell(a) = f(a)$ und $\ell(b) = f(b)$, und weil ℓ die Form $\ell(x) = c_1 x + c_2$ hat mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ist der Graph einer Gerade. Man findet auch, dass $c_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Richtungskoeffizient ist.

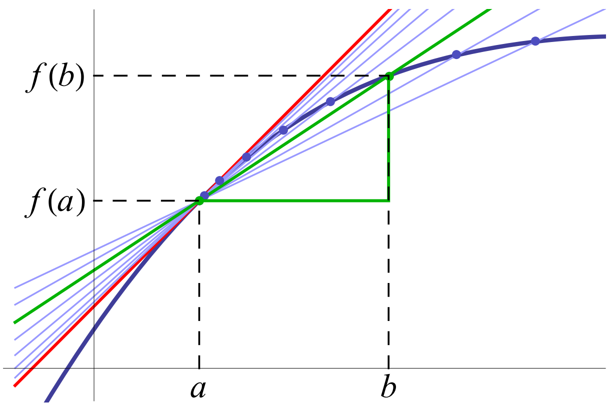


Abbildung 11.1: Approximation einer Tangente

Wenn man nun b immer näher an a nimmt, sieht es aus, als ob die zugehörige Gerade sich der Tangente nähert. Das heißt, wenn

$$c := \lim_{b \downarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{11.1}$$

existiert, dann müßte die Funktion $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\ell(x) = c(x - a) + f(a)$$

die Tangente an f an der Stelle $(a, f(a))$ beschreiben. Im nächsten Bild ist dies dargestellt.

Wenn man so vorgeht, dann soll der Grenzwert in (11.1) existieren. Dazu definiert man folgendes.

Definition 11.1 *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $a \in I$, wenn*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existiert in } \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Man schreibt $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und nennt $f'(a)$ die Ableitung von f in a.

Bemerkung 11.1.1 *Wenn man eine Funktion f von (Teilmengen von) $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ betrachtet, dann heißt f differenzierbar in $a \in I$, wenn $(x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))) : I \to \mathbb{R}$ und $(x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))) : I \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar in a sind.*

Bemerkung 11.1.2 *Wenn man Funktionen von (Teilmengen von) $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ betrachtet, dann wird die Definition wie folgt. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und B eine Umgebung von α. Die Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $\alpha \in B$, wenn*

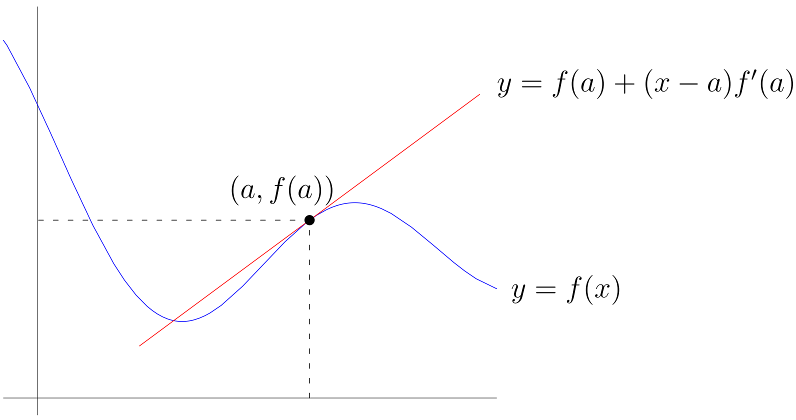
$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \text{ existiert in } \mathbb{C}.$$

Bei komplex differenzierbar muss der Limes von „allen Richtungen" genommen werden, man kann also erwarten, dass komplex differenzierbar eine „schwerere Bedingung" ist als differenzierbar. Dies ist auch so, aber das werden wir hier nicht weiter besprechen. Der genaue Unterschied wird bei 'Funktionentheorie' deutlich werden.

Bemerkung 11.1.3 *Nehmen wir an, dass a und I wie in Definition 11.1 sind. Dann ist (11.2) gleichwertig zu:*

$$\text{es gibt } c \in \mathbb{R} \text{ derart, dass } \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (c\,(x-a) + f\,(a))}{x-a} = 0. \tag{11.3}$$

Man sieht direkt, dass $c = f'(a)$ gilt. Die Formel in (11.3) kann man leicht veranschaulichen. Die Funktion $x \mapsto c\,(x-a) + f\,(a)$ beschreibt die Tangente zu f an der Stelle a. „Der Limes in (11.3) gleich null" heißt, dass wenn man die vertikale Distanz zwischen f und ihrer Tangente vergleicht mit der horizontalen Entfernung von a, diese vertikale Distanz wesentlich schneller kleiner wird als die horizontale Entfernung (wenn man über die Grafik zu $(a, f(a))$ läuft).



Eine Funktion und ihre Tangente in a.

Definition 11.2 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $[a, a+\varepsilon) \subset I$ für irgendein $\varepsilon > 0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* rechtsdifferenzierbar *in $a \in I$, wenn*

$$f'_+(a) := \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existiert in } \mathbb{R}.$$

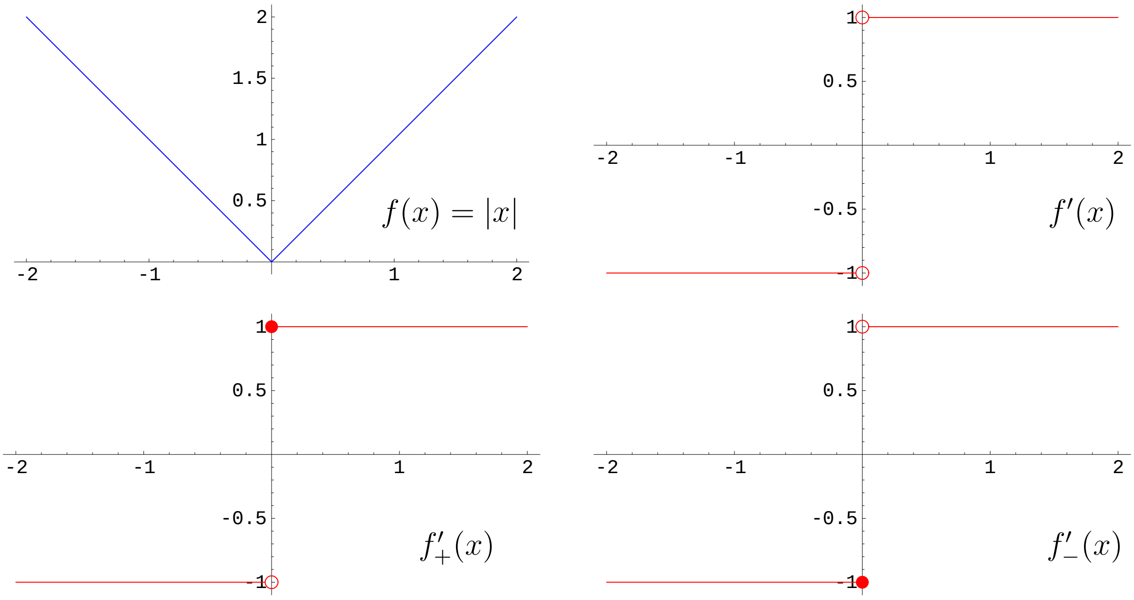
Sei $a \in \mathbb{R}$ und I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $(a-\varepsilon, a] \subset I$ für irgendein $\varepsilon > 0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt linksdifferenzierbar *in $a \in I$, wenn*

$$f'_-(a) := \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert in } \mathbb{R}. \tag{11.4}$$

Beispiel 11.3 *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ hat man*

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0, \\ \text{existiert nicht für } x = 0, \\ -1 \text{ für } x < 0; \end{cases}$$

$$f'_+(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0, \\ -1 \text{ für } x < 0; \end{cases} \quad \text{und} \quad f'_-(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0, \\ -1 \text{ für } x \leq 0; \end{cases}$$



Theorem 11.4 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in (a, b)$.*

1. *Wenn $f'(c) > 0$, dann gibt es $\delta > 0$, so dass* $\begin{cases} f(x) > f(c) \text{ für } x \in (c, c+\delta), \\ f(x) < f(c) \text{ für } x \in (c-\delta, c). \end{cases}$

2. *Wenn $f'(c) < 0$, dann gibt es $\delta > 0$, so dass* $\begin{cases} f(x) < f(c) \text{ für } x \in (c, c+\delta), \\ f(x) > f(c) \text{ für } x \in (c-\delta, c). \end{cases}$.

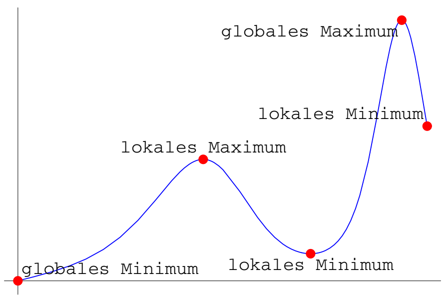
3. *Wenn f ein (lokales) Extremum*[1] *hat in c, dann gilt $f'(c) = 0$.*

Bemerkung 11.4.1 *Die letzte Aussage ist bekannt als das* Kriterium von Fermat *für ein Extremum.*

---

[1]Sei I ein Intervall.

- Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein globales Maximum in $c \in I$, wenn $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in I$.
- Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Maximum in $c \in I$, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.
- Ähnlich definiert man ein globales und ein lokales Minimum.



Beweis. Sei $f'(c) > 0$ und nimm $\varepsilon = f'(c)$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass für $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

und dann auch

$$0 = f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon$$

und die erste Behauptung. Die zweite folgt auf ähnliche Art. Die Logische Umkehrung von einer Folge der ersten beiden: „$f'(c) \neq 0$“ $\Rightarrow$ „f hat kein Extremum in c“, und Existenz von $f'(c)$ gibt die dritte Behauptung. ■

11.2 Höhere Ableitungen

Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) differenzierbar ist in einer Umgebung von a, dann kann man $f' : B_r(a) \to \mathbb{R}$ (oder $f' : B_r(a) \to \mathbb{C}$) als selbständige Funktion betrachten und von dieser Funktion f' wieder die Differenzierbarkeit betrachten.

Definition 11.5 *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und setze $f^{(1)} = f'$. Nehme an, dass für $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$ in $B_r(a)$ die ersten $n-1$ Ableitungen $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ in $B_r(a)$ existieren. Dann sagt man f ist n mal differenzierbar in a, wenn die n-te Ableitung*

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

existiert.

Bemerkung 11.5.1 *Man schreibt auch $f'' = f^{(2)}$ und $f''' = f^{(3)}$ usw. Manchmal werden auch römische Ziffern benutzt.*

Bemerkung 11.5.2 *Wenn die n-te Ableitung auch noch stetig ist, sagt man f ist n mal stetig differenzierbar.*

Es sei noch bemerkt, dass um f' bei a differenzieren zu können, es nicht reicht f' nur in a zu haben. Um eine Ableitung in a betrachten zu können, muss die betreffende Funktion in einer Umgebung von a definiert sein. Das heißt, wenn wir $f''(a)$ berechnen möchten, dann soll f' bekannt sein in einer Umgebung von a.

Beispiel 11.6 *Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x\,|x|$ ist einmal stetig differenzierbar in 0:*

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2\,|x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \\
g''(x) &= \begin{cases} 2 \text{ für } x > 0, \\ -2 \text{ für } x < 0, \\ \text{existiert nicht in } 0, \end{cases} \\
\text{und für } n \geq 2: & \\
g^{(n)}(x) &= \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq 0, \\ \text{existiert nicht in } 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}^+$ kann man verwenden, dass $g(x) = x^2$ auf (a,b) und g die Standardableitungen hat. Ähnlich hat man für $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}^-$, dass $g(x) = -x^2$. Bei $x = 0$ muss man zurück zur Definition:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,|x| - 0\,|0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Die zweite Ableitung in 0 existiert nicht, denn

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\,|x| - 0}{x - 0} = 2, \\ \lim_{x\uparrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{2\,|x| - 0}{x - 0} = -2. \end{aligned}$$

11.3 Differenzierbarkeit liefert Stetigkeit

Lemma 11.7 *Sei $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in (c,d)$. Wenn f differenzierbar ist in a, dann ist f stetig in a.*

Bemerkung 11.7.1 *Auch gilt, dass wenn f rechts(links)differenzierbar ist in a, dann ist f rechts(links)stetig in a.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 10.1 3:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a} (x - a) = f'(a)\,(a - a) = 0. \end{aligned}$$

■

Beispiel 11.8 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist (siehe Beispiel 11.3)*

1. *stetig auf $\mathbb{R}$;*
2. *differenzierbar auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ und nicht differenzierbar in 0;*
3. *rechtsdifferenzierbar und linksdifferenzierbar auf $\mathbb{R}$!*

Definition 11.9 *Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig in $a \in I$, wenn es $L \in \mathbb{R}^+$ und eine Umgebung $(a - \delta, a + \delta)$ gibt derart, dass*

$$|f(x) - f(a)| \le L\,|x - a| \text{ für alle } x \in I \cap (a - \delta, a + \delta)\,.$$

L heißt eine Lipschitz-Konstante bezüglich f in a.

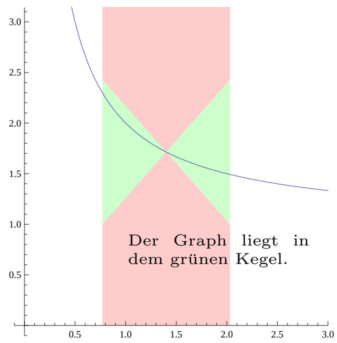
Bemerkung 11.9.1 *Lipschitz-Stetigkeit gibt Stetigkeit. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $\delta = L^{-1}\varepsilon$.*

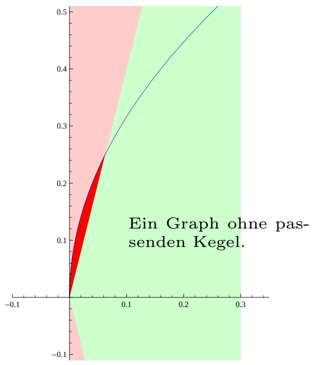
Definition 11.10 *Die Funktion f erfüllt die Lipschitz-Bedingung auf dem Intervall I mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}$, wenn*

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \text{ für alle } x, y \in I.$$

Beispiel 11.11 *Die Funktion* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ *ist Lipschitz-stetig in jedem* $a > 0$. *Denn setzen wir* $L = \frac{2}{a^2}$, *gilt*

$$\left| \left(\frac{1}{x} + 1 \right) - \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \right| = \frac{|a - x|}{ax} \leq \frac{|x - a|}{\frac{1}{2}a^2} = L\,|x - a| \text{ für } x \in \left(\tfrac{1}{2}a, \tfrac{3}{2}a\right).$$





Beispiel 11.12 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \sqrt{x}$ *ist nicht Lipschitz-stetig in* 0:

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{0} \right| = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,|x - 0|$$

und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *ist nicht beschränkt für* $x \to 0$.

Lemma 11.13 *Sei* I *ein Intervall in* $\mathbb{R}$. *Wenn* f *differenzierbar ist in* $a \in I$, *dann ist* f *Lipschitz-stetig in* a.

Beweis. Weil $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert, ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ beschränkt auf einer punktierten Umgebung von a. Jede solche Schranke kann man als Lipschitz-Konstante nehmen. ■

11.4 Ableitungsregeln

Lemma 11.14 *Seien* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen und* $a \in \mathbb{R}$, *so gilt:*

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. $(f\ g)'(a) = f'(a)\ g(a) + f(a)\ g'(a)$ *(Produktregel);*
3. *wenn* $g(a) \neq 0$, *dann* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\ g(a) - f(a)\ g(a)'}{g(a)^2}$ *(Quotientenregel);*
4. $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\ g'(a)$ *(Kettenregel).*

Bemerkung 11.14.1 *Die genaue Aussage bei* $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ *ist wie folgt: Wenn* f *und* g *differenzierbar sind in* a, *dann ist auch die Funktion* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) = f(x) + g(x)$ *differenzierbar in* a *und außerdem gilt* $h'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Bemerkung 11.14.2 *Übrigens braucht man für 1, 2 und 3 nur, dass* f *und* g *in einer Umgebung von* a *definiert sind und dass sie in* a *differenzierbar sind. Für die Kettenregel braucht man, dass* f *in einer Umgebung von* $g(a)$ *definiert ist und in* $g(a)$ *differenzierbar ist. Selbstverständlich soll* g *wie vorhin sein.*

Bemerkung 11.14.3 *Identische Regeln gelten für differenzierbare Funktionen von (Teilmengen von)* $\mathbb{C}$ *nach* $\mathbb{C}$.

Beweis. Die erste Aussage ist eine sofortige Folge von Lemma 10.1 2. Für die zweite Aussage verwenden wir

$$\frac{(f\ g)(x)-(f\ g)(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Lemma 10.1 2 und 3, und Lemma 11.7

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)= \\ =\ &\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}= \\ =\ &f'(a)\ g(a)+f(a)\ g'(a). \end{aligned}$$

Für die dritte Aussage

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\frac{f(x)\ g(a)-f(a)\ g(x)}{g(a)g(x)\,(x-a)}= \\ =\ &\frac{1}{g(a)g(x)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \end{aligned}$$

und wiederum Lemma 10.1.

Den Beweis der Kettenregel spalten wir auf. 1) Wenn $g'(a)\neq 0$, dann gilt für $|x-a|<\delta$, mit δ genügend klein gewählt, dass $g(x)\neq g(a)$. Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n\to a$, dann folgt aus der Stetigkeit von g, dass $y_n=g(x_n)\to g(a)$. Dann kann man

$$\frac{f(g(x_n))-f(g(a))}{x_n-a}=\frac{f(y_n)-f(g(a))}{y_n-g(a)}\frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a}$$

schreiben und weil $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(g(a))}{y_n-g(a)}=f'(g(a))$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a}=g'(a)$ gilt, folgt so das Ergebnis.

2) Wenn $g'(a)=0$, verwenden wir Lemma 11.13, nämlich dass f die Lipschitzbedingung in $g(a)$ erfüllt:

$$\left|\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}\right|\leq L\left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right|$$

und $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)=0$ liefert das Ergebnis. ■

11.5 Potenzreihen ableiten

Ableitungen von Polynomen sind in der Schule ausgiebig behandelt worden. Als Auffrischung:
Sei $c\in\mathbb{R}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=c$, dann gilt

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{c-c}{y-x}=\lim_{y\to x}0=0. \tag{11.5}$$

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x$, dann gilt

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{y-x}{y-x}=\lim_{y\to x}1=1. \tag{11.6}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ und $n \in \mathbb{N}^+$, dann gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{11.7}$$

Um (11.7) zu beweisen, benutzen wir Lemma 11.14 und vollständige Induktion. Wir haben $(x^1)' = 1 = 1x^{1-1}$. Angenommen $(x^n)' = nx^{n-1}$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \left(x^{n+1}\right)' &= (x\ x^n)' = (x)'\,(x^n) + (x)\,(x^n)' = \\ &= 1\ x^n + x\ nx^{n-1} = (n+1)\,x^n. \end{aligned}$$

Wiederum mit Lemma 11.14 folgt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ und $a_i \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1}. \tag{11.8}$$

Wenn man genau hinschaut sieht man, dass auch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ und $a_i \in \mathbb{C}$ die Ableitung $f'(x)$ in (11.8) hat.

Wir werden zeigen, dass innerhalb des Konvergenzradius Funktionen, die durch eine Potenzreihe definiert sind, eine ähnlich aussehende Ableitung besitzen.

Theorem 11.15 *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Dann ist $f(x) : B_R(0) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (und auch $B_R(0) \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar) und*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \text{ für } x \in B_R(0). \tag{11.9}$$

Beweis. Erstens zeigen wir, dass die Formel in (11.9) auch Konvergenzradius R hat. Man bemerke, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$$

den gleichen Konvergenzradius haben. Das Wurzelkriterium gibt Konvergenzradius R_1 mit „$R_1 \ell_1 = 1$“ und

$$\ell_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n x^n|}.$$

Man hat

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell$$

und das letztere gehört zu dem Konvergenzradius von f via „$R\ell = 1$“.

Jetzt werden wir zeigen, dass f die besagte Ableitung hat. Das heißt, sei $|y| < R$, dann müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to y} \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right| = 0. \tag{11.10}$$

Wir nehmen $\delta = \frac{1}{2}(R - |y|)$. Für $|x - y| < \delta$ hat man $|x| < R$ und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$. Weil auch noch die Terme für $n = 0, 1$ gleich Null sind, dürfen wir (11.10) ersetzen durch

$$\lim_{x\to y} \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{x^n - y^n}{x - y} - nx^{n-1} \right) \right| = 0. \tag{11.11}$$

Lemma 11.16 *Für $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$\left| \frac{x^n - y^n}{x - y} - nx^{n-1} \right| \leq \tfrac{n(n-1)}{2} |y - x| \max\left(|x|, |y|\right)^{n-2}. \tag{11.12}$$

Beweis. Für $n = 2$ gilt $\left|\frac{x^n - y^n}{x-y} - nx^{n-1}\right| = \left|\frac{(x-y)(x+y)}{x-y} - 2x\right| = |y - x|$ und die Behauptung stimmt. Angenommen (11.12) gilt für n. Dann folgt

$$\left| \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} - (n+1)\, x^n \right| = \left| \frac{x^n (x-y) + y (x^n - y^n)}{x - y} - nx^{n-1}y + nx^{n-1}(y - x) - x^n \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{y (x^n - y^n)}{x - y} - nx^{n-1}y + nx^{n-1}(y - x) \right| \leq \\
&\leq |y| \left| \frac{x^n - y^n}{x - y} - nx^{n-1} \right| + n |x|^{n-1} |y - x| \leq \\
&\leq \tfrac{n(n-1)}{2} |y - x| \max\left(|x|, |y|\right)^{n-2} |y| + n |y - x| |x|^{n-1} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\tfrac{n(n-1)}{2} + n \right) |y - x| \max\left(|x|, |y|\right)^{n-1} = \tfrac{(n+1)n}{2} |y - x| \max\left(|x|, |y|\right)^{n-1},$$

und Lemma 11.16 ist mit vollständiger Induktion bewiesen. ■

Wir setzen den Beweis vom Theorem 11.15 fort. Mit der Hilfe dieses Lemmas folgt (11.11), wenn

$$\lim_{x \to y} |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} \max\left(|x|, |y|\right)^{n-2} = 0. \tag{11.13}$$

Weil $\max\left(|x|, |y|\right) < R - \delta$ gilt

$$|a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} \max\left(|x|, |y|\right)^{n-2} \leq |a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} (R - \delta)^{n-2}$$

und weil $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} (R - \delta)^{n-2}$ konvergiert: innerhalb des Konvergenzradius konvergiert die Reihe absolut. Im ersten Teil des Beweises sahen wir, dass der Konvergenzradius sich nicht ändert, wenn man einen Faktor n einfügt. Dieses Argument wiederholend kann man auch n^2 oder $n(n-1)$ einfügen, ohne dass sich der Konvergenzradius ändert. Also gibt es eine Schranke M_δ für $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \max\left(|x|, |y|\right)^{n-2}$ für alle $|x|, |y| \leq R - \delta$. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right| = \\
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x^n - y^n}{x - y} - nx^{n-1} \right) \right| \leq \\
&\leq |y - x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} \max\left(|x|, |y|\right)^{n-2} \leq M_\delta |y - x|
\end{aligned}$$

und der Limes für $x \to y$ ist gleich 0. ■

Man kann das gleiche Ergebnis verwenden, um zu zeigen, dass innerhalb des Konvergenzradius auch f' differenzierbar ist.

Korollar 11.17 *Innerhalb des Konvergenzradius ist eine Potenzreihe beliebig oft differenzierbar. Außerdem gilt für die n-te Ableitung von $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, dass $f^{(n)}(0) = n! a_n$.*

11.6 Spezielle Potenzreihen

11.6.1 Exponentialfunktion

Wir haben die Exponentialfunktion definiert in Definition 8.5 als eine Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

und in Lemma 8.6 sahen wir, dass sie mit Konvergenzradius ∞ hat. Wegen Theorem 11.15 gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \exp(x).$$

Lassen Sie uns noch einige Regeln für diese Funktion ableiten.

In Lemma 8.7 sahen wir, dass $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$, und deswegen finden wir

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n \text{ für } x \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N}. \tag{11.14}$$

Für $x \in \mathbb{R}^+$ folgt $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n > 0$ und mit $\exp(-x)\exp(x) = \exp(0) = 1$ bekommen wir

$$\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{11.15}$$

Weil $y^m = a \in \mathbb{R}^+$ mit $m \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist in $\mathbb{R}^+$, und diese Lösung $y = \sqrt[m]{a}$ ist, finden wir für $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^+$ aus

$$\left(\exp(\frac{n}{m})\right)^m = \exp(n) = (\exp(1))^n,$$

dass

$$\exp(\frac{n}{m}) = \exp(1)^{\frac{n}{m}}. \tag{11.16}$$

Definition 11.18 *$e = \exp(1)$.*

Für alle $q \in \mathbb{Q}$ haben wir also

$$\exp(q) = e^q.$$

Weil $(x \mapsto \exp(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, also auch stetig ist, ist

$$e^x := \exp(x)$$

eine vernünftige Definition. Wir werden sogar e^z definieren:

Definition 11.19 *$e^z = \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.*

Wir finden

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) = e^z e^w, \\ e^{nz} &= \exp(nz) = (\exp(z))^n = (e^z)^n, \end{aligned}$$

und e^z bringt tatsächlich die Rechenregel die man erwartet.

11.6.2 Trigonometrische Funktionen

Auf Seite 26 haben wir kurz wiederholt, wie die Sinus- und Cosinusfunktion geometrisch definiert sind. Wir wollen hier eine analytische Definition geben und anschließend zeigen, dass diese neue Definition tatsächlich die gleichen Eigenschaften hat wie die altbekannten Funktionen.

Definition 11.20 *Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann setzt man:*

- $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ *;*
- $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Bemerkung 11.20.1 *Weil die Potenzreihe bei der Exponentialfunktion Konvergenradius ∞ hat, kann man auch* sin *und* cos *als Potenzreihe schreiben für alle $z \in \mathbb{C}$ (und also auch für $x \in \mathbb{R}$):*

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iz)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iz)^n\right) = \frac{1}{2i}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ ungerade}}}^{\infty}\frac{2}{n!}i^n z^n = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)!}i^{2k+1}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} \qquad (11.17)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iz)^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ gerade}}}^{\infty}\frac{2}{n!}i^n z^n = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}i^{2k}z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}. \qquad (11.18)\end{aligned}$$

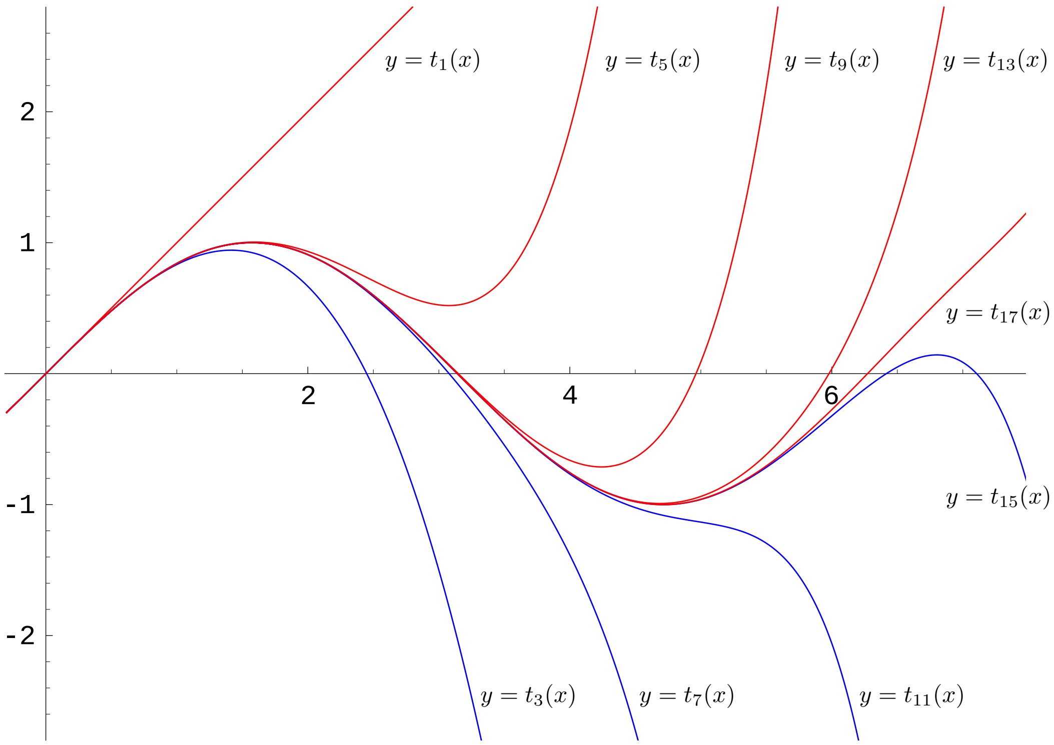
Die Sinus und Cosinus aus Definition 11.20 erfüllen Folgendes:

1. Sie sind reell für $x \in \mathbb{R}$, denn die Koeffizienten in (11.17) und (11.18) sind reell. Es gilt sogar
$$\sin(0) = 0 \text{ und } \cos(0) = 1.$$
Außerdem ist der Sinus ungerade und der Cosinus gerade:
$$\sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

2. Sie erfüllen
$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1, \qquad (11.19)$$
denn
$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2ix} - 2e^0 + e^{-2ix}}{-4} + \frac{e^{2ix} + 2e^0 + e^{-2ix}}{4} = 1.$$

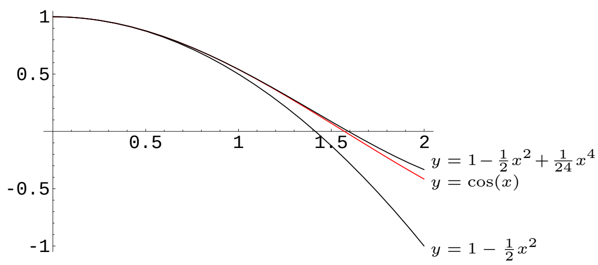
3. Es gilt
$$\sin'(x) = \cos(x), \tag{11.20}$$
denn aus (11.17) und (11.9) folgt
$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1)\, x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos(x).$$
Ebenso gilt
$$\cos'(x) = -\sin(x), \tag{11.21}$$
denn
$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k\ z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = -\sin(x). \end{aligned}$$

4. Es gilt
$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), & (11.22)\\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). & (11.23) \end{aligned}$$
Man beweist diese Aussagen mit Hilfe von Definition 11.20, $e^{a+b} = e^a e^b$ und sorgfältigem Rechnen.



Hier oben stehen Skizzen zu $y = t_{2m+1}(x)$, wobei die t_{2m+1} die Polynomen darstellen, die man bekommt, wenn man in der Potenzreihe für den Sinus nur die Terme bis zu Grad $2m+1$ nimmt:
$$t_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

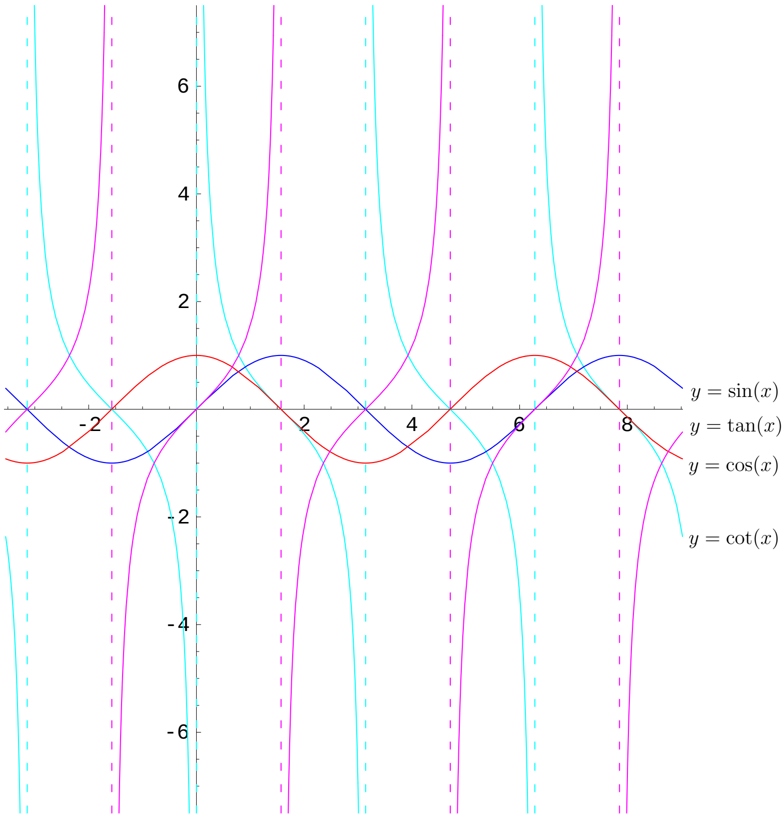
5. Die Terme in der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$ sind für $x > 0$ alternierend, und weil die Folge $\left\{ \frac{1}{(2m)!} x^{2m} \right\}_{m=0}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{4!}x^4, \frac{1}{6!}x^6, \dots \right\}$ ab $m = 1$ monoton fällt wenn $x^2 < 12$, folgt daraus, wie beim Kriterium von Leibniz, dass
$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 \leq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 \leq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8 - \tfrac{1}{10!}x^{10} \leq \dots$$
$$1 \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8 \geq \dots \quad \text{für } x^2 < 12$$
und
$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 < \cos(x) < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 \text{ für } x \in \left(0, \sqrt{12}\right).$$
Weil $1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$ für $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ und weil $\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right]_{x=2} = -\frac{1}{3} < 0$ hat der Cosinus wegen Theorem 10.19 eine erste positive Nullstelle zwischen $\sqrt{2}$ und 2. Diese erste positive Nullstelle vom Cosinus definiert man als $\frac{1}{2}\pi$.



Aus (11.19) folgt $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \pm 1$.
Ebenso kann man die alternierende Folge in der Sinusreihe benutzen um folgende Abschätzung zu finden:
$$x - \tfrac{1}{6}x^3 < \sin(x) \text{ für } x \in \left(0, \sqrt{20}\right).$$
Mit
$$\begin{aligned} x - \tfrac{1}{6}x^3 &\geq 1 - \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{3}{2}\right)^3 = \tfrac{7}{16} && \text{auf } \left[1, \tfrac{3}{2}\right] \\ x - \tfrac{1}{6}x^3 &\geq \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{6}(2)^3 = \tfrac{1}{6} && \text{auf } \left[\tfrac{3}{2}, 2\right] \end{aligned}$$
hat man $\sin(x) > 0$ auf $[1, 2]$, und weil $1 < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi < 2$ gilt, folgt
$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1. \tag{11.24}$$

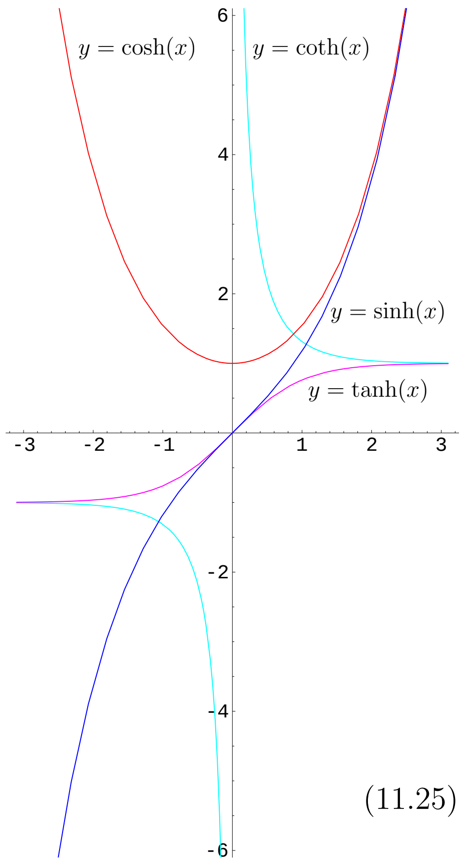
6. Aus (11.22) folgt
$$\sin(\pi) = 2\cos(\tfrac{1}{2}\pi)\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = 0,$$
und mit (11.24)
$$\begin{aligned} \sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \sin(x)\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \cos(x)\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = \cos(x), \\ \sin\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \sin(x)\cos(\tfrac{1}{2}\pi) - \cos(x)\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = -\cos(x), \end{aligned}$$
und anschließend
$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= \cos\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= -\sin(x + \pi) = \sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \sin\left(x + \tfrac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x), \\ \cos(x + 2\pi) &= -\cos(x + \pi) = \cos(x). \end{aligned}$$

Der *Tangens* und der *Cotangens* werden definiert als:
$$\tan : \{z \in \mathbb{C}; \cos(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} \qquad \text{mit } \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$
$$\cot : \{z \in \mathbb{C}; \sin(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} \qquad \text{mit } \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$



11.6.3 Hyperbolische Funktionen

Auch den folgenden Funktionen kann man begegnen.



Definition 11.21 *Sei $z \in \mathbb{C}$. Man setzt:*

- $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ *(Sinus hyperbolicus);*
- $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ *(Cosinus hyperbolicus);*
- $\tanh(z) = \dfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$*;*
- $\coth(z) = \dfrac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$ *für $z \neq 0$.*

Einige Eigenschaften von sinh und cosh:

1. Sie sind reell für $x \in \mathbb{R}$ und es gilt
$$\sinh(0) = 0 \text{ und } \cosh(0) = 1. \tag{11.25}$$
2. Es gilt
$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1, \tag{11.26}$$
3. und
$$\sinh'(x) = \cosh(x) \text{ und } \cosh'(x) = \sinh(x). \tag{11.27}$$

Zwischen sin und sinh, repektive cos und cosh gibt es folgende Identitäten:

$$\sinh(iz) = i\sin(z) \text{ und } \cosh(iz) = \cos(z).$$

Die Funktion Cosinus hyperbolicus taucht auf als Kettenlinie.

Analysis 1, Woche 12

Differentialrechnung II

A1

12.1 Mittelwertsatz und Folgen

Theorem 12.1 (Rolle) *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Nehmen wir an, dass f stetig ist, dass $f_{|(a,b)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

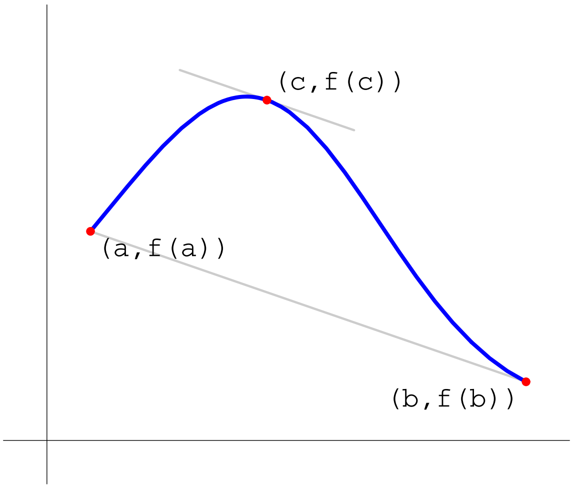
Beweis. Wenn f konstant ist, so gilt sogar für jedes $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{0}{y - x} = 0.$$

Wenn f nicht konstant ist, dann gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. Wenn $f(x_0) > f(a)$, dann hat wegen Theorem 10.21 f ein Maximum in $[a, b]$, sagen wir in x_1, und weil $f(x_0) > f(a) = f(b)$ muss x_1 im Innern des Intervalls liegen, das heißt $x_1 \in (a, b)$. Eine Anwendung von Theorem 11.4 gibt $f'(x_1) = 0$. Für $f(x_0) < f(a)$ geht man ähnlich vor. ■

Theorem 12.2 (Mittelwertsatz) *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Nehmen wir an, dass f stetig ist und dass $f_{|(a,b)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Man betrachte $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es folgt sofort, dass $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

und dass man den Satz von Rolle auf g anwenden kann. ■

Korollar 12.3 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.*

1. *Wenn* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$, *dann ist* f *monoton wachsend auf* (a,b).
2. *Wenn* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a,b)$, *dann ist* f *streng monoton wachsend auf* (a,b).
3. *Wenn* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$, *dann ist* f *monoton fallend auf* (a,b).
4. *Wenn* $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a,b)$, *dann ist* f *streng monoton fallend auf* (a,b).

Beweis. Man nehme $x_1 < x_2$ mit $x_1, x_2 \in (a,b)$ und der Mittelwertsatz gibt $c \in (x_1, x_2)$, so dass

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c).$$

Die Ungleichung für $f'(x)$ liefert die gleiche Ungleichung für $f(x_2) - f(x_1)$. ■

Korollar 12.4 *Sei* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion und* $c \in (a,b)$.

1. *Wenn* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a,c)$ *und* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (c,b)$, *dann hat* f *ein lokales Maximum in* c.
2. *Wenn* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a,c)$ *und* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (c,b)$, *dann hat* f *ein lokales Minimum in* c.

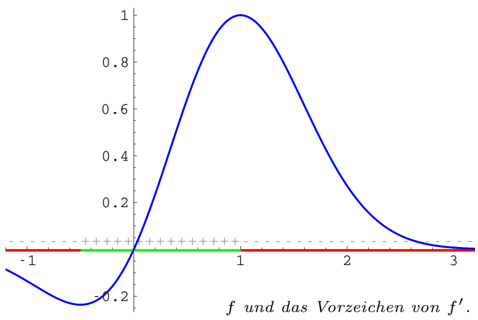
Beispiel 12.5 *Gefragt sind die Extrema der Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x \exp(x - x^2)$. *Man findet*

$$f'(x) = (1 + 2x)(1 - x) \exp\left(x - x^2\right)$$

und bekommt sofort:

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{für } x < -\frac{1}{2} \text{ und für } x > 1, \\ f'(x) > 0 & \text{für } x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right). \end{array}$$

Damit hat f *ein lokales Maximum in* 1 *und ein lokales Minimum in* $-\frac{1}{2}$. *Weil* $f(x) \to 0$ *für* $x \to \pm\infty$ *sind es sogar globale Extrema.*



f und das Vorzeichen von f'.

Mit Hilfe der zweiten Ableitung, wenn sie existiert, kann man oft sehen, ob man es bei $f'(x_0) = 0$ mit einem Minimum oder einem Maximum zu tun hat.

Lemma 12.6 *Sei* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *eine zweimal differenzierbare Funktion und* $x_0 \in (a,b)$.

1. *Wenn* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0$, *dann hat* f *ein (lokales) Minimum in* x_0.
2. *Wenn* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$, *dann hat* f *ein (lokales) Maximum in* x_0.

Beweis. Weil f' differenzierbar ist, ist f' auch stetig. Weil $f''(x_0) > 0$, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x) > f'(x_0) = 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ und $f'(x) < f'(x_0) = 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt wegen des Mittelwertsatzes, dass es $\tilde{x} \in (x_0, x)$ gibt mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\tilde{x}) < 0.$$

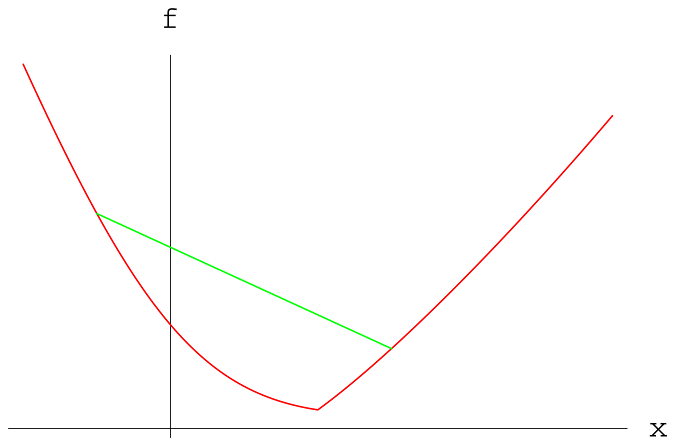
Ebenso gibt es für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ ein $\tilde{x} \in (x, x_0)$ mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\tilde{x}) < 0.$$

Sowohl $x - x_0$ und $f'(\tilde{x})$ sind jetzt negativ. ■

Definition 12.7 *Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt* konvex, *wenn für alle $x, y \in (a, b)$ und $\theta \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\theta x + (1 - \theta) y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta) f(y).$$



Bei einer konvexen Funktion liegt jeder Verbindungsstrich von zwei Punkten auf dem Graphen, oberhalb von (oder auf) diesem Graphen.

Lemma 12.8 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konvex.*

Beweis. Betrachte die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(\theta) = f(\theta x + (1 - \theta) y) - \theta f(x) - (1 - \theta) f(y).$$

Dann gilt $g(0) = g(1) = 0$ und wir müssen zeigen, dass $g(\theta) \leq 0$ gilt für alle $\theta \in (0, 1)$. Man hat

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= (x - y) f'(\theta x + (1 - \theta) y) - f(x) + f(y), \\ g''(\theta) &= (x - y)^2 f''(\theta x + (1 - \theta) y) \geq 0. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Wenn $g(\theta_0) > 0$ wäre, dann gibt es $\theta_1 \in (0, \theta_0)$ mit

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\theta_0) - g(0)}{\theta_0 - 0} = \frac{g(\theta_0)}{\theta_0} > 0$$

und es gibt $\theta_2 \in (\theta_0, 1)$ mit

$$g'(\theta_2) = \frac{g(1) - g(\theta_0)}{1 - \theta_0} = \frac{-g(\theta_0)}{1 - \theta_0} < 0.$$

Dann gibt es auch $\theta_3 \in (\theta_1, \theta_2)$ mit

$$g''(\theta_3) = \frac{g'(\theta_2) - g'(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} < 0,$$

und das ist ein Widerspruch zu (12.1). ■

Bemerkung 12.8.1 *Konvexe Funktionen müssen nicht zweimal differenzierbar sein; sogar nicht mal einmal. Die Funktion $x \mapsto |x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar in 0 und doch konvex.*

12.2 Die Umkehrfunktion

Definition 12.9 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f^{inv} : f(I) \to \mathbb{R}$ eine* Umkehrfunktion *zu f, wenn*

$$f^{inv} \circ f(x) = x \text{ für alle } x \in I.$$

Hier setzt man $f(I) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in I \text{ mit } y = f(x)\}$.

Bemerkung 12.9.1 *Die Umkehrfunktion für f wird auch mit f^{-1} notiert. Das könnte verwirrend sein, denn die Umkehrfunktion zu $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht $x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$!*

Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv ist, zum Beispiel weil f streng monoton ist, dann gibt es eine Umkehrfunktion.

Theorem 12.10 *Sei I ein beliebiges Intervall*[1]*. Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion ist mit $J = \{f(x); x \in I\}$, dann ist J ein Intervall und es gibt eine Umkehrfunktion $f^{inv} : J \to I$. Diese Umkehrfunktion f^{inv} ist stetig und streng monoton.*

Wenn außerdem $\tilde{x} \in I^o$ und f differenzierbar ist in $\tilde{x}$ mit $f'(\tilde{x}) \neq 0$, dann ist f^{inv} differenzierbar in $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ und es gilt

$$\left(f^{inv}\right)'(\tilde{y}) = \frac{1}{f'(\tilde{x})}.$$

Beweis. 1) Die Existenz: Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann ist sie injektiv. Surjektivitität von I zum Wertebereich $J = f(I)$ ist selbstverständlich. Also die Umkehrfunktion $f^{inv} : J \to I$ existiert. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass J ein Intervall ist.

2) Die strenge Monotonie von f^{inv} beweist man auch sofort. Weil f streng monoton ist, sagen wir wachsend, dann gilt für $x_1, x_2 \in I$, dass

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Dies impliziert

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

und weil $\neg(a \leq b)$ identisch zu $a > b$ ist, findet man als die gleichwertige logische Umkehrung:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

Setzt man $x_1 = f^{inv}(y_1)$ und $x_2 = f^{inv}(y_2)$, so folgt

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{inv}(y_1) < f^{inv}(y_2).$$

[1] Mit einem beliebigen Intervall I ist gemeint $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $[a,\infty)$, (a,∞) oder $(-\infty,\infty)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wenn die Randpunkte zum Intervall I gehören, dann nennt man das Intervall abgeschlossen; wenn nicht, dann nennt man es offen. Übrigens, ∞ ist kein Punkt und dann auch kein Randpunkt.

Man kann jedes Intervall abschließen (man schreibt $\bar{I}$) und "öffnen" (man schreibt I^o).

$I:$	$[a,b]$	$(a,b]$	$[a,b)$	(a,b)	$(-\infty,b]$	$(-\infty,b)$	$[a,\infty)$	(a,∞)	$(-\infty,\infty)$
$\bar{I}:$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$(-\infty,b]$	$(-\infty,b]$	$[a,\infty)$	$[a,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$I^o:$	(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	$(-\infty,b)$	$(-\infty,b)$	(a,∞)	(a,∞)	$(-\infty,\infty)$

3) Die Stetigkeit: Sei $b \in J$ und setze $a = f^{inv}(b)$. Wir nehmen an, dass a im Innern von I liegt. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme an, dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \in I$. Sonst betrachten wir $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ mit $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0) \in I$. Wenn f monoton wachsend ist, dann gilt:

$$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \implies f(x) \in \left(f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon)\right).$$

Wenn f monoton fallend ist, dann gilt:

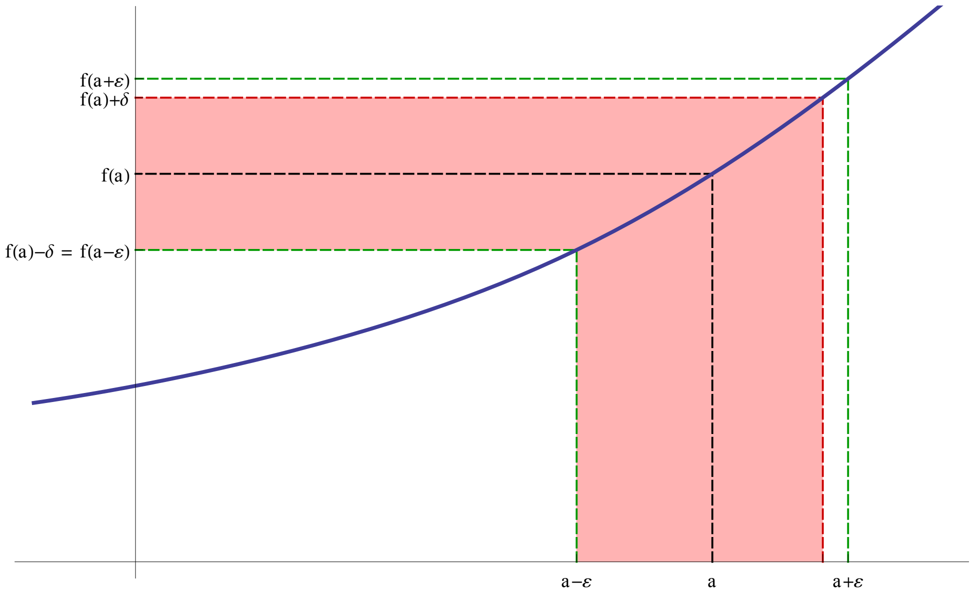
$$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \implies f(x) \in \left(f(a+\varepsilon), f(a-\varepsilon)\right).$$

Wir setzen

$$\delta = \min\left(|f(a) - f(a-\varepsilon)|, |f(a+\varepsilon) - f(a)|\right)$$

und weil f streng monoton ist, gilt $\delta > 0$. Für $|y-b| < \delta$ liegt y zwischen $f(a-\varepsilon)$ und $f(a+\varepsilon)$, und es folgt, dass $f^{inv}(y) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ander gesagt, dass

$$\left|f^{inv}(y) - f^{inv}(b)\right| < \varepsilon.$$



Wenn a ein Randpunkt von I ist, bekommt man das Ergebnis, indem man einseitige Umgebungen benutzt.

4) Die Differenzierbarkeit: Sei $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine beliebige Folge mit $y_n \to \tilde{y}$ und $y_n \neq \tilde{y}$. Setze $x_n = f^{inv}(y_n)$. Dann gilt wegen der Stetigkeit, dass $x_n \to f^{inv}(\tilde{y}) = \tilde{x}$, und wegen der strengen Monotonie, dass $x_n \neq \tilde{x}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f^{inv}(y_n) - f^{inv}(\tilde{y})}{y_n - \tilde{y}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \tilde{x}}{f(x_n) - f(\tilde{x})} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(\tilde{x})}{x_n - \tilde{x}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(\tilde{x})}{x_n-\tilde{x}}} = \frac{1}{f'(\tilde{x})}.\end{aligned}$$

Weil $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine beliebige Folge ist, gilt

$$\lim_{y\to\tilde{y}} \frac{f^{inv}(y) - f^{inv}(\tilde{y})}{y - \tilde{y}} = \frac{1}{f'(\tilde{x})}.$$

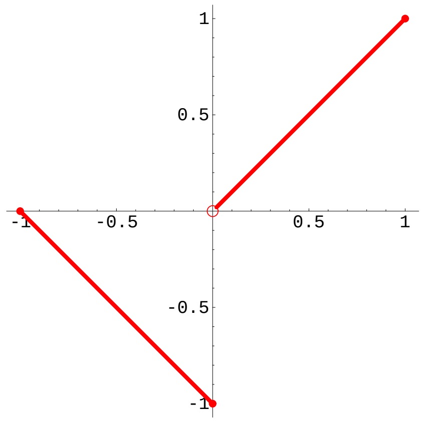
■

Bemerkung 12.10.1

Wenn $f : I \to J$ mit I ein Intervall, eine umkehrbare und stetige Funktion ist, dann ist f monoton. Stetigkeit oder Monotonie sind aber nicht notwendig für die Existenz einer Umkehrfunktion. Betrachte $f : [-1,1] \to [-1,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (0,1]\,, \\ -1-x & \text{für } x \in [-1,1]\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig und nicht monoton. Sie ist aber umkehrbar. Es gilt sogar, dass $f^{inv} = f$.



Beispiel 12.11 *Die Niederländische Polizei wendet den Mittelwertsatz und die Existenz einer Umkehrfunktion an bei einem Typ von Geschwindigkeitskontrollen, der sogenannte „Trajectcontrole“. Setze die Fahrzeit t als Funktion der Distanz s: $t = T(s)$, und die Umkehrfunktion $S = T^{inv}$ gibt die Distanz als Funktion der Zeit. Dann gilt für die Geschwindigkeit*

$$v(t) = v\left(T\left(s\right)\right) = S'(T(s)) = \frac{1}{T'(s)}.$$

Mit digitalen Kameras werden die Zeiten gemessen an zwei Kontrollstellen a und b mit einer genau bekannten Entfernung von mehreren Kilometern. Die Software identifiziert passierende Nummernschilder und kombiniert diese mit den Zeiten. Der Mittelwertsatz liefert den Beweis, dass es eine Stelle gibt, wo die Geschwindigkeit gleich

$$v = \frac{b-a}{T(b)-T(a)}$$

war. Ist v etwas größer als angegeben, wird man benachrichtet.

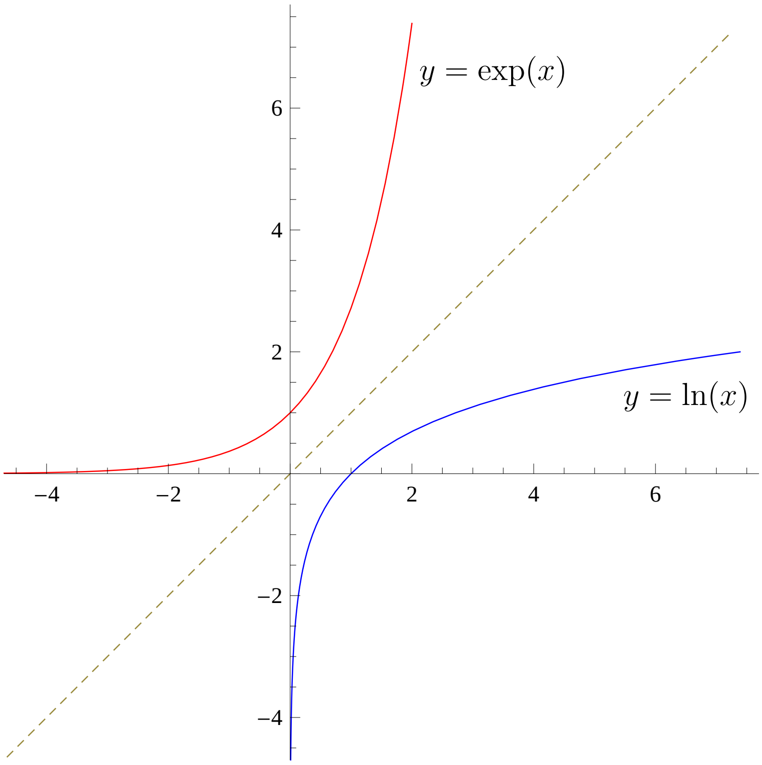
12.2.1 Berühmte Umkehrfunktionen I, der Logarithmus

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng wachsend und hat also eine stetige streng wachsende Umkehrfunktion. Weil $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ ist die Umkehrfunktion definiert auf $\mathbb{R}^+$. Man nennt diese Umkehrfunktion den natürlichen Logarithmus:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ mit } \ln(x) = \exp^{inv}(x).$$

Man findet

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}^+.$$



Eine Eigenschaft des Logarithmus, die sich oft verwenden lässt, ist:

Lemma 12.12 *Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Beweis. Man benutzt

$$ab = \exp(\ln(a))\exp(\ln(b)) = \exp(\ln(a) + \ln(b))$$

und nochmals die Umkehrfunktion. ∎

Schlussendlich definieren wir noch:

Definition 12.13 *Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{R}$:*

$$a^z = \exp(z \ln a).$$

Man hat

$$\begin{aligned}
a^0 &= \exp(0 \ln a) = \exp(0) = 1, \\
a^1 &= \exp(1 \ln a) = \exp(\ln a) = a, \\
a^z a^w &= \exp(z \ln a)\exp(w \ln a) = \exp((z+w)\ln a) = a^{z+w}, \\
a^z b^z &= \exp(z \ln a)\exp(z \ln b) = \exp(z \ln a + z \ln b) = \\
&= \exp(z \ln(ab)) = (ab)^z,
\end{aligned}$$

und findet so die alt-bekannten Regeln für Exponentenrechnung und auch, dass diese letzte Definition $z \mapsto a^z$ den schon bekannten Exponenten für $z \in \mathbb{R}$ nicht widerspricht.

12.2.2 Berühmte Umkehrfunktionen II, die zyklometrische Funktionen oder Arcusfunktionen

Der Arcussinus

Der Sinus ist nicht monoton und sogar nicht ein-eindeutig (injektiv). Er hat also keine Umkehrfunktion. Die sogenannte Inverse, die man oft sieht, ist dann auch nicht die Inverse zu $x \mapsto \sin(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sondern eine Umkehrfunktion zu $x \mapsto \sin(x) : \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}$. Diese Einschränkung vom Sinus kann man auch beschreiben durch $\sin_{[-\pi/2;\pi/2]}$ und der Arcussinus ist

$$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } \arcsin(x) = \left(\sin_{[-\pi/2;\pi/2]}\right)^{inv}(x).$$

Man findet

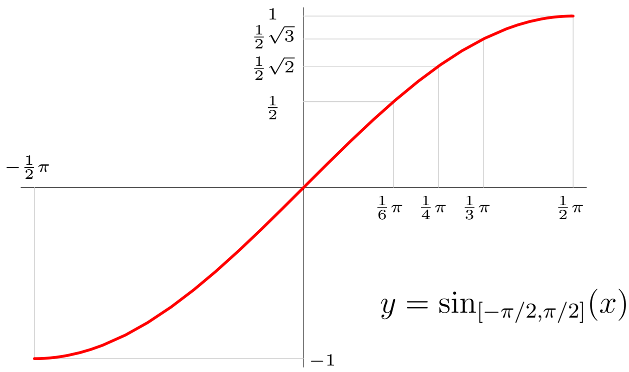
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \text{ für } x \in (-1, 1)\,.$$

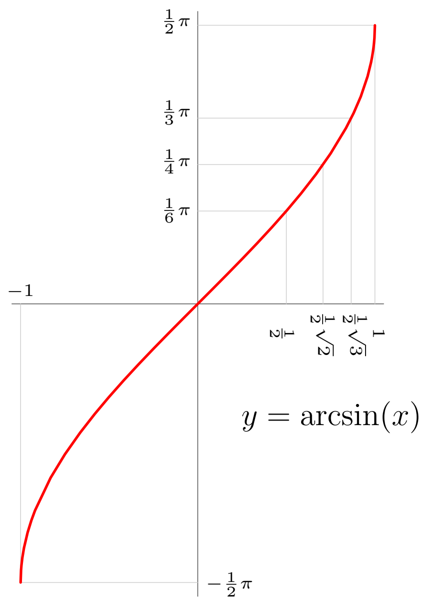
Aus $(\cos(y))^2 + (\sin(y))^2 = 1$ folgt

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1 - (\sin(y))^2}.$$

Weil man sich aber beschränkt auf $y \in \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$, gilt $\cos(y) = \sqrt{1 - (\sin(y))^2}$ und es folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ für } x \in (-1, 1)\,.$$





Der Arcuscosinus

Wie beim Sinus muss man auch die Cosinus Funktion einschränken, insofern es ihr Definitionsgebiet betrifft, wenn man eine Umkehrfunktion haben möchte :

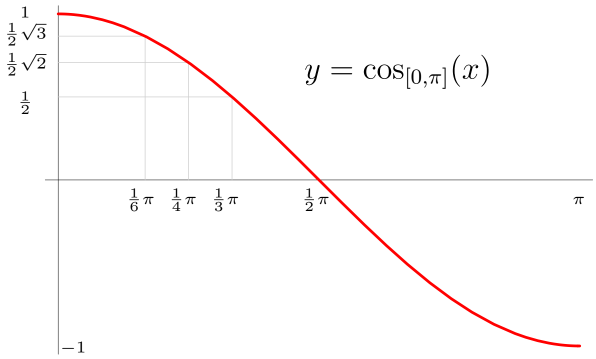
$$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } \arccos(x) = \left(\cos_{[0,\pi]}\right)^{inv}(x).$$

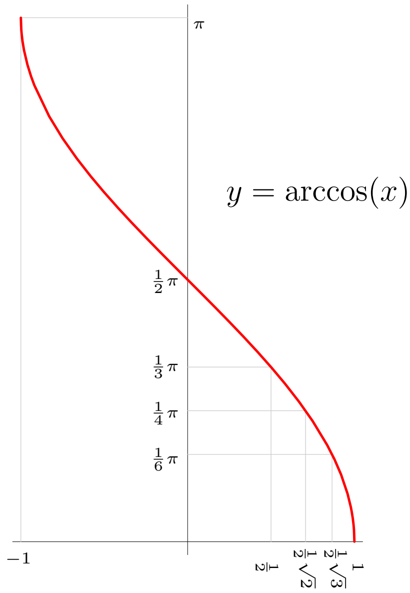
Ähnlich wie beim Arcussinus findet man

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ für } x \in (-1, 1)\,.$$

Dieses Ergebnis folgt übrigens auch aus $\arccos(x) = \frac{1}{2}\pi - \arcsin(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$. Das letzte folgt wiederum aus

$$\cos(y) = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - y\right) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

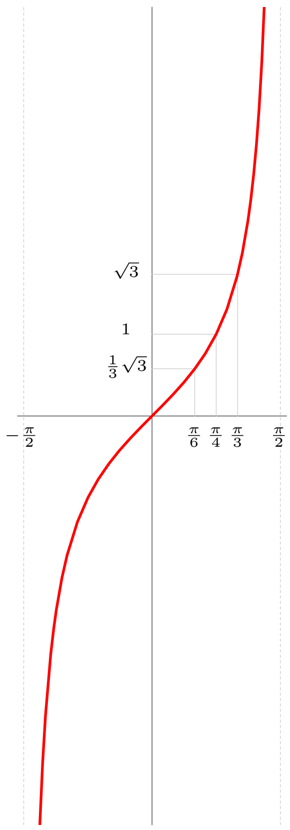




Der Arcustangens

Und ebenso hat der Tangens ein Problem, wenn man sein Definitionsgebiet nicht einschränkt:

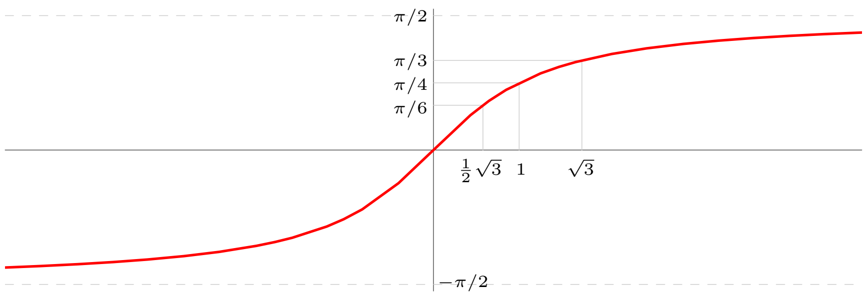
$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \arctan(x) = \left(\tan_{(-\pi/2,\pi/2)}\right)^{inv}(x).$$



Man hat für alle $x \in \mathbb{R}$:

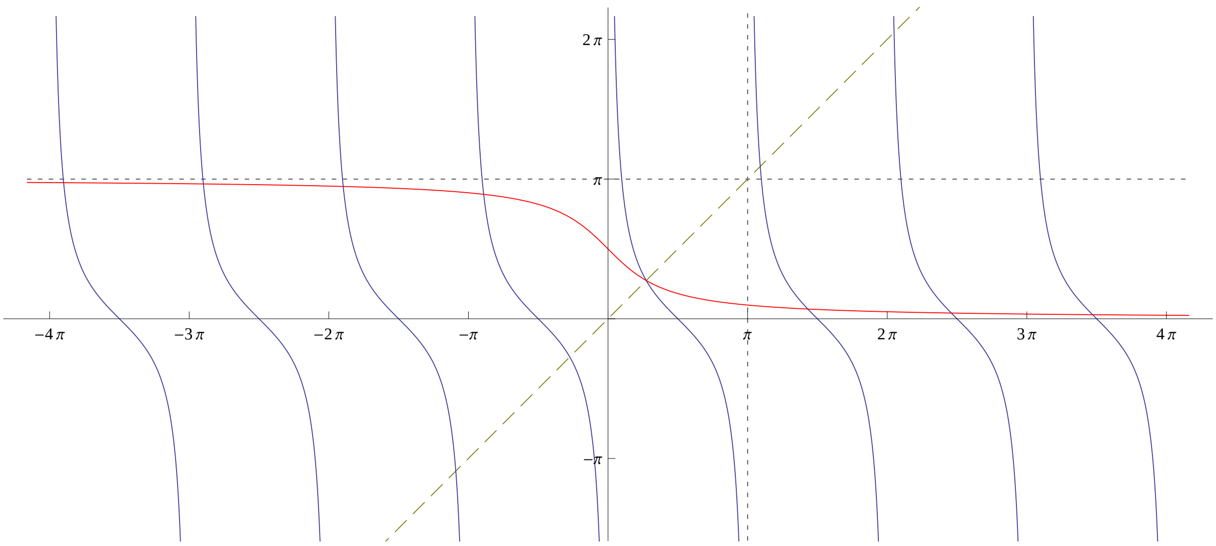
$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = (\cos(\arctan x))^2 =$$
$$= \frac{(\cos(\arctan x))^2}{(\cos(\arctan x))^2 + (\sin(\arctan x))^2} =$$
$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}\right)^2} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Links findet man eine Skizze zu $y = \tan_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$ und unten eine zu $y = \arctan(x)$.

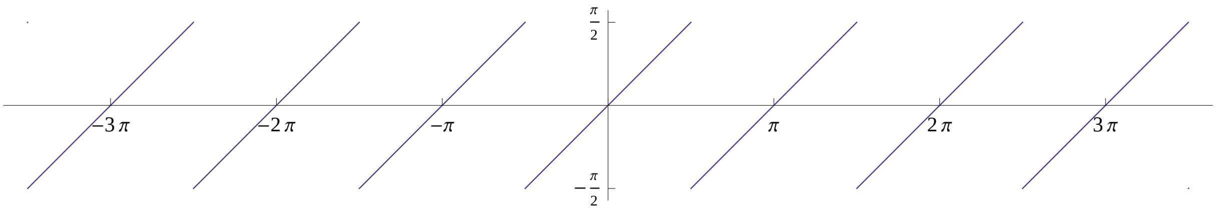


Es gibt auch einen Arcuscotangens und der ist meistens definiert durch

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{arccot}(x) = \left(\cot_{(0,\pi)}\right)^{inv}(x).$$



Wenn man jedoch Mathematica $x \mapsto \operatorname{arccot}(\cot(x))$ zeichnen läßt, findet man ein Ergebnis, das zu einer anderen Definition gehört. Welche?



12.2.3 Berühmte Umkehrfunktionen III, die Areafunktionen

Der Areasinus hyperbolicus

Der Sinus hyperbolicus ist streng wachsend: $x \mapsto \exp(x)$ und $x \mapsto -\exp(-x)$ sind streng wachsend und so auch

$$x \mapsto \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Setzen wir $y = \sinh(x)$ und multiplizieren mit $2\exp(x)$, dann findet man

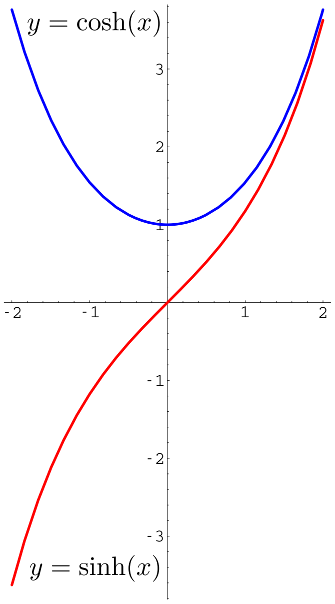
$$2ye^x = (e^x)^2 - 1 \Leftrightarrow (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

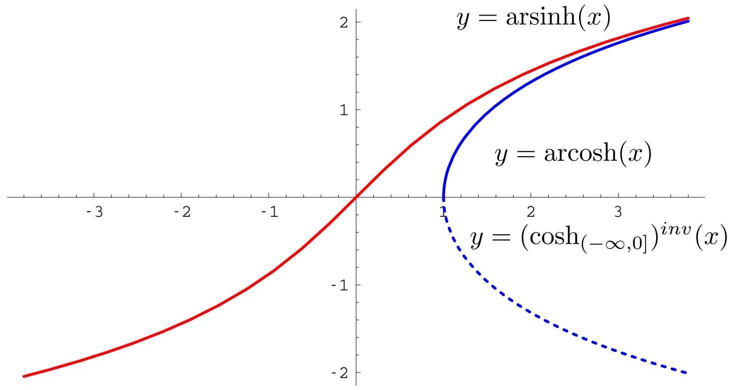
Weil $e^x > 0$ findet man $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ und

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Zusammengefasst wird der Areasinus hyperbolicus in

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$





Der Areacosinus hyperbolicus

Der Cosinus hyperbolicus ist monoton, wenn beschränkt auf $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}_0^-$. Man hat

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

und es folgt

$$y = \cosh(x) \Leftrightarrow 2ye^x = (e^x)^2 + 1 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Man definiert den Areacosinus hyperbolicus durch $\left(\cosh_{[0,\infty)}\right)^{inv}$, das heißt

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Die linke Hälfte hat auch eine inverse Funktion:

$$\left(\cosh_{(-\infty,0]}\right)^{inv} : [1, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \left(\cosh_{(-\infty,0]}\right)^{inv} = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Übrigens gilt

$$\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \text{ für } x \geq 1.$$

Der Areatangens hyperbolicus

Der Tangens hyperbolicus ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, denn

$$\tanh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

und hat horizontale Asymptoten:

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \text{ und } \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1.$$

Man setzt

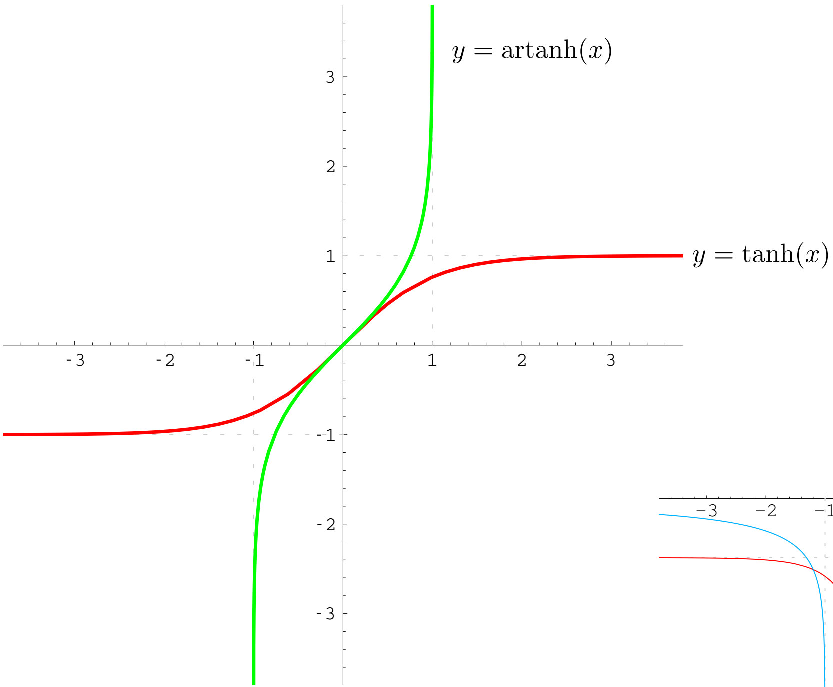
$$y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{12.2}$$

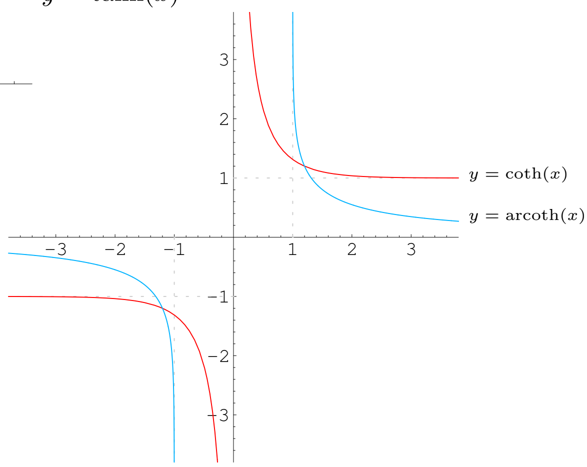
und kann die Gleichung in (12.2) nach x lösen:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^x + e^{-x}\right) y = e^x - e^{-x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{2x} + 1\right) y = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + y = e^{2x}(1 - y)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$

Bemerken Sie, dass $y = \tanh(x) \in (-1,1)$ impliziert, dass $1 - y > 0$ und $1 + y > 0$. Die Umkehrfunktion zu tanh ist:

$$\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{artanh}(x) = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$





Der Areacotangens hyperbolicus

existiert auch noch. Die Liebhaber dürfen ihn selber studieren.

12.3 Taylorpolynome

12.3.1 Aussagen und Heuristik

Bei der Definition von der Ableitung einer Funktion haben wir gesehen, welches Polynom von Grad kleiner oder gleich 1 „am besten passt“, wenn man eine Funktion $x \mapsto f(x)$ um a approximieren möchte, nämlich $x \to p_1(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$. Mit „am besten“ war gemeint

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + (x-a) f'(a))}{x - a} = 0.$$

Frage: *Können wir auch ein Polynom p_2 vom Grad kleiner oder gleich 2 finden, so dass*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_2(x)}{(x-a)^2} = 0 \ ? \tag{12.3}$$

Das einzige Polynom p_2 vom Grad 2 oder kleiner, bei dem die nullten, ersten und zweiten Ableitungen von f und p_2 für $x = a$ identisch sind, wäre

$$p_2(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \tfrac{1}{2}\,(x-a)^2\, f''(a),$$

denn nur so gilt

$$\begin{aligned} p_2(a) &= \left[f(a) + (x-a)\, f'(a) + \tfrac{1}{2}\,(x-a)^2\, f''(a)\right]_{x=a} = f(a), \\ p_2'(a) &= \left[f'(a) + (x-a)\, f''(a)\right]_{x=a} = f'(a), \\ p_2''(a) &= \left[f''(a)\right]_{x=a} = f''(a). \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass wenn f zweimal differenzierbar ist, p_2 tatsächlich so ist, dass die Identität in (12.3) gilt.

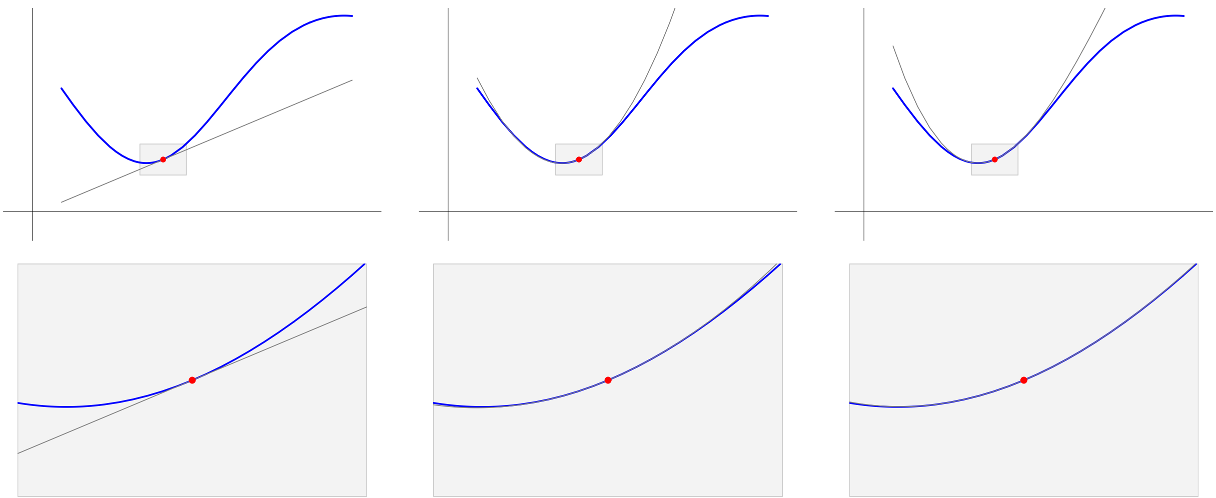
Theorem 12.14 (Satz von Taylor) *Sei I ein Intervall, $a \in I^o$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Nehme an, die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist n mal differenzierbar in I^o, und setze*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,. \tag{12.4}$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Bemerkung 12.14.1 *Das Polynom in (12.4) heißt das n-te Taylorpolynom von f bezüglich der Stelle a.*



$y = f(x)$ und $y = p_1(x)$, $y = f(x)$ und $y = p_2(x)$, $y = f(x)$ und $y = p_3(x)$.

Bemerkung 12.14.2 *Anders formuliert: p_n ist das einzige Polynom vom Grad kleiner gleich n, wobei in der Grafik der vertikale Unterschied zwischen $y = f(x)$ und $y = p_n(x)$ für $x \to a$ schneller nach 0 geht als $|x-a|^n$.*

Korollar 12.15 *Sei I ein Intervall und $a \in I^o$. Nehme an, die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ sind n-mal differenzierbar in I^o und*

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Falls $g^{(n)}(a) \neq 0$, gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Beweis. Schreiben wir $p_{f,n}$ und $p_{g,n}$ für die n-ten Taylorpolynome von f und g bezüglich der Stelle a. Weil $f^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ hat man $p_{f,n}(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$ und $p_{g,n}(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n g^{(n)}(a)$. Mit dem Theorem 12.14 hat man

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{f,n}(x) + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)}{g(x) - p_{g,n}(x) + \frac{1}{n!}(x-a)^n g^{(n)}(a)} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-p_{f,n}(x)}{(x-a)^n} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)}{\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-p_{g,n}(x)}{(x-a)^n} + \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)} = \frac{0 + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)}{0 + \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 12.15.1 *Korollar 12.15 kann man oft statt des Satzes von de l'Hôpital verwenden. Sowohl dieses Korollar als auch der Satz von de l'Hôpital sind mit Vorsicht zu genießen. Betrachten wir als Beispiel*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$, findet man, wenn man weiß, dass $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ gilt,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Woher wissen wir, dass $\sin'(0) = \cos(0) = 1$? Dazu betrachten wir die Ableitung vom Sinus in 0:

$$\sin'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, weil $\sin'(0) = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, weil $\sin'(0) = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Theorem 12.16 (Satz von Taylor mit dem Restglied von Lagrange) *Sei I ein Intervall, $a \in I^o$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Nehme an, die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist $n+1$ mal differenzierbar in I^o und sei p_n wie in (12.4). Dann gibt es θ_x zwischen x und a, so dass*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12.5}$$

Bemerkung 12.16.1 *Wenn $f^{(n+1)}(\theta_x)$ beschränkt ist in einer Umgebung von a und man nicht die genaue Formel braucht, wird auch das Landau-Symbol $\mathcal{O}$ verwendet:*

$$f(x) = p_n(x) + \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right) \text{ für } x \to a.$$

Dies bedeutet: es gibt $\delta > 0$ und $M \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - p_n(x)| \le M \left|(x-a)^{n+1}\right|.$$

12.3.2 Beweis des Taylorschen Satzes

Wir beweisen erst folgendes Lemma:

Lemma 12.17 *Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es für jedes $x \in (a,b)$ ein $\xi_x \in (a,x)$ mit*

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f'(\xi_x)}{n\,(\xi_x - a)^{n-1}}.$$

Beweis von Lemma 12.17. Wir setzen $(x-a)^n = y$ und $g(y) = f(a + \sqrt[n]{y})$. Dann folgt

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{g(y)-g(0)}{y}.$$

Weil $g : [0,(b-a)^n] \to \mathbb{R}$ stetig ist und g auf $(0,(b-a)^n)$ differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden und finden, dass es $c \in (0,y)$ gibt mit

$$\frac{g(y)-g(0)}{y} = g'(c) = f'\left(a + \sqrt[n]{c}\right)\frac{1}{n}c^{\frac{1-n}{n}}.$$

Definieren wir $\xi_x = a + \sqrt[n]{c}$, dann folgt $\xi_x \in (a,x)$ und

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = g'(c) = \frac{f'(\xi_x)}{n\,(\xi_x - a)^{n-1}}.$$

■

Beweis von Theorem 12.14. Wenn wir dieses Theorem beweisen können für $x > a$, dann folgt via $\tilde{f}(-x) = f(x)$ auch das Ergebnis für $x < a$. Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir uns also beschränken auf den Fall $x > a$.

Wenn $x > a$ benutzen wir Lemma 12.17 für $f(x) - p_n(x)$. Weil $f(a) = p_n(a)$ gibt es $x_1 \in (a,x)$, so dass

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{(f(x)-p_n(x)) - (f(a)-p_n(a))}{(x-a)^n} = \frac{f'(x_1)-p_n'(x_1)}{n\,(x_1-a)^{n-1}}.$$

Wenn $n > 1$ gibt es, weil $f'(a) = p_n'(a)$ gilt, $x_2 \in (a,x_1)$, so dass

$$\frac{f'(x_1)-p_n'(x_1)}{(x_1-a)^{n-1}} = \frac{(f'(x_1)-p_n'(x_1)) - (f'(a)-p_n'(a))}{(x_1-a)^{n-1}} = \frac{f''(x_2)-p_n''(x_2)}{(n-1)\,(x_2-a)^{n-2}}.$$

Wenn $n > 2$ gibt es, weil $f''(a) = p_n''(a)$ gilt, $x_3 \in (a,x_2)$, so dass

$$\frac{f''(x_2)-p_n''(x_2)}{(x_2-a)^{n-2}} = \frac{(f''(x_2)-p_n'(x_2)) - (f''(a)-p_n''(a))}{(x_2-a)^{n-2}} = \frac{f''(x_3)-p_n''(x_3)}{(n-2)\,(x_3-a)^{n-3}},$$

usw. Ein gediegener Beweis würde hier vollständige Induktion benutzen.

Nach $n-1$ Schritten haben wir $x_{n-1} \in \mathbb{R}$ gefunden mit

$$a < x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots < x_1 < x,$$

so dass

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n} &= \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ 2}\,\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - p_n^{(n-1)}(x_{n-1})}{x_{n-1}-a} = \\ &= \frac{1}{n!}\,\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - \left(f^{(n-1)}(a) + (x_{n-1}-a)\,f^n(a)\right)}{x_{n-1}-a}.\end{aligned} \tag{12.6}$$

Weil $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist in a, gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-\left(f^{(n-1)}(a)+(x-a)\,f^{(n)}(a)\right)}{x-a}=0$$

und wegen (12.6) also auch

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n}=0.$$

■

Beweis von Theorem 12.16. Statt wie im vorhergehenden Beweis werden wir jetzt

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

betrachten. Bemerke, dass im Nenner jetzt die Potenz $n+1$ statt n steht. Ähnlich wie vorher haben wir nach n Schritten ein $\tilde{x}_n\in(a,x)$ gefunden so, dass statt (12.6) folgendes gilt:

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\tilde{x}_n)-p_n^{(n)}(x_n)}{\tilde{x}_n-a}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\tilde{x}_n)-f^{(n)}(a)}{\tilde{x}_n-a}.$$

In noch einem extra Schritt liefert der Mittelwertsatz die Existenz von $\theta_x\in(a,\tilde{x}_n)$ derart, dass

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\tilde{x}_n)-f^{(n)}(a)}{\tilde{x}_n-a}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_x).$$

Diese letzte Identität liefert genau (12.5). ■

12.4 Taylorreihen

Wir haben Potenzreihen verwendet um einige Funktionen einzuführen. Dann kann man sich auch die folgende Frage stellen:

Ist jede Funktion als Potenzreihe zu schreiben?

Die einfache Antwort lautet nein, wenn wir nicht zusätzlich die Bedingung stellen, dass so eine Funktion unendlich oft differenzierbar sein soll. Denn, wenn eine Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat, dann ist sie innerhalb von dem dazugehörenden Kreis unendlich oft differenzierbar.

Wenn wir annehmen, dass f unendlich oft differenzierbar ist in a und und wenn wir p_n wie in (12.4) nehmen, folgt

$$\begin{aligned} p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k= \\ = f(a)+(x-a)\,f'(a)+\tfrac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)+\tfrac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(a)+\dots+\tfrac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a).\end{aligned}$$

Mit Theorem 12.16 findet man

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=f(x)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0,$$

wobei θ_x zwar existiert und sogar zwischen a und x liegt, aber nicht konstruktiv gegeben ist. Konstruktiv, aber nicht sehr scharf, ist folgendes Ergebnis.

Lemma 12.18 *Sei I ein offenes Interval in $\mathbb{R}$, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Wenn es $c, M \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq c\ M^n \text{ für alle } x \in I \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) \text{ für } x \in I. \tag{12.7}$$

Bemerkung 12.18.1 *Wenn wir die etwas dubiose Schreibweise bei Reihen benutzen, dann heißt (12.7) genau*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x) \text{ für } x \in I. \tag{12.8}$$

Die Reihe auf der linken Seite von (12.8) heißt die Taylorreihe *von f bezüglich der Stelle a.*

Beweis. Wenn $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq c\ M^k$ für alle $x \in I$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{c\ M^{n+1} |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wie oben schon bemerkt, liefert Theorem 12.16 die Konvergenz. ■

12.4.1 Zusammenhang zwischen Taylor- und Potenzreihen

Manche Funktion kann man als Taylorreihe schreiben. Wir haben auch Funktionen, die als Potenzreihe definiert wurden.

$$\boxed{\begin{array}{lll} f & \dashrightarrow & \text{Taylorreihe} \\ f & \dashleftarrow & \text{Potenzreihe} \end{array}}$$

Haben Taylorreihen und Potenzreihen etwas miteinander zu tun?

Die Antwort lautet ja. Wenn f als eine Potenzreihe (mit einem positiven Spektralradius R) definiert ist, sagen wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ für } |x-a| < R,$$

dann wissen wir aus Theorem 11.15, dass

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k} \text{ für } |x-a| < R,$$

und so folgt, dass

$$f^{(k)}(a) = c_k k!\ .$$

Die Taylorreihe um $x = a$ für f wird so

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n n!}{n!} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\ .$$

Umgekehrt, wenn die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ nach $f(x)$ konvergiert für $x \in (a-\delta, a+\delta)$ und irgendein $\delta > 0$, dann ist diese Taylorreihe selbstverständlich formal eine Potenzreihe. Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzradius R, der so ist, dass diese Reihe innerhalb vom Radius absolut konvergiert und sie außerhalb divergiert. Damit folgt $R \geq \delta$, also dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \text{ konvergiert für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z-a| < \delta.$$

Ein kleiner Haken verbirgt sich hinter der Bedingung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ konvergiert nach } f(x).$$

Es gibt Taylorreihen, die zwar konvergieren, aber nicht unbedingt nach $f(x)$. Ein Beispiel folgt.

Beispiel 12.19 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-x^{-2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist unendlich differenzierbar, denn außerhalb von 0 ist sie die Zusammensetzung bekannter differenzierbarer Funktionen und in 0 verwendet man

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} q_n(\frac{1}{x}) \exp\left(-x^{-2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

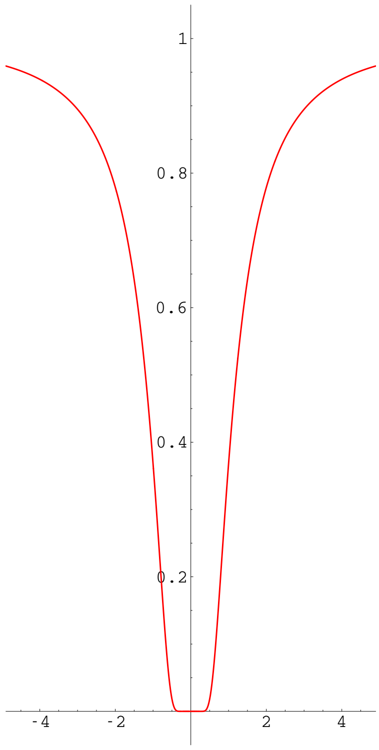
für irgendwelche Polynome q_n vom Grad $3n$, und

$$\lim_{x \to 0} x^{-k} \exp\left(-x^{-2}\right) = \lim_{y \to \infty} \frac{y^{k/2}}{e^y} = 0 \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Jedes Taylorpolynom bezüglich 0 wird so

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0.$$

Es möge deutlich sein, dass die Taylorreihe nicht nach f konvergiert. Ein Bild zu $y = f(x)$ steht hier rechts. Man sieht, dass f bei 0 sehr flach verläuft (aber nicht gleich 0 ist!), obwohl sogar die y-Achse skaliert ist.



Beispiel 12.20 *Hat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^x$ eine konvergente Taylorreihe um $x = 0$? Weil $2^x = \exp(x \ln 2)$, bekommt man $f^{(n)}(x) = (\ln 2)^n \exp(x \ln 2) = (\ln 2)^n 2^x$ und die Taylorreihe wird*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n. \tag{12.9}$$

Weil für $|x| < K$ gilt

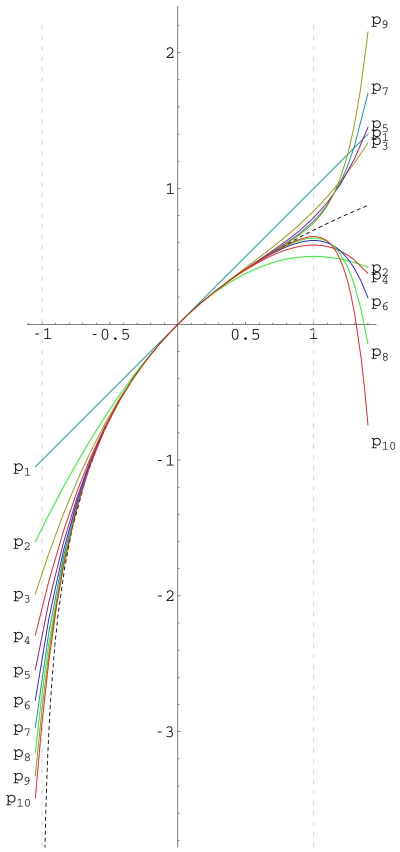
$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|(\ln 2)^n 2^x\right| \leq 2^K (\ln 2)^n$$

konvergiert die Taylorreihe in (12.9) nach 2^x auf jedem Interval $(-K, K)$, also auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 12.21 *Wir wollen Taylorpolynome und die Taylorreihe von $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$ betrachten. Dazu erstmal die Ableitungen:*

n	0	1	2	3	$\dots$	n
$f^{(n)}(x)$	$\ln(1+x)$	$\dfrac{1}{1+x}$	$\dfrac{-1}{(1+x)^2}$	$\dfrac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$	$\dots$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$
$f^{(n)}(0)$	0	1	-1	2	$\dots$	$(-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= f(0) = 0\\
p_1(x) &= f(0) + f'(0)x = 0 + x\\
p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 + x - \tfrac{1}{2}x^2\\
p_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(0)x^3 = 0 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\\
&\vdots\\
p_n(x) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k =\\
&= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.
\end{aligned}$$



Lemma 12.18 können wir nicht benutzen, jedoch hat man direkt

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta_x)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{x}{1+\theta_x}\right|^{n+1}\frac{1}{n+1}$$

und dieser Ausdruck geht nach 0 für $n \to \infty$ dann, und nur dann, wenn $\left|\frac{x}{1+\theta_x}\right| < 1$. Weil wir nicht wissen wo θ_x genau liegt für jedes n (denn θ_x hängt auch von n ab!), bringt diese Bedingung uns wenig weiter, außer dass $x > -1$ notwendig ist für Konvergenz und $-\frac{1}{2} < x < 1$ reicht für Konvergenz.
Wenn man vergisst, woher sie kommt und man die Reihe an sich betrachtet, sieht man, dass sie konvergiert für $x \in (-1, 1]$.

Beispiel 12.22 *Wir berechnen*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\frac{1}{2}x^2\sin(2x)}.$$

Dazu verwenden wir die Taylorpolynome:

$$\begin{aligned}
&\text{für } e^x : && p_n(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \dots + \tfrac{1}{n!}x^n,\\
&\text{für } \ln(1+x) : && p_n(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \dots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\\
&\text{für } \sin(x) : && p_{2n+1}(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \dots + \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Für $f(x) = e^x - 1 + \ln(1-x)$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + x^4R_1(x)\right) - 1 - \left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + x^4R_2(x)\right)\\
&= -\tfrac{1}{6}x^3 + x^4R_3(x),
\end{aligned}$$

und für $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x)$ *gilt*

$$\tfrac{1}{2}x^2 \sin(2x) = x^3 + x^5 R_4(x).$$

Hier sind R_i *irgendwelche Funktionen, die definiert sind als konvergente Potenzreihen um* $x = 0$*. Es reicht, um zu wissen, dass die dazugehörenden Konvergenzradien vererbt werden. Das heißt, für* $R_1(.)$ *(von* $\exp$*) und* $R_4(.)$ *(von* $\sin$*) sind die Konvergenzradien* ∞*. Für* $R_2(.)$ *(von* $x \to \ln(1+x)$*) und* $R_3(.)$ *(das Minimum von denen zu* $R_1(.)$ *und* $R_3(.)$*) sind die Konvergenzradien gleich* 1*. Wir finden so:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\frac{1}{2}x^2 \sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^4 R_3(x)}{x^3 + x^5 R_4(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + x\ R_3(x)}{1 + x^2\ R_4(x)} = \frac{-\frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} x\ R_3(x)}{1 + \lim_{x\to 0} x^2\ R_4(x)} = -\frac{1}{6}.$$

Übrigens brauchen wir für dieses Ergebnis nicht mal Taylorreihen. Wenn man gut hinschaut, sieht man, dass Korollar 12.15 reicht.

Analysis 1, Woche 13

Integralrechnung I

13.1 Motivation

Bevor wir auf eine fundamentalere Weise Integrale betrachten werden, schauen wir uns mal an, was wir eigentlich möchten. In erster Instanz handelt es sich bei Integralen um Längen, Oberflächen, Inhalte und verwandte Sachen. Dafür möchten wir vernünftige mathematisch definierte Begriffe haben.

Ein Beispiel dazu ist der Flächeninhalt von einer Kreisscheibe mit Radius 1. Wenn man davon ausgeht, dass ein Rechteck mit Seitenlängen a und b den Flächeninhalt ab hat, dann lautet die Frage: wie können wir den Flächeninhalt von dieser Kreisscheibe damit vergleichen. Diese Quadratur des Kreises hat die Mathematik längere Zeit beschäftigt.

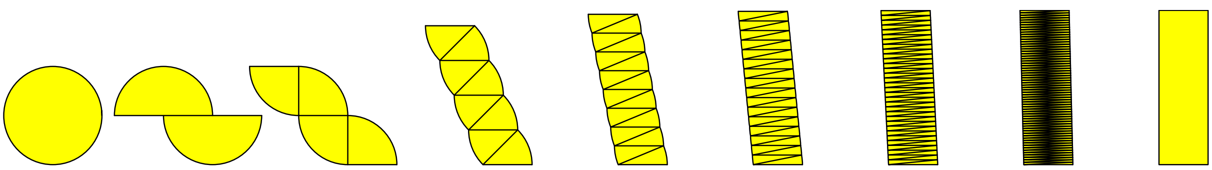


Abbildung 13.1: In ∞-vielen Schritten kann man sich überzeugen, dass ein Kreis den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck.

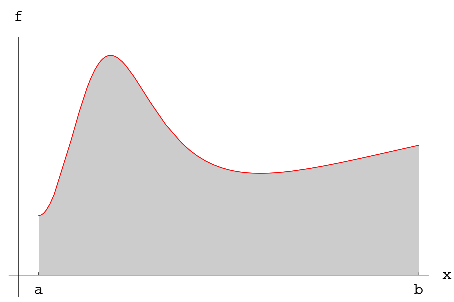
Solche Bilder lassen einen schnell davon überzeugen, dass der Flächeninhalt wohl π sein wird, aber sogar dieser geometrische ,,Beweis" braucht $\lim_{x\downarrow 0} \sin(x)/x = 1$. Wieso wäre sonst die Länge von der längsten Seite des Rechtecks gleich π? Die Zahl π ist festgelegt als die Länge vom halben Einheitskreis. Damit ist die Höhe von jedem dieser Gebilde, als n mal die Höhe des n-ten Teils von einem halben Einheitskreis, gleich $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Aus $\lim_{x\downarrow 0} \sin(x)/x = 1$ folgt, weil $\frac{\pi}{n} \downarrow 0$ für $n \to \infty$, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \pi, \quad \text{weil } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Allgemeiner sind wir interessiert am Flächeninhalt von einem zwei-dimensionalen Gebiet, beschrieben durch

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b \text{ und } 0 \le y \le f(x)\right\} \tag{13.1}$$

mit f einer positiven Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $a < b$.



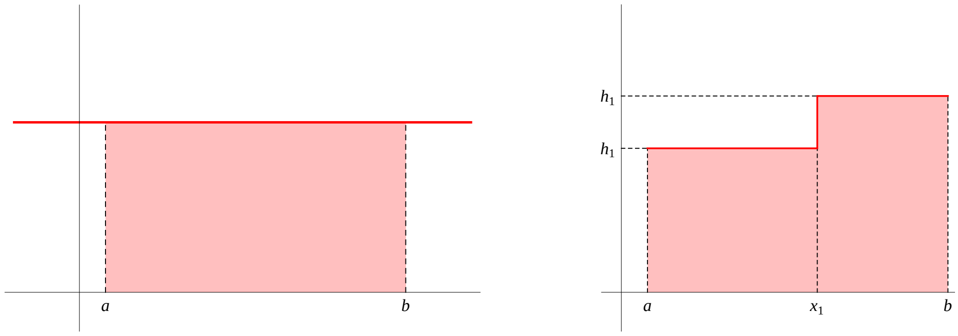
Wir wollen nun den Flächeninhalt unter einer positiven Funktion definieren und listen erst mal einige Eigenschaften auf, die wir haben möchten.

- Wenn f eine konstante Funktion ist, wollen wir den Flächeninhalt wie beim Rechteck haben. Für $f(x) = h \geq 0$ wäre das

$$A = h\,(b-a)\,. \tag{13.2}$$

Auch für eine Funktion, die (nicht-stetig!) definiert ist durch $f(x) = h_1 \geq 0$ für $x \in [a, x_1]$ und $f(x) = h_2 \geq 0$ für $x \in (x_1, b]$, wenn $x_1 \in (a,b)$, will man den Flächeninhalt in (13.1) berechnen durch

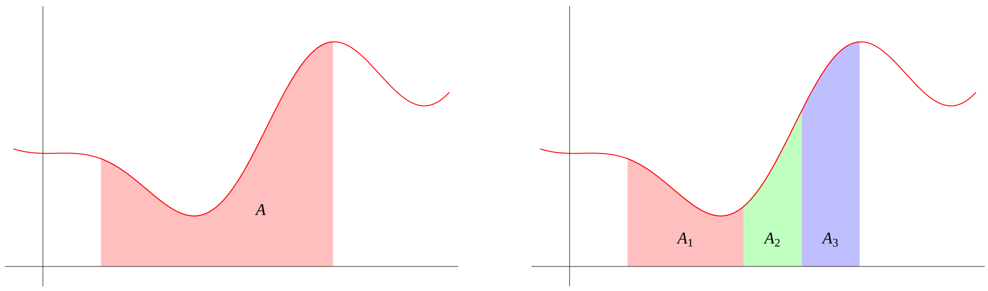
$$A = h_1\,(x_1 - a) + h_2\,(b - x_1)\,.$$



Für allgemeine Funktionen möchte man die folgenden Eigenschaften:

- Nehmen wir an, wir haben $\{x_i\}_{i=1}^n \subset (a,b)$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Wenn A_i der Flächeninhalt von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x \leq x_{i+1} \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist und A der von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x \leq x_{i+1} \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$, dann wollen wir, dass

$$A = A_0 + A_1 + \dots + A_n. \tag{13.3}$$

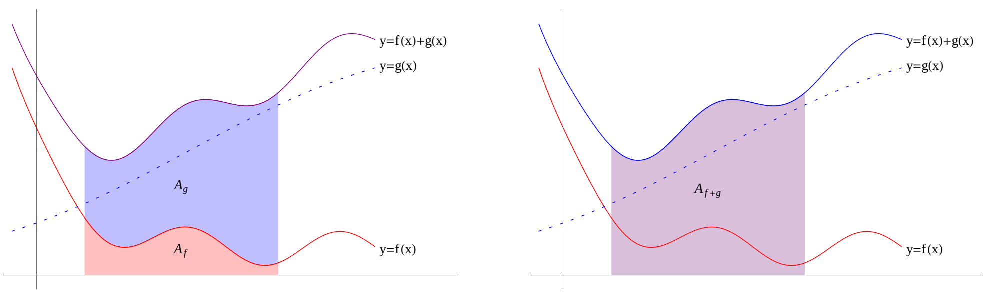


- Auch wollen wir, dass für $f(x), g(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ gilt, für die dazugehörenden Flächeninhalte gilt

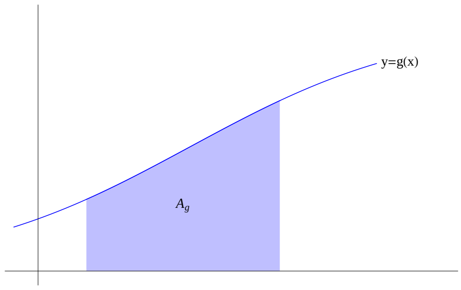
$$A_{f+g} = A_f + A_g. \tag{13.4}$$

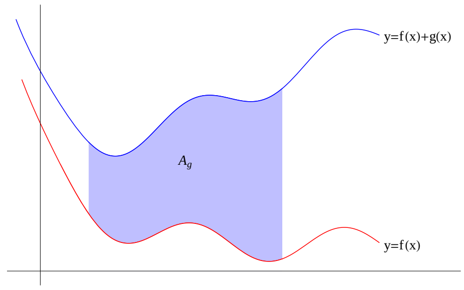
Für eine positive Funktion h soll A_h der Flächeninhalt sein von

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x \leq x_{i+1} \text{ und } 0 \leq y \leq h\,(x)\right\}.$$



Insbesondere sollten der Flächeninhalt des Gebietes zwischen f und $f+g$ und der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und g gleich sein.

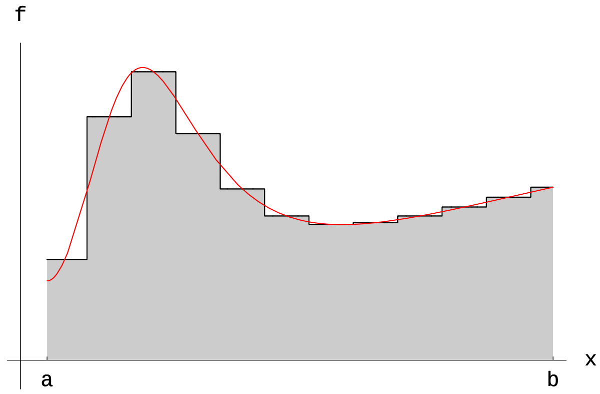




13.2 Riemann-Integrale

13.2.1 Definition für Treppenfunktionen

Für rechtwinklige Gebiete kann man die Oberfläche in Rechtecke teilen und so die gesamte Fläche berechnen. Für andere Gebiete können wir versuchen, die Fläche in (13.1) mit Rechtecken zu approximieren.



Dazu werden wir erst das Integral definieren für sogenannte Treppenfunktionen.

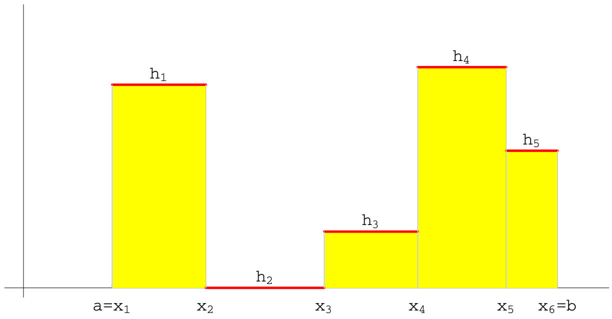
Definition 13.1 *Die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt eine Treppenfunktion, wenn es $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}\subset\mathbb{R}$ gibt mit*

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

und $\{h_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= h_i \text{ für } x\in(x_i,x_{i+1}) \text{ und } i\in\{1,2,\dots,n\}\,,\\ f(x) &= 0 \text{ für } x<x_1\\ f(x) &= 0 \text{ für } x>x_{n+1}. \end{aligned}$$

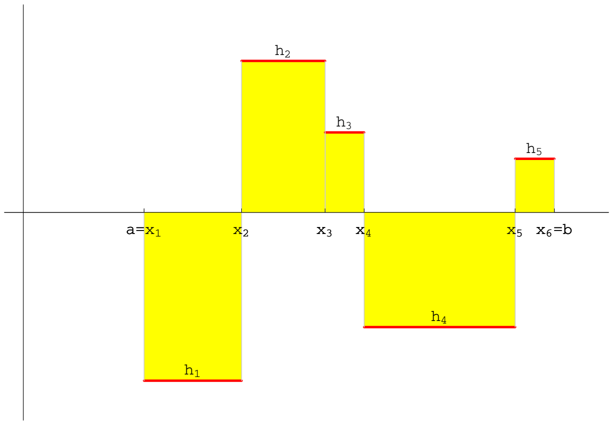
Bemerkung 13.1.1 *Man bemerke, dass f nicht festgelegt wird für $x\in\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$. Wichtig ist aber, dass diese Menge nur endlich viele Stellen enthält. Die Menge $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ heißt eine Zerlegung von $[a,b]$.*



Definition 13.2 *Sei f eine Treppenfunktion wie in Definition 13.1. Dann setzen wir*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\, h_i. \tag{13.5}$$

Bemerkung 13.2.1 *Wir haben vorhin von Flächeninhalten geredet und positive Funktionen betrachtet. In Definition 13.2 sind auch negative Werte h_i erlaubt und dann ist ,,Flächeninhalt" nicht länger zutreffend.*



Proposition 13.3 *Wenn $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beides Treppenfunktionen sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\lambda f + \mu g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wenn $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ eine Zerlegung für f und $\{y_i\}_{i=1}^{m+1}$ eine Zerlegung für g ist, kombiniere man diese beiden Mengen zu einer neuen Zerlegung, die sowohl für f als auch für g passt. Der Rest ist elementare Buchführung. ■

Proposition 13.4 *Wenn $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ alle beide Treppenfunktionen sind und $f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b]$, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Man benutzt Proposition 13.3 mit $\lambda = -1$ und $\mu = 1$:

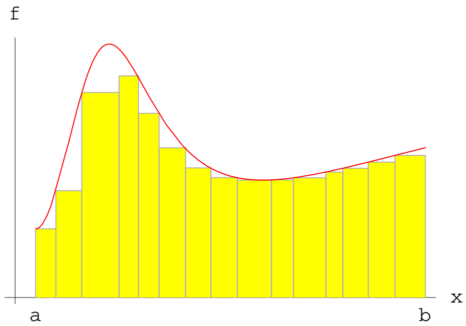
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

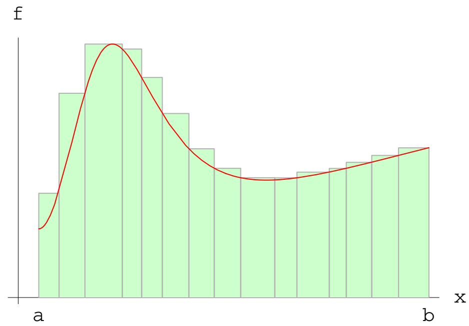
und $g(x) - f(x) \geq 0$ liefert nicht-negative ,,Höhen" h_i in (13.5) und es folgt, dass $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geq 0$. ■

13.2.2 Definition für mehr allgemeine Funktionen

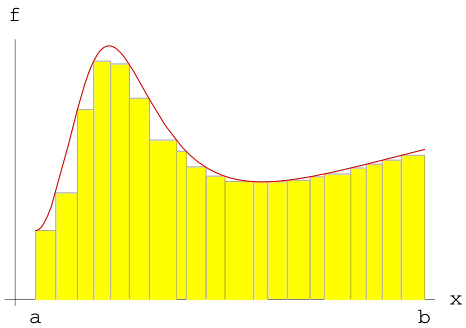
Wenn man den Flächeninhalt wie in dem Bild im Paragraphen 13.2.1 approximieren möchte, hat man nicht im Griff, wie nahe man herankommt. In dieser grauen Zone liegt sowohl etwas drüber als auch unterhalb von dem Graphen. Die Lösung dafür ist, nicht eine Approximierung wie in diesem Bild zu machen, sondern sowohl eine Approximierung von oben als auch eine Approximierung von unten zu machen. Für die Flächeninhalte würde man „geometrisch“ sagen:

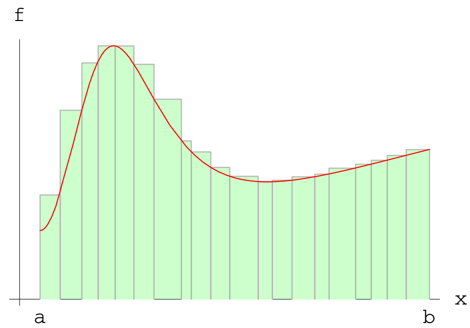
$$A_{\text{untere Treppe}} \leq A_{\text{Funktion}} \leq A_{\text{obere Treppe}}.$$

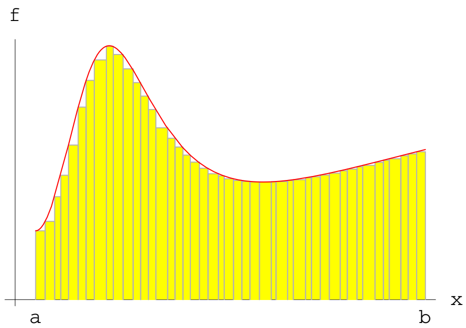


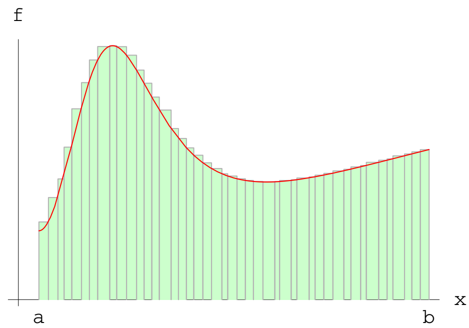


Wenn man die Treppenstufen noch etwas schmäler macht, würde man erwarten, dass eine bessere Approximierung rauskäme.









Diese Idee werden wir verfolgen und diese geometrischen Überlegungen handfest machen. Dazu brauchen wir Unter- und Obersummen.

Definition 13.5 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- *Dann heißt $m \in \mathbb{R}$ eine* Untersumme *bezüglich f auf $[a,b]$, wenn es eine Treppenfunktion $t_{unten} : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$t_{unten}(x) \leq f(x) \text{ für } x \in [a,b] \text{ und } \int_a^b t_{unten}(x)dx = m.$$

- *Dann heißt $M \in \mathbb{R}$ eine* Obersumme *bezüglich f auf $[a,b]$, wenn es eine Treppenfunktion $t_{oben} : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, mit*
$$f(x) \leq t_{oben}(x) \text{ für } x \in [a,b] \text{ und } \int_a^b t_{oben}(x)dx = M.$$

Lemma 13.6 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei m und M respektive eine Unter- und eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$. Dann gilt $m \leq M$.*

Beweis. Seien t_{unten} und t_{oben} die Treppenfunktionen die m und M liefern. Dann gilt

$$t_{\text{unten}}(x) \leq f(x) \leq t_{\text{oben}}(x)$$

und wegen Proposition 13.4 folgt

$$m = \int_a^b t_{\text{unten}}(x)dx \leq \int_a^b t_{\text{oben}}(x)dx = M.$$

Damit bekommt man das gewünschte Ergebnis. ■

Dieses Lemma zeigt, dass jede Untersumme eine untere Schranke liefert für die Menge aller Obersummen. Ebenso liefert jede Obersumme eine obere Schranke für die Menge aller Untersummen. Weil jede nicht-leere, nach unten beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Infimum hat, und weil jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum hat, ist die folgende Definition gestattet.

Definition 13.7 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und seien m und M respektive eine Unter- und eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$.*

- *Man definiert das* obere Integral *von f auf $[a,b]$ durch*
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \left\{ M \in \mathbb{R}; M \text{ ist eine Obersumme bezüglich } f \text{ auf } [a,b] \right\}.$$

- *Man definiert das* untere Integral *von f auf $[a,b]$ durch*
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \left\{ m \in \mathbb{R}; m \text{ ist eine Untersumme bezüglich } f \text{ auf } [a,b] \right\}.$$

- *Falls oberes Integral und unteres Integral existieren in $\mathbb{R}$ und $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, dann heißt f* Riemann-integrierbar *auf $[a,b]$.*
Dann definiert man das Integral *von f auf $[a,b]$ durch*
$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Bemerkung 13.7.1 *Weil für jede Untersumme m und Obersumme M bezüglich f auf $[a,b]$ gilt $m \leq M$, folgt*
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{13.6}$$

Bemerkung 13.7.2 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, falls* $\operatorname{Re} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *und* $\operatorname{Im} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar sind. Man setzt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx.$$

Die erste Frage, die man sich stellen sollte, wäre, ob diese neue Definition des Integrals mit der für Treppenfunktionen übereinstimmt.

Sei f eine Treppenfunktion mit „Treppenintegral“ $s = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\, h_i$. Weil f eine Treppenfunktion ist, ist s sowohl Unter- als auch Obersumme für f bezüglich $[a,b]$ und man hat

$$s \le \sup \{\text{Untersummen}\} = \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \{\text{Obersummen}\} \le s.$$

Diese Frage lässt sich also bejahen.

Als nächstes wollen wir mal schauen, ob die gewünschten Eigenschaften tatsächlich gelten.

Theorem 13.8 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und nehmen wir an $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Angenommen f und g sind integrierbar auf $[a,b]$. Dann ist $\lambda f + \mu g$ integrierbar auf $[a,b]$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{13.7}$$

2. *Sei $c \in (a,b)$. Es gilt: f auf $[a,b]$ ist integrierbar, dann und nur dann, wenn f auf $[a,c]$ und f auf $[c,b]$ integrierbar sind. Außerdem gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{13.8}$$

3. *Wenn f und g integrierbar sind auf $[a,b]$ und $f(x) \le g(x)$ gilt für $x \in [a,b]$, dann gilt auch*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{13.9}$$

Beweis. 1. Wenn $\lambda \ge 0$ und $\mu \ge 0$, dann kann man zu jedem Paar Obersummen M_f von f und M_g von g bezüglich $[a,b]$ eine gemeinsame Zerlegung zusammensetzen und eine Treppenfunktion zu $\lambda f + \mu g$ konstruieren mit der Obersumme $\lambda M_f + \mu M_g$. Ebenso benutzt man Untersummen und bekommt

$$\lambda m_f + \mu m_g \le \underline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \le \overline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \le \lambda M_f + \mu M_g.$$

Nimmt man das Infimum von M_f und von M_g, findet man

$$\overline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \le \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Auf ähnliche Art liefert das Supremum von m_f und von m_g, dass

$$\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx,$$

und weil so das obere Integral gleich dem unteren ist, ist man fertig.

Wenn $\lambda \geq 0$ und $\mu < 0$ geht man auf eine ähnliche Weise vor, aber vertauscht m_g und M_g: wenn M_g eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$ ist, dann ist $-M_g$ eine Untersumme bezüglich $-g$ auf $[a,b]$. So hat man

$$\lambda m_f + \mu M_g \leq \underline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \leq \overline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \leq \lambda M_f + \mu m_g,$$

und bekommt

$$\overline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \leq \lambda \overline{\int_a^b} f(x)dx + \mu \underline{\int_a^b} g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx,$$

usw.

2. ($\Rightarrow$) Wenn t_o (t_u) eine Treppenfunktion ist, die auf $[a,b]$ oberhalb (unterhalb) von f liegt, dann ist $t_{o|[a,c]}$ ($t_{uo|[a,c]}$) eine Treppenfunktion, die auf $[a,c]$ oberhalb (unterhalb) von f liegt. So hat man schon eine endliche Ober- und Untersumme bezüglich f auf $[a,c]$. Man bekommt sogar, nachdem man c in die Zerlegung einfügt, dass

$$\begin{aligned} &\int_a^c t_{o|[a,c]}(x)dx - \int_a^c t_{u|[a,c]}(x)dx = \int_a^c \left(t_{o|[a,c]}(x) - t_{u|[a,c]}(x)\right) dx \leq \\ \leq\ &\int_a^b (t_o(x) - t_u(x))\, dx = \int_a^b t_o(x)dx - \int_a^b t_u(x)dx. \end{aligned} \tag{13.10}$$

Dann folgt aus (13.10), wenn wir das Infimum über alle solche t_o nehmen, dass

$$\begin{aligned} &\overline{\int_a^c} f(x)dx - \int_a^c t_{u|[a,c]}(x)dx \leq \inf_{t_0} \left\{ \int_a^c t_{o|[a,c]}(x)dx \right\} - \int_a^c t_{u|[a,c]}(x)dx \overset{(13.10)}{\leq} \\ \leq\ &\inf_{t_0} \left\{ \int_a^b t_{o|[a,c]}(x)dx \right\} - \int_a^b t_{u|[a,c]}(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b t_{u|[a,c]}(x)dx. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Das Supremum über passende h_u liefert mit (13.11), dass

$$\begin{aligned} &\overline{\int_a^c} f(x)dx - \underline{\int_a^c} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx - \sup_{t_u} \left\{ \int_a^c t_{u|[a,c]}(x)dx \right\} \overset{(13.11)}{\leq} \\ \leq\ &\int_a^b f(x)dx - \sup_{t_u} \left\{ \int_a^b t_{u|[a,c]}(x)dx \right\} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0 \end{aligned}$$

und mit (13.6) folgt

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx,$$

und so die Integrierbarkeit. Ähnlich geht man vor auf $[c,b]$.

($\Leftarrow$) Diese Richtung ist eher geradeaus. Man kombiniert eine Treppenfunktion t_1 oberhalb von f auf $[a,c]$ mit einer Treppenfunktion t_2 oberhalb von f auf $[c,b]$ und benutzt, dass (13.8) gilt für Treppenfunktionen:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^c t_1(x)dx + \int_c^b t_2(x)dx.$$

Nimmt man rechts das Infimum, dann erreicht man

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ähnlich bekommt man

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

und das Ergebnis folgt mit der Abschätzung (13.6). Gleichzeitig hat man jetzt (13.8) bewiesen.

3. Jede Obersumme M_g bezüglich g auf $[a,b]$ ist eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$. Also findet man

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{\text{Obersummen für } f\} \leq \inf\{\text{Obersummen für } g\} = \int_a^b g(x)dx.$$

■

13.3 Integrierbare Funktionen

Proposition 13.9 *Sei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- *Es existiert eine Obersumme in $\mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn f nach oben beschränkt ist auf $[a,b]$.*
- *Es existiert eine Untersumme in $\mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn f nach unten beschränkt ist auf $[a,b]$.*

Beweis. Wenn f nach oben beschränkt ist, sagen wir $f(x) \leq K$, dann ist $K(b-a)$ eine Obersumme. Wenn M eine Obersumme ist, dann gibt es eine Treppenfunktion t mit endlich vielen 'Stufen' h_i, passend zu der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, und

$$f(x) \leq t(x) \leq K := \max\left\{\max_{0\leq i\leq n} h_i, \max_{0\leq i\leq n+1} t(x_i)\right\}.$$

Man bemerke, dass dieses Maximum existiert, weil es endlich viele Terme hat. ■

Bemerkung 13.9.1 *Bemerke, dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bedeutet, dass für jedes $x \in [a,b]$ gilt $f(x) \in \mathbb{R}$. Also $\pm\infty$ können nicht als Bild auftreten. Das heißt selbstverständlich nicht, dass f auf $[a,b]$ beschränkt sein muss. Wenn wir aber f Riemann-integrierbar haben möchten, dann sagt diese Proposition, dass Beschränkheit notwendig ist.*

Proposition 13.10 *Sei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
Die Funktion f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn es für jede $\varepsilon > 0$ eine Obersumme $M \in \mathbb{R}$ und eine Untersumme $m \in \mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$ gibt mit $M - m < \varepsilon$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Obersumme $M \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)dx > M - \frac{1}{2}\varepsilon$ und eine Untersumme $m \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)dx < m + \frac{1}{2}\varepsilon$.

($\Leftarrow$) Weil eine Obersumme M_1 und eine Untersumme m_1 in $\mathbb{R}$ existieren (das heißt: endlich sind), ist die Menge der Obersummen nach unten und die Menge der Untersummen nach oben beschränkt. Das heißt

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \{M \text{ Obersumme}\} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \{m \text{ Untersumme}\} \in \mathbb{R}.$$

Außerdem haben wir angenommen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Obersumme M_ε und eine Untersumme m_ε gibt derart, dass

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq M_\varepsilon - m_\varepsilon < \varepsilon$$

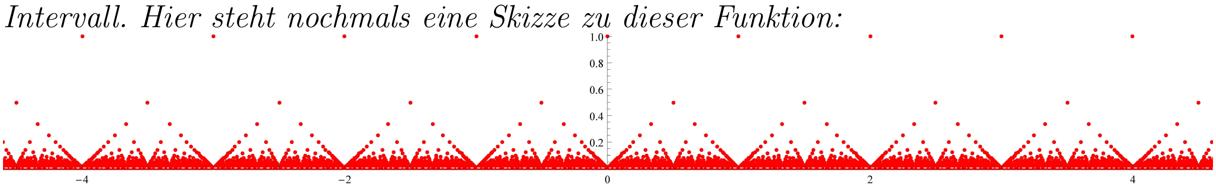
Weil diese Ungleichung gilt für jedes $\varepsilon > 0$, haben oberes und unteres Integral den gleichen Wert und es folgt so, dass f integrierbar ist. ■

Wir betrachten die Funktion in Beispiel (9.17).

Beispiel 13.11 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{wenn } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \operatorname{ggT}(|n|, m) = 1, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nicht stetig auf jedem Intervall. Diese Funktion ist aber Riemann-integrierbar auf jedem Intervall. Hier steht nochmals eine Skizze zu dieser Funktion:



Weil diese Funktion periodisch ist, ist sie auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$ integrierbar, wenn sie es ist auf $[0, 1]$. Wer werden uns die Integrierbarkeit auf $[0, 1]$ anschauen.

Die Funktion $t_u(x) = 0$ ist eine Treppenfunktion mit $t_u(x) \leq f(x)$. Damit findet man

$$0 \leq \int_0^1 t_u(x)dx \leq \underline{\int_0^1} f(x)dx.$$

Sei jetzt $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Man ordnet die Menge

$$Q_k = \left\{\frac{n}{m};\ \text{mit } 0 \leq n \leq m \leq k \text{ und } n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+\right\}$$

zu einer Zerlegung und definiert

$$t_{o,k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } x \notin Q_k, \\ 1 & \text{falls } x \in Q_k. \end{cases}$$

Dann ist $t_{o,k}(x)$ für jedes $k \in \mathbb{N}^+$ eine Treppenfunktion (mit endlich vielen Stufen!) und es gilt $f(x) \leq t_{o,k}(x)$. So findet man

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx \leq \inf_{k \in \mathbb{N}^+} \int_0^1 t_{o,k}(x)dx = \inf_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{k} = 0.$$

Weil das obere Integral und das untere übereinstimmen, ist f integrierbar auf $[0, 1]$.

Beispiel 13.12 *Die Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \textit{für } x > 0, \\ 0 & \textit{für } x = 0, \end{cases}$$

erfüllt auf $[0,1]$ *nicht die Bedingungen aus Definition 13.7, denn die einzig mögliche Obersumme wäre* ∞. *Weil man für die Zerlegung bei einer zugelassenen Treppenfunktion das Intervall nur in endlich viele Stücke teilen darf, gibt es ein Intervall* $(0,\delta)$ *mit* $\delta > 0$. *Die einzige Treppenstufe die da passen würde, hätte eine unendliche Höhe. Dieses Ergebnis ist unbefriedigend und wir werden später sogenannte 'uneigentliche Riemannintegrale' definieren.*

Beispiel 13.13 *Die Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \textit{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

erfüllt auf $[0,1]$ *auch nicht die Bedingungen aus Definition 13.7. Jetzt existieren zwar endliche Obersummen (und Untersummen), aber man findet*

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \textit{ und } \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1.$$

Hier wird das uneigentliche Riemannintegral nicht helfen. Weil die Menge weg von 0 *doch ziemlich dünn ist (abzählbar), möchte man die eigentlich ausschließen. Beim Lebesgue-Integral, dass wir (viel) später anschauen werden, passiert das.*

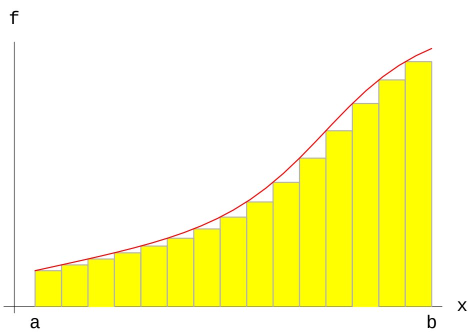
Theorem 13.14 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine monotone Funktion. Dann ist* f *auf* $[a,b]$ *integrierbar.*

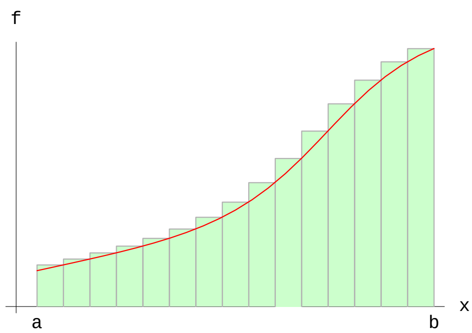
Beweis. Es reicht, wenn wir annehmen f ist wachsend. Erst klären wir mal, dass es eine endliche Obersumme und Untersumme hat. Weil f wächst, ist $(b-a)\, f(b)$ eine Obersumme und $(b-a)\, f(a)$ eine Untersumme.

Wenn wir zeigen können, dass es zu jeder $\varepsilon > 0$ eine Obersumme M und eine Untersumme m gibt derart, dass $M - m < \varepsilon$, dann hat man, dass f auf $[a,b]$ integrierbar ist. Wir wählen nun $k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(b-a)\,(f(b) - f(a)) < k\varepsilon,$$

und betrachten die Zerlegung $\left\{a + \frac{n}{k}(b-a)\right\}_{n=0}^{k}$.





Auf dem Intervall $\left[a + \frac{n}{k}(b-a), a + \frac{n+1}{k}(b-a)\right]$ gilt

$$f\left(a + \tfrac{n}{k}(b-a)\right) \le f(x) \le f\left(a + \tfrac{n+1}{k}(b-a)\right)$$

und wenn man genau diese Werte benutzt für eine Treppenfunktion $h_u \le f$ und für eine Treppenfunktion $h_o \ge f$, hat man

- eine Untersumme $\int_a^b h_u(x)dx = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b-a}{k} f\left(a + \frac{n}{k}(b-a)\right)$, und
- eine Obersumme $\int_a^b h_o(x)dx = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b-a}{k} f\left(a + \frac{n+1}{k}(b-a)\right) = \sum_{n=1}^{k} \frac{b-a}{k} f\left(a + \frac{n}{k}(b-a)\right)$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b h_o(x)dx - \int_a^b h_u(x)dx &= \tfrac{b-a}{k} f\left(a + \tfrac{k}{k}(b-a)\right) - \tfrac{b-a}{k} f\left(a + \tfrac{0}{k}(b-a)\right) = \\ &= \tfrac{b-a}{k}\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Wir bekommen

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

und weil das für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, gleicht das obere Integral dem unteren. ■

Korollar 13.15 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stückweise monoton ist. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.*

Bemerkung 13.15.1 *Die Funktion f heißt stückweise monoton auf $[a,b]$, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ gibt derart, dass $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ für $i \in \{0,n\}$ monoton ist.*

Beweis. Benutze n-mal Theorem 13.8,2 und Theorem 13.14. ■

13.4 Stetigkeit auf $[a,b]$ liefert Integrierbarkeit.

Der Titel dieses Abschnitts enthält explizit ein abgeschlossenes Intervall. Wir werden zeigen, dass man diese Bedingung braucht.

Korollar 13.15 reicht dafür nicht, denn eine Funktion wie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \tag{13.12}$$

ist stetig, aber nicht stückweise monoton. Weil die Menge der stetigen Funktionen noch viel mehr komische Genossen enthält, ist ein Beweis von der Behauptung im Titel des Paragraphen nicht einfach. Wir brauchen vorher den Begriff gleichmäßig stetig.

Definition 13.16 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* gleichmäßig stetig *auf I, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in I$ gilt:*

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 13.16.1 *Wenn man diese Definition zum ersten Mal liest, dann wundert man sich, wo jetzt der Unterschied zu der Definition von gewöhnlicher Stetigkeit liegt. Wir fassen nochmals zusammen:*

- *$f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig auf I heißt:*

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{13.13}$$

- *$f : I \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf I heißt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{13.14}$$

Bei gewöhnlicher Stetigkeit ist es erlaubt, dass δ nicht nur von ε, sondern auch von x abhängt. Bei gleichmäßiger Stetigkeit muss für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existieren, welches zu allen x passt.

Beispiel 13.17 *Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig. Stetigkeit soll klar sein. Nicht gleichmäßig stetig ist die Verneinung von (13.14), das heißt*

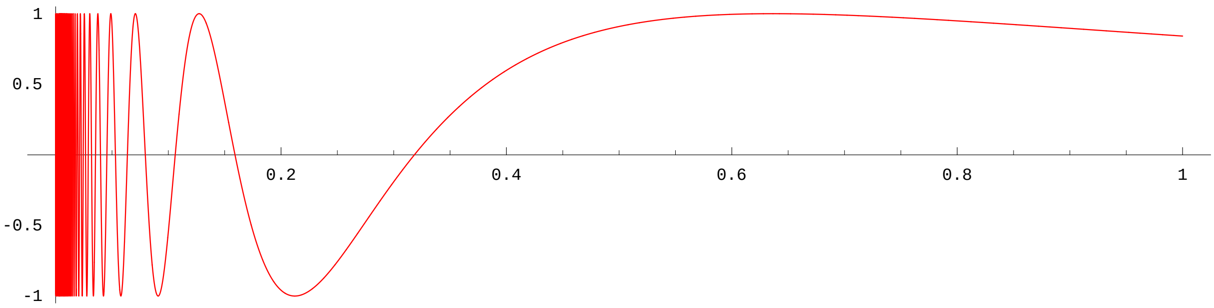
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in I\ \exists y \in I : (|x-y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)\,. \tag{13.15}$$

Nimm $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dann hat es für jede $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}^+$, mit

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n\,(n+1)} < \delta \text{ und } \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Das heißt, $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{n+1}$ erfüllen die Bedingung (13.15) zu „nicht gleichmäßig stetig“.

Beispiel 13.18 *Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig.*



Um zu zeigen, dass sie stetig ist in $x \in (0,1]$, muss man für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (also $\delta = \delta_{\varepsilon,x}$) finden, so dass für alle $y \in (0,1]$ mit $|y-x| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Das klappt, weil f die Zusammensetzung zweier stetiger Funktionen ist (denn $x \neq 0$). Man kann auch direkt finden, dass

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \overset{\textit{Mittelwertsatz}}{\leq} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{xy} \tag{13.16}$$

und damit, dass $\delta_{\varepsilon,x} = \min\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x^2\varepsilon\right)$ passt. Für $|x-y| < \frac{1}{2}x$ gilt

$$y > \frac{1}{2}x, \tag{13.17}$$

und kombiniert man (13.16), (13.17) und $|x-y| < \frac{1}{2}x^2\varepsilon$, folgt

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq \frac{|y-x|}{xy} < \frac{|x-y|}{\frac{1}{2}x^2} < \frac{\frac{1}{2}x^2\varepsilon}{\frac{1}{2}x^2} = \varepsilon.$$

Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig. Dazu müssen wir $\varepsilon > 0$ finden, wobei es kein $\delta > 0$ gibt, das zu allen x und y mit $|x-y| < \delta$ passt. Sei $\varepsilon \in (0,1)$ und $\delta > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n > \frac{1}{\delta}$, und setze $x = \frac{1}{2\pi n + \frac{1}{2}\pi}$ und $y = \frac{1}{2\pi n + \frac{3}{2}\pi}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi} - \tfrac{1}{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}\right| &= \tfrac{\pi}{\left(2\pi n+\frac{1}{2}\pi\right)\left(2\pi n+\frac{3}{2}\pi\right)} < \frac{1}{n} < \delta \text{ und} \\
\left|f\left(\tfrac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi}\right) - f\left(\tfrac{1}{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}\right)\right| &= \left|\sin\left(2\pi n + \tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(2\pi n + \tfrac{3}{2}\pi\right)\right| = 2 > \varepsilon.
\end{aligned}$$

Theorem 13.19 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.*

Beweis. Wir geben einen indirekten Beweis und nehmen an, dass f stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist auf $[a,b]$. Nicht gleichmäßig stetig bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, wobei zu jedem $\delta > 0$ es x und y gibt mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ derartig. Dann kann man auch zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ Zahlen $x_n, y_n \in [a,b]$ finden mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$. Wegen des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Theorem 5.24) gibt es eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, sagen wir $x_{n_k} \to \bar{x}$. Weil das Intervall abgeschlossen ist, gilt $\bar{x} \in [a,b]$. Weil man $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ hat, konvergiert auch $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nach $\bar{x}$. Anschließend verwendet man die Stetigkeit von f in $\bar{x}$, und es gibt $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$k > K_1 \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(\bar{x})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{und} \quad k > K_2 \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(\bar{x})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Für $k > \max(K_1, K_2)$ gilt dann

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon,$$

ein Widerspruch. ■

Theorem 13.20 *Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Weil f stetig ist, ist auch $|f|$ stetig und es gibt $M = \max\{|f(x)|; x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$. Dann ist $M(b-a)$ eine Obersumme und $-M(b-a)$ eine Untersumme. Wegen 13.19 ist f gleichmäßig stetig und wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ finden, so dass für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nehmen wir $\delta_{\frac{1}{4}\varepsilon/|b-a|}$ und konstruieren wir eine Zerlegung $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ mit $x_i = a + k\frac{|b-a|}{n}$, wobei wir $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$\frac{|b-a|}{n} < \delta_{\frac{1}{4}\varepsilon/|b-a|}.$$

Als nächstes definieren wir

$$\begin{aligned}
t_o(x) &= f(x_k) + \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon \text{ falls } x \in [x_k, x_{k+1}), \\
t_u(x) &= f(x_k) - \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon \text{ falls } x \in [x_k, x_{k+1}).
\end{aligned}$$

Man zeigt sofort, dass die Treppenfunktionen t_o und t_u eine Obersumme M und eine Untersumme m liefern und weil

$$t_o(x) - t_u(x) = \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon,$$

folgt

$$M - m = \int_a^b t_o(x)dx - \int_a^b t_u(x)dx = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Proposition 13.10 schließt den Beweis. ■

13.5 Eigenschaften von Integralen

Ganz formell kann man das Integral betrachten als eine Abbildung $\mathcal{I} : R\,[a,b] \to \mathbb{R}$. Mit $R\,[a,b]$ werden die Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ gemeint, und $\mathcal{I}$ ist jetzt

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ für alle } f \in R\,[a,b]\,.$$

Eine Abbildung, die definiert ist auf Funktionen, wird meistens 'Operator' genannt. Der Operator $\mathcal{I}$ heißt *linear*, wenn

$$\mathcal{I}\,(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathcal{I}\,(f) + \mu\,\mathcal{I}\,(g) \text{ für alle } f,g \in E_1 \text{ und } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}). \tag{13.18}$$

Theorem 13.8-1 sagt genau, dass dieses $\mathcal{I}$ ein linearer Operator ist. Diese lineare Eigenschaft ist gültig für $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ und auch für $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 13.20.1 *Wenn man $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt durch eine Funktion in (13.18), bekommt man fast immer Unsinn, denn für fast alle Funktionen und $b \neq a$ hat man*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \quad \neq \quad f(x)\int_a^b g(x)dx,$$

(links ist x nur Notationshilfe und rechts auch noch Variable?) und auch

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \quad \neq \quad \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

Die Versuche, in Klausuren und Seminaren trotzdem angeblich existierende Identitäten in dieser Richtung zu verwenden, führen bei dem Unterichtspersonal zu Stirnrunzeln und Haarausfall und können sogar leichte Depressionen auslösen. Haben Sie Mitleid!

Obwohl es beim Integral des Produkts zweier Funktionen keine direkte Rechenbeziehung gibt zu den beiden einzelnen Integralen, kann man schon etwas sagen:

Proposition 13.21 *Wenn $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind auf $[a,b]$, dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Wenn f integrierbar ist, dann ist f beschränkt (Proposition 13.9), sagen wir $|f(x)| \leq F \in \mathbb{R}$ für $x \in [a,b]$. Ebenso darf man annehmen, dass $|g(x)| \leq G$ für $x \in [a,b]$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Untersummen m_f, m_g und Obersummen M_f, M_g für f und g derart, dass

$$M_f - m_f < \frac{\varepsilon}{4G+1} \text{ und } M_g - m_g < \frac{\varepsilon}{4F+1}. \tag{13.19}$$

Nennen wir die dazugehörenden Treppenfunktionen $h_{u,f}$, $h_{o,f}$, $h_{u,g}$ und $h_{o,g}$. Wir dürfen annehmen, dass

$$-F \leq h_{u,f}(x) \leq f(x) \leq h_{o,f}(x) \leq F$$

und auch

$$-G \leq h_{u,g}(x) \leq g(x) \leq h_{o,g}(x) \leq G$$

Leider kann man nicht einfach die beiden unteren Treppenfunktionen multiplizieren um eine Treppenfunktion unterhalb von $f \cdot g$ zu bekommen. Das Vorzeichen kann da Probleme verursachen. Deshalb benutzen wir einen Trick. Wir werden nicht $f \cdot g$, sondern $(f + F) \cdot$

$(g+G)$ betrachten. Sowohl $f+F$ als $g+G$ sind positiv. Dann haben wir nicht-negative Treppenfunktionen $(h_{u,f}+F)\cdot(h_{u,g}+G)$ und $(h_{o,f}+F)\cdot(h_{o,g}+G)$ mit

$$0 \leq (h_{u,f}+F)\,(h_{u,g}+G) \leq (f+F)\,(g+G) \leq (h_{o,f}+F)\,(h_{o,g}+G)\,.$$

Mit den in (13.19) gewählten Ober- und Untersummen für f und g hat man nun eine Obersumme M^* und eine Untersumme m^* für $(f+F)\cdot(g+G)$ derart, dass

$$\begin{aligned}
M^* - m^* &= \int_a^b (h_{o,f}+F)\,(h_{o,g}+G)\,dx - \int_a^b (h_{u,f}+F)\,(h_{u,g}+G)\,dx = \\
&\quad \text{(bei Treppenfunktionen darf man neu kombinieren)} \\
&= \int_a^b (h_{o,f}+F)\,(h_{o,g}-h_{u,g})\,dx + \int_a^b (h_{o,f}-h_{u,f})\,(h_{u,g}+G)\,dx \leq \\
&\quad \text{(positive Glieder und Abschätzen bei Treppenfunktionen)} \\
&\leq \int_a^b 2F\,(h_{o,g}-h_{u,g})\,dx + \int_a^b (h_{o,f}-h_{u,f})\,2G dx = \\
&= 2F\,(M_g - m_g) + 2G\,(M_f - m_f) \leq \\
&\leq 2F\frac{\varepsilon}{4F+1} + 2G\frac{\varepsilon}{4G+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proposition 13.10 liefert, dass $(f+F)\,(g+G)$ integrierbar ist. Jetzt brauchen wir noch ein Argument, damit $f\cdot g$ integrierbar ist. Weil

$$f\cdot g = (f+F)\,(g+G) - Fg - Gf - FG \tag{13.20}$$

und weil F und G Konstanten sind, können wir Theorem 13.8 verwenden. Weil die rechte Seite von (13.20) nur integrierbare Funktionen enthält, steht auch links eine integrierbare Funktion. ■

Proposition 13.22 *Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist auch $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Definieren wir für $x\in[a,b]$,

$$f^+(x) = \max\left(0, f(x)\right) \text{ und } f^-(x) = -\min\left(0, f(x)\right).$$

Die Funktionen f^+ und f^- sind nicht-negativ und man hat $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

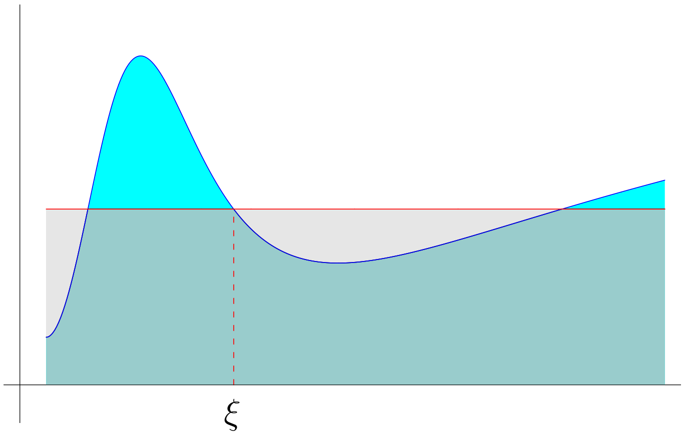
Wenn h_0 und h_u Treppenfunktionen oberhalb und unterhalb von f sind, dann sind $\max(0,h_o)$ und $\max(0,h_u)$ passende Treppenfunktionen für f^+. Für die dazugehörenden Ober- und Untersummen zeigt man

$$M_{f^+} - m_{f^+} \leq M_f - m_f.$$

Für f^- sind $-\min(0,h_u)$ und $-\min(0,h_o)$ passende Treppenfunktionen oberhalb und unterhalb (in dieser Reihenfolge!). Der Rest folgt aus Proposition 13.10. ■

Theorem 13.23 (Mittelwertsatz für Integrale) *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist auf $[a,b]$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi).$$



Die rote Linie gibt die mittlere Höhe.

Beweis. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert wegen Theorem 10.21 $m_1 = \min \{f(x); x \in [a,b]\}$ und $m_2 = \max \{f(x); x \in [a,b]\}$. Es folgt, dass

$$m_1 (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq m_2 (b-a).$$

Der Zwischenwertsatz (Korolar 10.20) ergibt, dass für jede Zahl $c \in (m_1, m_2)$ ein $\xi \in (a,b)$ existiert mit $f(\xi) = c$. Also gibt es ξ mit $f(\xi) = (b-a)^{-1} \int_a^b f(x)dx$. ■

Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist f auch integrierbar auf $[a,x]$ für jedes $x \in [a,b]$. Also ist die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{13.21}$$

wohldefiniert.

Theorem 13.24 *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ in (13.21) stetig und sogar Lipschitz-stetig.*

Beweis. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, gibt es $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$. Sei $x_0 \in [a,b)$. Dann gilt für $x \in (x_0, b]$, dass

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds \right| = \left| \int_{x_0}^x f(s)ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s)|\, ds \leq M(x - x_0).$$

Eine ähnliche Abschätzung folgt für $x \in [a, x_0)$. Dann ist F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante M. Lipschitz-stetig impliziert stetig. ■

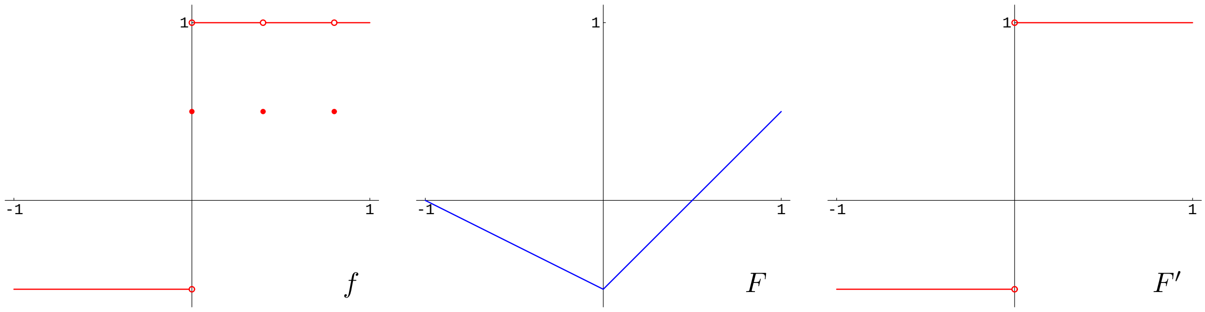
Beispiel 13.25 *Nehmen wir* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } x \in [-1, 0)\,, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann findet man

$$F(x) := \int_{-1}^{x} f(s)ds = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \text{für } x \in [-1, 0)\,, \\ -\frac{1}{2} + x & \text{für } x \in [0, 1]\,. \end{cases}$$

Übrigens hat man $F' \neq f$. *In* 0 *existiert* F' *sogar nicht.*



Analysis 1, Woche 14

Integralrechnung II

14.1 Der Hauptsatz der Integralrechnung

In der letzten Woche haben wir angeschaut, wie man das Integral definieren kann. Damit lässt sich zwar ein Flächeninhalt approximieren, aber einfache Rechenregeln fehlen noch. Jetzt vermutet aber jeder, dass Integrieren etwas mit Rückwärts-Differenzieren zu tun hat. Es sei aber betont, dass Integrieren nicht nur das Finden einer Stammfunktion ist. Der Hauptsatz der Integralrechnung beschreibt genau diesen Zusammenhang.

Theorem 14.1 (Hauptsatz der Integralrechnung I) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$, und definiere $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds. \tag{14.1}$$

Wenn f stetig ist in $c \in (a,b)$, dann ist F differenzierbar in c und $F'(c) = f(c)$.

Bemerkung 14.1.1 *Man kann sogar folgendes beweisen:*

- *Wenn f rechtsstetig ist in $c \in [a,b)$, dann ist F rechtsdifferenzierbar in c und*
$$F'_+(c) = f(c).$$
- *Wenn f linksstetig ist in $c \in (a,b]$, dann ist F linksdifferenzierbar in c und*
$$F'_-(c) = f(c).$$

Bemerkung 14.1.2 *Wenn f stetig ist auf $[a,b]$, dann ist F differenzierbar in (a,b), rechtsdifferenzierbar in a und linksdifferenzierbar in b, und $F'(c) = f(c)$ für $c \in (a,b)$, $F'_+(a) = f(a)$ und $F'_-(b) = f(b)$.*

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage in Bemerkung 14.1.1.

Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = 0.$$

Bemerkt man, dass $f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)ds$, dann folgt aus den Eigenschaften, die wir in Theorem 13.8 aufgelistet haben, dass

$$\begin{aligned} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c) &= \frac{\int_a^{c+h} f(s)ds - \int_a^c f(s)ds}{h} - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)ds = \\ &= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \left(f(s)-f(c)\right) ds. \end{aligned}$$

Wenn f rechtsstetig ist in c, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{f,\varepsilon} > 0$ derart, dass für alle $x \in (c, c+\delta)$ gilt

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Nehmen wir $h \in [0, \delta_{f,\varepsilon})$ dann haben wir, mit Proposition 13.22, dass

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(s)-f(c)|\, ds \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \varepsilon ds = \varepsilon.$$

Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (zum Beispiel $\delta_{f,\varepsilon/2}$ um eine starke Ungleichung zu bekommen), so dass

$$0 < h < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Das ist genau das, was wir zeigen sollten. ■

Definition 14.2 *Sei (a, b) ein Intervall in $\mathbb{R}$. Nehme an $f, F : (a, b) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) sind Funktionen und F ist differenzierbar in (a, b). Wenn*

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (a, b)$$

dann nennt man F eine Stammfunktion *zu f.*

Lemma 14.3 *Wenn F und $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) beide eine Stammfunktion zu f sind, dann gibt es eine Konstante $k \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) derart, dass*

$$F(x) = G(x) + k \text{ für alle } x \in (a, b).$$

Beweis. Nehme $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$. Dann sind F und G stetig auf $[x_1, x_2]$, und der Mittelwertsatz besagt, dass es $\xi \in (x_1, x_2)$ gibt mit

$$\frac{(F(x_2) - G(x_2)) - (F(x_1) - G(x_1))}{x_2 - x_1} = F'(\xi) - G'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0.$$

Setzen wir $k = F(x_0) - G(x_0)$ für irgendein $x_0 \in (a, b)$, so folgt $F(x) - G(x) = k$ für jedes $x \in (a, b)$. ■

Bemerkung 14.3.1 *Es wird oft gesagt, dass $\ln|x|$ eine Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$ ist. Diese Aussage ist nicht sehr genau. Wenn man die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ betrachtet, dann ist $x \mapsto \ln|x| : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Wenn man die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ betrachtet, dann ist $x \mapsto \ln|x| : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Die Formeln sind zwar gleich, aber weil Stammfunktionen auf einem zusammenhängenden Intervall definiert sind, sagt man nicht $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ hat $x \mapsto \ln|x| : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion.*

Oben sahen wir, wie man zu f formell eine „Stammfunktion" F findet. Das Komplement zu diesem Theorem ist, wie eine Stammfunktion bei Berechnen des Integrals hilfreich ist.

Theorem 14.4 (Hauptsatz der Integralrechnung II) *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar*[1] *auf $[a, b]$. Setze $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} F'_+(a) & \text{für } x = a, \\ F'(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ F'_-(b) & \text{für } x = b. \end{cases} \tag{14.2}$$

Dann gilt

$$\int_y^x f(s)ds = F(x) - F(y) \text{ für alle } x, y \in [a, b].$$

Beweis. Weil F stetig differenzierbar ist, ist f stetig. Dann ist f auch integrierbar und $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$G(x) = \int_y^x f(s)ds$$

wohldefiniert; $y \in [a, b]$ ist fest gewählt. Aus Theorem 14.1 folgt $G'(x) = f(x)$ und mit Lemma 14.3 folgt $F(x) = G(x) + k$ für alle $x \in [a, b]$. Nehmen wir $x = y$, so folgt $F(y) = G(y) + k = k$, und das heißt

$$F(x) = G(x) + F(y) = \int_y^x f(s)ds + F(y) \text{ für } x \in [a, b].$$

■

14.2 Partielle Integration

Proposition 14.5 *Wenn $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind, und $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$ mit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind stetig, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)dx.$$

Bemerkung 14.5.1 *Hier wird die folgende kurze Notation benutzt:*

$$[F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Beweis. Man hat

$$(F \cdot G)'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

und mit Theorem 14.4 folgt

$$\int_a^b (f(x)G(x) + F(x)g(x))\, dx = (F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a).$$

■

[1] Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf $[a, b]$, wenn F stetig ist, $F_{|(a,b)}$ differenzierbar ist, $F'_+(a)$ und $F'_-(b)$ existieren und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} F'_+(a) & \text{für } x = a, \\ F'(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ F'_-(b) & \text{für } x = b, \end{cases}$$

stetig ist.

Beispiel 14.6 *Berechne* $\int_0^\pi x\sin(x)dx$.

Wir nennen $G(x) = x$ *und* $f(x) = \sin(x)$ *und bekommen*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)dx &= [x\ \ (-\cos(x))]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 1\ \ (-\cos(x))\,dx = \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\cos(0) + \int_0^\pi \cos(x)dx = \\ &= \pi + [\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Beispiel 14.7 *Berechne* $\int_0^\pi e^x\sin(x)dx$.

Wir nennen $G(x) = e^x$ *und* $f(x) = \sin(x)$ *und bekommen*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x\sin(x)dx &= [e^x\ \ (-\cos(x))]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x\ \ (-\cos(x))\,dx = \\ &= e^\pi + 1 + \int_0^\pi e^x\ \ \cos(x)dx.\end{aligned}$$

Nochmals, jetzt mit $G(x) = e^x$ *und* $f(x) = \cos(x)$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x\cos(x)dx &= [e^x\ \ \sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x\ \ \sin(x)dx = \\ &= -\int_0^\pi e^x\ \ \sin(x)dx.\end{aligned}$$

Zusammen liefert es

$$\int_0^\pi e^x\sin(x)dx = e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x\ \ \sin(x)dx$$

und

$$\int_0^\pi e^x\sin(x)dx = \frac{e^\pi+1}{2}.$$

14.3 Substitutionsregel

Proposition 14.8 *Wenn* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar ist und* $f : g[a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig ist, dann gilt*

$$\int_a^b (f\circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \tag{14.3}$$

Man schreibt $g[a,b] = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in [a,b]\ \text{ mit } y = g(x)\}$.

Bemerkung 14.8.1 *Grob gesagt: wenn* $y = g(x)$ *ersetzt wird, muss man auch* $dy = d(g(x)) = g'(x)dx$ *ersetzen. Im Moment hat ein loses* dy, $d(g(x))$ *und* dx *ohne Integral keine Bedeutung. Als Trick funktioniert es.*

Beweis. Definiere $F : g[a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(y) = \int_{g(a)}^{y} f(s)ds$$

und $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) = (F \circ g)(x) = \int_{g(a)}^{g(x)} f(s)ds.$$

Wegen Theorem 14.1 ist F differenzierbar, also ist wegen der Kettenregel auch H differenzierbar, und es gilt

$$H'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = (f \circ g)(x)\ g'(x).$$

Dann gilt auch

$$H(x) = H(x) - H(a) = \int_a^x (f \circ g)(s)\ g'(s)ds.$$

■

Bemerkung 14.8.2 *Wir sind davon ausgegangen, dass man bei einem Integral $\int_a^b f(x)dx$ die Grenzen so anordnet, dass $a < b$. Bei dieser Substitutionsregel ist es vernünftig auch $a > b$ zu erlauben:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Wenn g monoton wachsend ist, dann wird (14.3)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_a^b (f \circ g)(x)\ \left|g'(x)\right| dx;$$

wenn sie monoton fallend ist, bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)dy &= \int_b^a (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \\ &= -\int_a^b (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_a^b (f \circ g)(x)\ \left|g'(x)\right| dx. \end{aligned}$$

Für monotone Funktionen g kann man diese beiden Identitäten zusammenfassen in:

$$\int_{g([a,b])} f(y)dy = \int_{[a,b]} (f \circ g)(x)\ \left|g'(x)\right| dx. \tag{14.4}$$

Für nicht-monotone Funktionen ist (14.3) auch gültig, aber für (14.4) braucht man eine eineindeutige Funktion g.

Beispiel 14.9 *Berechne $\displaystyle\int_0^x se^{-s^2} ds$.*

Man nimmt $g(x) = x^2$ und findet

$$\int_0^x se^{-s^2} ds = \tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-s^2} 2sds = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} e^{-t}dt = \tfrac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^{x^2} = \frac{1-e^{-x^2}}{2}.$$

Beispiel 14.10 *Berechne $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+x^4}dx$.*

Man nimmt $g(x) = 1 + x^2$ und findet

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+x^4}dx &= \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1+x^2}dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \\ &= \int_1^2 \sqrt{y}dy = \left[\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right]_1^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

14.4 Kalkül bei Integralen

Bis vor 30 Jahren war das Berechnen von expliziten Formeln für Stammfunktionen ein wichtiger Bestandteil von jedem Anfängerkurs in Mathematik. Heutzutage überlässt man diese Arbeit meistens Maple, Mathematica oder anderen Programmen in dieser Richtung. Diese Programme laufen übrigens nicht durch außerirdische Inspiration, wie einige zu vermuten scheinen, sondern werden entworfen mit mathematischer Transpiration. Aber wie schlau man auch programmieren mag, viele Funktionen haben keine Stammfunktion, die sich schreiben lässt als Zusammensetzung bekannter Funktionen. Ein erster Versuch, trotzdem explizit-aussehende Lösungen zu haben ist, weitere Funktionen zu definieren. Wir haben schon Sinus und Cosinus eingeführt und da könnte man noch mehrere definieren. Das Benennen von neuen Funktionen führt zu nichts, wenn man nicht gleichzeitig die Eigenschaften dieser Funktionen studiert. Dann sind wir wieder dort angekommen wo wir schon waren. Wir werden in diesem Paragraph einige Integrale vorstellen, bei welchen sich explizit eine Stammfunktion beschreiben lässt mit Hilfe bekannter Funktionen. Wenn wir auf irgendeine Art eine Stammfunktion mit Hilfe bekannter Funktionen finden können, können wir oft auch leichter Eigenschaften ableiten.

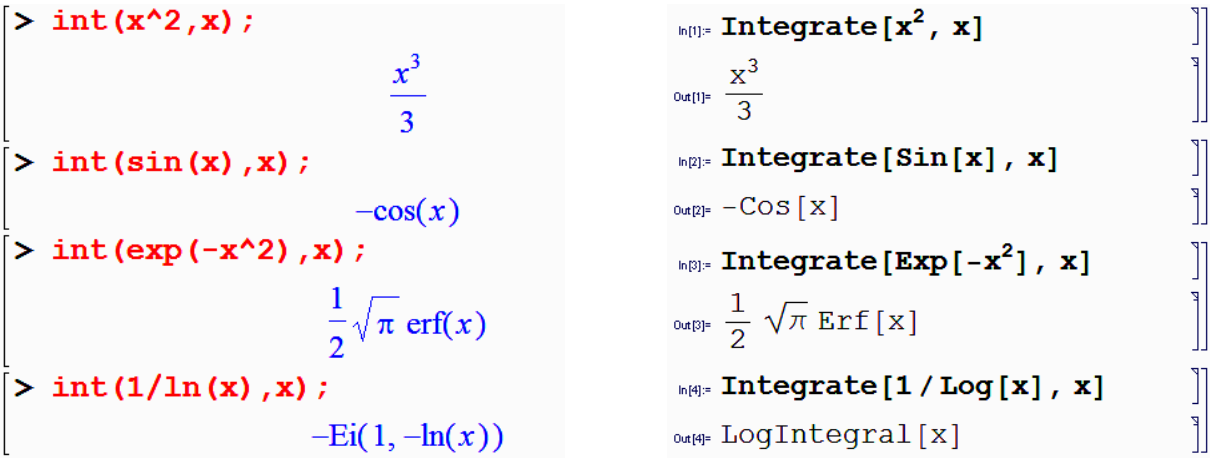


Abbildung 14.1: Einige Stammfunktionen, die Maple (links) und Mathematica herausgeben. Ei hat nichts mit Huhn zu tun, sondern ist eine Abkürzung von dem sogenannten 'exponential integral'.

14.4.1 Integration von rationalen Funktionen

Wir erinnern uns noch mal daran, dass eine rationale Funktion r folgende Vorschrift hat:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind. In diesem Paragraphen möchten wir zeigen, wie man zu r eine Stammfunktion findet.

Bevor wir etwas integrieren, werden wir eine Erweiterung des Logarithmus definieren auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$. Dazu verwenden wir eine Argumentfunktion $\arg(z):\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{Arg}(z) & \text{für } \operatorname{Arg}(z)\in[0,\pi]\,, \\ \operatorname{Arg}(z)-2\pi & \text{für } \operatorname{Arg}(z)\in(\pi,2\pi)\,. \end{cases}$$

Das heißt, für $z = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ mit $\varphi\in(-\pi,\pi]$ und $r\in\mathbb{R}^+$ gilt $\arg(z)=\varphi$.

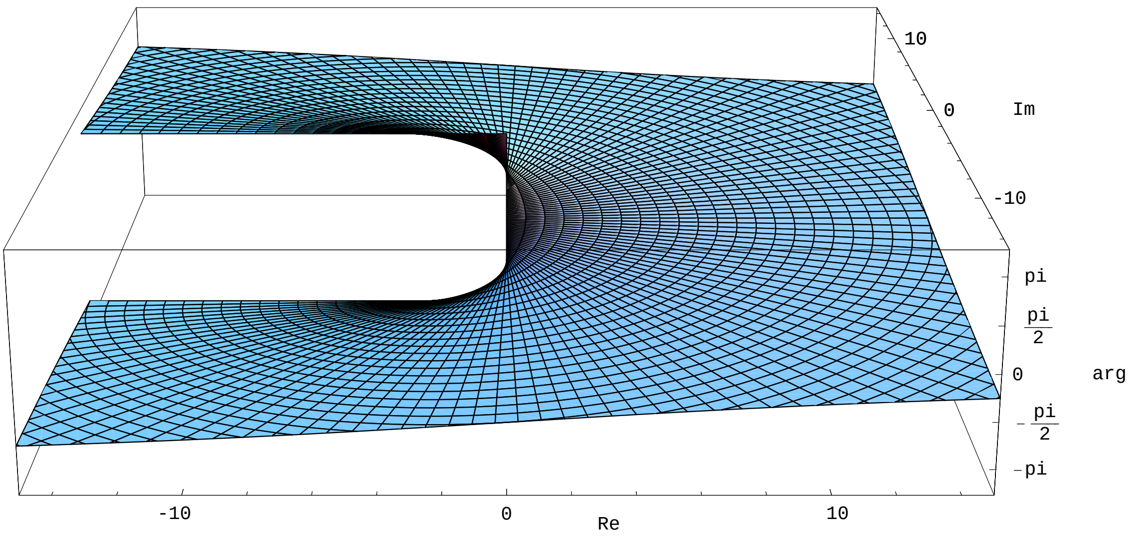


Abbildung 14.2: Eine Skizze zu der Funktion $\arg : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

Definition 14.11 *Wir definieren* $\operatorname{Log} : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \arg(z).$$

Dieser Log ist injektiv und weil $\operatorname{Log}(\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]) = \mathbb{R} + i(-\pi, \pi)$, gibt es eine Umkehrfunktion. Diese Funktion ist eine alte Bekannte. Weil

$$\exp(\operatorname{Log}(z)) = \exp(\ln(|z|)) \exp(i \arg(z)) = |z| (\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))) = z$$

gilt

$$\operatorname{Log}^{inv}(z) = \exp_{|\mathbb{R}+i(-\pi,\pi)}(z).$$

So hat man

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{\exp'(\operatorname{Log}(z))} = \frac{1}{\exp(\operatorname{Log}(z))} = \frac{1}{z}$$

und es gilt auch für die reelle Ableitung von $x \mapsto \operatorname{Log}(x + w) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, oder $x \mapsto \operatorname{Log}(x + w) : \mathbb{R}\backslash(-\infty, -w] \to \mathbb{C}$ falls $w \in \mathbb{R}$, dass

$$(\operatorname{Log}(x + w))' = \frac{1}{x + w}.$$

Lemma 14.12 *Sei* $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *und* $f(x) = (x + w)^{-1}$. *Dann ist* $F(x) = \operatorname{Log}(x + w)$ *eine Stammfunktion.*

Bemerkung 14.12.1 *Eine genaue Formulierung dieses Lemmas müsste das Definitionsgebiet der Funktion einschließen. Für* $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *ist sowohl* f *als auch* F *auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert als Funktion von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{C}$.

Bemerkung 14.12.2 *Für* $w \in \mathbb{R}$ *kann man entweder die Funktion* $f : (-w, \infty) \to \mathbb{R}$ *oder die Funktion* $f : (-\infty, -w) \to \mathbb{R}$ *betrachten. Die Vorschriften der dazugehörenden Stammfunktionen sind* $F(x) = \ln(x + w)$ *und* $F(x) = \ln|x + w|$.

Es ist nützlich folgende Eigenschaft von diesem erweiterten Logarithmus festzuhalten.

Lemma 14.13 *Für* $z, w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *mit* $zw \notin \mathbb{R}^-$ *gibt es* $k \in \{-1, 0, 1\}$ *derart, dass*

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) + 2k\pi i. \tag{14.5}$$

Beweis. Der Beweis ist geradeaus und verwendet, dass $\ln(|zw|) = \ln(|z|) + \ln(|w|)$ gilt, und, wenn $\arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi)$, dass

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Wenn $\arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi)$, dann gilt sogar

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w). \tag{14.6}$$

Wenn $\arg(z) + \arg(w) \notin (-\pi, \pi)$, dann gilt $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pm 2\pi$ und man bekommt (14.5). ■

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ zeigt man, dass für $F : \mathbb{C}\backslash \{-w\} \to \mathbb{C}$ mit $F(z) = \frac{-1}{n-1} (z + w)^{-n+1}$ gilt $F'(z) = (z + w)^{-n}$. Solches gilt für die reelle Ableitung. Mit der Partialbruchzerlegung kann man jede rationale Funktion $p(x)/q(x)$ schreiben als eine Summe von einem Polynom und singulären Termen $c_i (x - w_i)^{-n_i}$. Wenn wir eine solche Zerlegung finden können, kennen wir also auch eine Stammfunktion.

Beispiel 14.14 *Wir suchen eine Stammfunktion für* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *Wenn wir uns erinnern, dass* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *sind wir fertig. Wenn nicht, dann kann man wie folgt vorgehen:*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{\frac{1}{2}i}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}i}{x-i}.$$

Eine Stammfunktion findet man wie folgt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{1}{2}i \operatorname{Log}(x+i) - \tfrac{1}{2}i \operatorname{Log}(x-i) = \\ &= \tfrac{1}{2}i (\ln|x+i| + i \arg(x+i)) - \tfrac{1}{2}i (\ln|x-i| + i \arg(x-i)) = \\ &= -\tfrac{1}{2} \arg(x+i) + \tfrac{1}{2} \arg(x-i) = -\arg(x+i) = \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \arctan(x) - \tfrac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

Die letzten Gleichungen findet man, wenn man sich die Darstellung in $\mathbb{C}$ *anschaut. Selbstverständlich ist auch* $F(x) = \arctan(x)$ *eine Stammfunktion.*

Man sieht in diesem Beispiel, dass der Umweg über komplexe Funktionen uns am Ende doch wieder zum Reellen zurückführt. Selbstverständlich soll das so sein, denn das Integral von einer reellen Funktion, wenn es existiert, ist definiert als eine reelle Zahl. Dass auch dieser Umweg da kein Problem ist, kann man verstehen, wenn man sich erinnert, dass komplexe Nullstellen mit nicht-trivialem Imaginärteil eines reellen Polynoms immer paarweise auftreten, in dem Sinne, dass die komplex Konjugierte einer Nullstelle auch eine Nullstelle ist. Das führt dazu, dass auch in der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion mit reellen Koeffizienten die singulären Terme paarweise erscheinen:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \tilde{p}(x) + \frac{\alpha_1}{x - w_1} + \frac{\overline{\alpha_1}}{x - \overline{w_1}} + \dots$$

14.4.2 Integration von trigonometrischen Polynomen

Ein trigonometrisches Polynom ist eine Verknüpfung von:

$$x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$$

$$(s, t) \mapsto \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq n \leq m}} a_{n,k} s^k t^n$$

mit $a_{n,k} \in \mathbb{C}$. Zum Beispiel

$$g(x) = 1 + \cos(x) + 3\sin(x)^2 \cos(x)^2 \tag{14.7}$$

ist ein trigonometrisches Polynom.

Auch hier hilft der Weg über komplexe Funktionen. Erinnern wir uns, dass

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ und } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

dann folgt sofort eine Stammfunktion für ein trigonometrisches Polynom, wenn wir eine Stammfunktion für eine bestimmte rationale Funktion finden können.

Für das Beispiel in (14.7) findet man eine Stammfunktion via

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + 3\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \\ &= \tfrac{11}{8} + \tfrac{1}{2}e^{ix} + \tfrac{1}{2}e^{-ix} - \tfrac{3}{16}e^{4ix} - \tfrac{3}{16}e^{-4ix}, \end{aligned}$$

nämlich

$$\begin{aligned} G(x) &= \tfrac{11}{8}x - \tfrac{1}{2}ie^{ix} + \tfrac{1}{2}ie^{-ix} + \tfrac{3}{64}ie^{4ix} - \tfrac{3}{64}ie^{-4ix} = \\ &= \tfrac{11}{8}x + \sin(x) - \tfrac{3}{32}\sin(4x). \end{aligned}$$

Man kann es auch ohne komplexe Schreibweise mit dem Exponent lösen, aber man muss sich dann gut auskennen bei den Eigenschaften von Sinus und Cosinus.

14.4.3 Integration von rationalen Funktionen mit Exponent

So eine Funktion mit Exponent, die wir meinen, ist eine Zusammenstellung von

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & e^{ax} & & \\ & & y & \mapsto & \frac{p(y)}{q(y)}. \end{array}$$

Hier sind p und q zwei Polynome. Also betrachten wir Funktionen vom Typ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \frac{p(e^{ax})}{q(e^{ax})}.$$

Wenn man bemerkt, dass die Substitutionsregel ergibt, dass

$$\int_0^x \frac{p(e^{at})}{q(e^{at})}\, dt = \frac{1}{a}\int_1^{e^{ax}} \frac{p(s)}{q(s)\ s}\, ds,$$

ist man zurück bei einer Stammfunktion für eine rationale Funktion.

Auch für eine Funktion mit der Vorschrift

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

kann man so eine explizite Stammfunktion finden auf $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\cos(s)} ds &= \int_0^x \frac{2}{e^{is}+e^{-is}} ds = \int_0^x \frac{2e^{is}}{\left(e^{is}\right)^2+1} ds = \frac{1}{i}\int_1^{e^{ix}} \frac{2}{t^2+1} dt = \\
&= \int_1^{e^{ix}} \left(\frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i}\right) dt = \left[\operatorname{Log}(t+i) - \operatorname{Log}(t-i)\right]_1^{e^{ix}} = \\
&= \ln \left| \frac{e^{i\,x}+i}{e^{i\,x}-i} \frac{1+i}{1-i} \right| = \ln \left| \frac{\cos(x) + i\left(\sin(x)+1\right)}{\cos(x) + i\left(\sin(x)-1\right)} \right| = \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\cos(x)^2 + \left(\sin(x)+1\right)^2}}{\sqrt{\cos(x)^2 + \left(\sin(x)-1\right)^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+2\sin(x)}{2-2\sin(x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right).
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir (14.5) verwendet. Weil wir wissen, dass das Ergebnis reell sein muss, brauchen wir uns nicht zu kümmern um den Imaginärteil (ist sowieso Null). Auch gibt es noch eine komplexe Zahl als Grenze im Integral und das haben wir nicht definiert. Egal, beim Kalkül und in der Liebe ist alles erlaubt, wenn am Ende bloß alles richtig ist:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\right)' &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} \frac{\cos(x)\left(1-\sin(x)\right) - \left(1+\sin(x)\right)\left(-\cos(x)\right)}{\left(1-\sin(x)\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2\cos(x)}{\left(1+\sin(x)\right)\left(1-\sin(x)\right)} = \frac{1}{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Im Prinzip kann man so auch eine Stammfunktion finden für

$$h(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Es wäre einfacher, wenn man sich an die Ableitung von $x \mapsto \tan(x)$ erinnern würde.

Beispiel 14.15 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)\sin(x)^2}.$$

Formal hat man zum Beispiel als Stammfunktion auf $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ *die folgende Funktion:*

$$F(x) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^x \frac{1}{\cos(s)\sin(s)^2} ds.$$

Wir versuchen diese Funktion zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{4}\pi}^x \frac{1}{\cos(s)\sin(s)^2} ds &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^x \frac{\cos(s)^2+\sin(s)^2}{\cos(s)\sin(s)^2} ds = \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^x \left(\frac{\cos(s)^2}{\cos(s)\sin(s)^2} + \frac{\sin(s)^2}{\cos(s)\sin(s)^2}\right) ds = \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^x \frac{\cos(s)}{\sin(s)^2} ds + \int_{\frac{1}{4}\pi}^x \frac{1}{\cos(s)} ds = \\
&= \frac{-1}{\sin(x)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + c.
\end{aligned}$$

Was genau dieses c ist, ist nicht weiter wichtig. Wir suchen bloß eine Stammfunktion. Wenn man eine Konstante addiert, hat man wieder eine Stammfunktion.

14.4.4 Integration bei quadratischen Wurzeln aus Polynomen von Grad 2

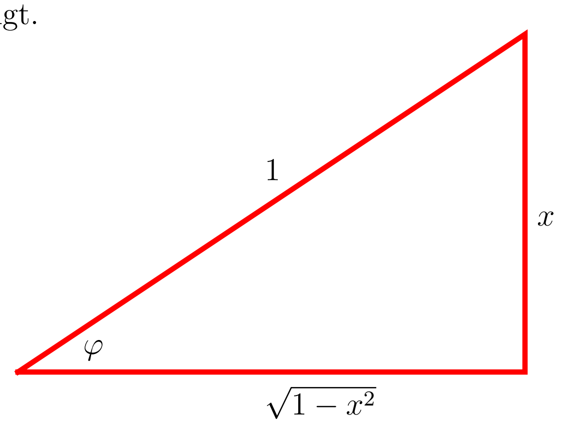
Wir möchten erinnern an einige Umkehrfunktionen, denen wir schon begegnet sind.

- Der eingeschränkte Sinus $x \mapsto \sin_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)$ hat als Umkehrfunktion den Arcussinus $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und
$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- Der Sinus hyperbolicus $x \mapsto \sinh(x)$ hat als Umkehrfunktion den Areasinus hyperbolicus $\sinh^{inv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sinh^{inv}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ und
$$\sinh^{inv}(x)' = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
- Der eingeschränkte Cosinus hyperbolicus $x \mapsto \cosh_{[0,\infty)}(x)$ hat als Umkehrfunktion $\cosh^{inv}_{[0,\infty)} : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\cosh^{inv}_{[0,\infty)}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ und
$$\cosh^{inv}_{[0,\infty)}(x)' = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Wir finden so nicht nur Stammfunktionen für $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, sondern wir finden vernünftige Substitutionen für eine ganze Reihe von Beispielen. Oft hilft es dabei sich die Termen in ein rechteckiges Dreieck anzugeben. Für

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

funktioniert es wie folgt.



Mit Hilfe des Dreiecks findet man

$$x = \sin(\varphi), \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(\varphi) \text{ und } \tan(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dies liefert uns „$dx = \cos(\varphi)\, d\varphi$“ und

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(t)} \frac{1}{\cos(\varphi)} \cos(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\arcsin(t)} 1 d\varphi = \arcsin(t).$$

Beispiel 14.16 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Weil

$$\frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

scheint $y=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ *eine vernünftige Substitution zu sein. Ein Versuch kann nicht schaden:*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s+s^2}}ds &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^x \frac{\frac{2s+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{2s+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\frac{2}{\sqrt{3}}ds = \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy = \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{1+y^2}-\tfrac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} = \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)+c = \\
&= \sqrt{1+x+x^2}-\tfrac{1}{2}\ln\left(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+\tilde{c}.
\end{aligned}$$

Fast immer gibt es kürzere Wege zum Ziel. Bevor man den kürzesten Weg kennt, soll man aber mindestens einen Weg kennen.

Beispiel 14.17 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

auf dem Intervall $(-1,1)$. *Ob man geradeaus zurückgreifen kann auf eine dieser oben genannten Funktionen ist nicht klar, aber man könnte an den Arcussinus denken. Das heißt* $y=\arcsin(x)$ *oder* $x=\sin(y)$ *setzen. Wir substituieren* $\arcsin(s)=t$, *also* $s=\sin(t)$, *in*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(1-s^2\right)^{-\frac{3}{2}}ds &= \int_0^x \frac{1}{1-s^2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds=\int_0^{\arcsin(x)}\frac{1}{1-\sin(t)^2}dt = \\
&= \int_0^{\arcsin(x)}\frac{1}{\cos(t)^2}dt=\Big[\tan(t)\Big]_0^{\arcsin(x)}=\tan\left(\arcsin(x)\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\arcsin(x)\right)}{\cos(\arcsin(x))}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Auch hier gibt es Abkürzungen. Die Abkürzung durch den Hof des Nachbarn ist in einer Klausur nicht gestattet.

Beispiel 14.18 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}$$

auf dem Intervall $(4, \infty)$*. Weil*

$$\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{(x-2)^2-4} = 2\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}$$

könnte $\frac{x-2}{2} = \cosh(t)$ *eine vernünftige Substitution sein. Denn durch*

$$\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1} = \sqrt{\cosh(t)^2-1} = \sinh(t) \;\; \textit{für } t > 0$$

würde die Wurzel verschwinden. In diesem Beispiel werden wir auch mal eine übliche Schreibweise vorführen. Weil man bei einer Stammfunktion immer eine Konstante addieren kann, schreibt man das Integral ohne Integrationsgrenzen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}dx &= 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}{\frac{x-2}{2}+1}d\left(\tfrac{x-2}{2}\right) = \\
&= 2\int \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)+1}d\cosh(t) = 2\int \frac{\sinh(t)^2}{\cosh(t)+1}dt = \\
&= 2\int \frac{\cosh(t)^2-1}{\cosh(t)+1}dt = 2\int (\cosh(t)-1)\;dt.
\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen bedeutet hier: wenn wir $\frac{x-2}{2} = \cosh(t)$ *annehmen, stimmen die Klassen der Stammfunktionen überein (also modulo Konstanten). Das letzte Integral können wir explizit lösen:*

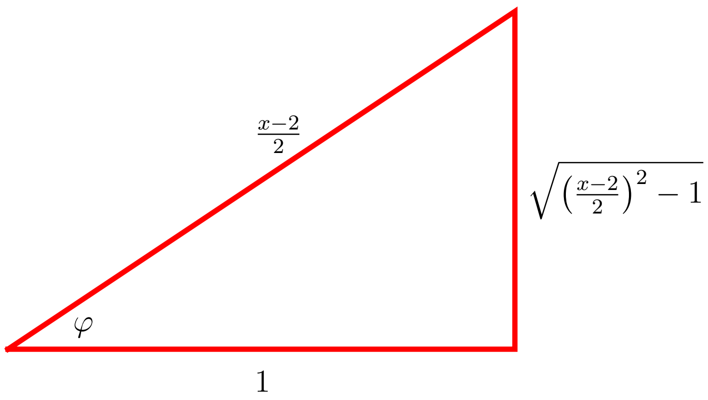
$$\begin{aligned}
2\int_0^t (\cosh(\tau)-1)\;d\tau &= 2\sinh(t) - 2t = 2\sqrt{\cosh(t)^2-1} - 2t = \\
&= 2\sqrt{\cosh(t)^2-1} - 2\operatorname{arccosh}\left(\frac{x-2}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1} - 2\ln\left(\frac{x-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}\right) = \\
&= \sqrt{x^2-4x} - 2\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right) + \ln(4).
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist also

$$F(x) = \sqrt{x^2-4x} - 2\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right).$$

Als Alternative könnte man es auch mit einer Substitution trigoniometrischer Funktionen versuchen, die man mit Hilfe des Dreiecks finden würde. In diesem Fall würde das heißen:

$$\begin{aligned}
\sin(\varphi) &= \frac{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}{\frac{x-2}{2}}, \\
\cos(\varphi) &= \frac{1}{\frac{x-2}{2}}, \\
\tan(\varphi) &= \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}.
\end{aligned}$$



Man findet so

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}dx &= 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}{\frac{x-2}{2}+1}d\left(\tfrac{x-2}{2}\right) = \\
&= 2\int \frac{\tan(\varphi)}{\frac{1}{\cos(\varphi)}+1}d\left(\frac{1}{\cos(\varphi)}\right) = 2\int \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)}\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^2}d\varphi = \\
&= 2\int \frac{1-\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)^2}d\varphi = 2\int \left(\frac{1}{(\cos\varphi)^2} - \frac{1}{\cos(\varphi)}\right) d\varphi = \dots\ .
\end{aligned}$$

Stammfunktionen zu diesen beiden Termen hatten wir schon mal.

Analysis 1, Woche 15

Integralrechnung III

15.1 Uneigentliche Integrale

Flächeninhalt und Umfang (die Länge des Umrisses) verhalten sich nicht gleich. Verdoppelt man die Längen, verdoppelt sich auch der Umfang; der Inhalt aber vervierfacht sich. Das gibt Anlass zu der Vermutung, dass Umfang U_G und Flächeninhalt A_G für (zweidimensionale) Gebiete sich verhalten als

$$U_G^2 \sim A_G.$$

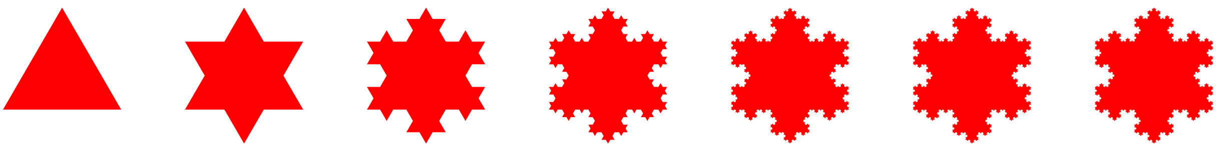
Wenn man dieses Verhältnis etwas länger betrachtet, dann sieht man, dass es so nicht stimmen kann. Zwar gilt

$$U_G^2 \geq 4\pi\ A_G$$

für jedes zweidimensionale Gebiet, aber es gibt keine Konstante, so dass eine umgekehrte Ungleichung stimmen würde. Ein einfaches Beispiel bekommt man bei Rechtecken. Setze $G = [0, n] \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$ und man hat

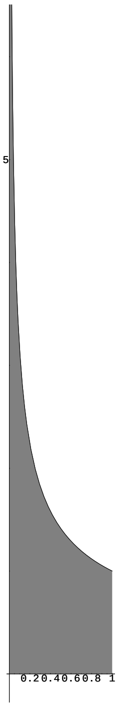
$$\begin{aligned} U_G^2 &= 2n + 2\frac{1}{n} \to \infty \text{ für } n \to \infty, \\ A_G &= n\frac{1}{n} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Das Gebiet muss übrigens nicht mal den Anschein haben groß zu werden. Auch ein beschränktes Gebiet kann einen unendlich großen Rand haben. Ein bekanntes Beispiel ist ,,Koch's snowflake", die Limesfigur, die man bekommt, wenn man folgende Konstruktion ∞ fortsetzt.



Ähnliches gibt es bei Integralen. Die Definition des Riemann-Integrals erlaubt uns nur beschränkte Funktionen und beschränkte Intervalle. Es gibt aber beschränkte Flächeninhalte, ohne dass der Umfang beschränkt ist. Wir geben zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y^2 x \leq 1\right\}, \\ G_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \text{ und } 0 \leq x^2 y \leq 1\right\}. \end{aligned}$$



Die Flächeninhalte dieser beiden Gebiete möchte man doch als Integral darstellen, das heißt, man möchte Riemann-Integrale so erweitern, dass auch

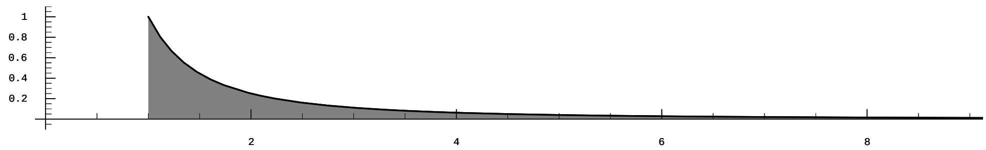
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

eine Bedeutung bekommen. Man macht solches, indem man Limes und Integral kombiniert. Man setzt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx := \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}dx.$$



15.1.1 Das uneigentliche Riemann-Integral der ersten Sorte

Definition 15.1 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $\delta > 0$ Riemann-integrierbar ist auf $[a + \delta, b]$. Wenn*

$$\ell := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx \text{ existiert,}$$

nennt man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und man schreibt

$$\int_a^b f(x)dx = \ell.$$

Bemerkung 15.1.1 *Wenn f unbeschränkt bei b wird, kann man bedenken, dass man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ nennt, wenn*

$$\ell := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx \text{ existiert.}$$

Bemerkung 15.1.2 *Wenn f an mehreren Stellen unendlich wird und man möchte uneigentliche Riemann-integrierbarkeit untersuchen, soll jede Stelle abgesondert betrachtet werden. Siehe auch die folgenden Beispiele.*

Beispiel 15.2 *Betrachte $f_\alpha : (0, 1] \to \mathbb{R}$ für $\alpha > 0$ mit*

$$f_\alpha(x) = x^{-\alpha}.$$

Die Funktion f_α ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$, dann und nur dann wenn $0 < \alpha < 1$. Denn für $\delta > 0$ gilt

$$\int_\delta^1 x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \delta^{1-\alpha}\right) & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ \left[\ln(x)\right]_\delta^1 = -\ln(\delta) & \text{falls } \alpha = 1, \end{cases}$$

und der Grenzwert existiert nur wenn $1 - \alpha > 0$.

Beispiel 15.3 *Betrachte $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-2}$.*

Wenn $0 < a < b$ oder $a < b < 0$ ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und

$$\int_a^b x^{-2}dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Wenn $a < 0 < b$ gilt, dann ist f nicht Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, auch nicht im uneigentlichen Sinne, denn wenn f so sein würde, müsste sowohl

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_a^{-\delta} x^{-2}dx \quad \text{als auch} \quad \lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^b x^{-2}dx \ \text{ existieren.}$$

Man sieht sofort, dass

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_a^{-\delta} x^{-2}dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \left[\frac{-1}{x}\right]_a^{-\delta} = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta} + \frac{1}{a} = \infty.$$

Beispiel 15.4 *Betrachte $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist nicht uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[-1, 1]$. Wenn sie Riemann-integrierbar auf $[-1, 1]$ wäre, sollte*

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{x}dx \text{ und } \lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}dx \text{ existieren.}$$

Weil

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}dx = -\lim_{\delta\downarrow 0} \ln(\delta) = \infty$$

existiert das Integral auch nicht im uneigentlichen Sinne.

Beispiel 15.5 *Sicher werden einige bemerkt haben, dass es so aussieht, als ob im letzten Beispiel links und rechts gleich große Flächeninhalte stehen würden und wegen des unterschiedlichen Vorzeichens man die doch eigentlich gegenseitig kürzen könnte. Dabei würde man $\infty - \infty$ gleich 0 setzen und das ist leider nicht sehr vernünftig. Was wäre denn $(1 + \infty) - \infty$ und $1 + (\infty - \infty)$? Weil es manchmal doch nützt, beide 'Seiten' zu vergleichen, wird folgendes definiert für eine Funktion, die bei 0 Schwierigkeiten macht:*

$$P.V. \int_{-1}^1 f(x)dx := \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} f(x)dx + \int_\delta^1 f(x)dx \right).$$

P.V. heißt (Cauchy's) Principal Value oder Valeur Principal (V.P.). Dieser Hauptwert unterscheidet sich von dem uneigentlichen Integral. Man hat zum Beispiel:

- *$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ ist nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar,*
- *aber für Cauchy's Hauptwert:*

$$\begin{aligned} P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{x}dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x}dx \right) = \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\delta} + \Big[\ln(x)\Big]_\delta^1 \right) = 0. \end{aligned}$$

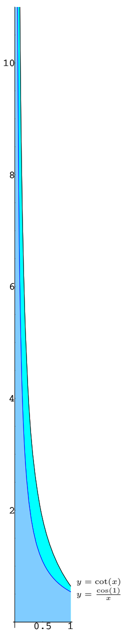
Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar kann man zeigen, dass $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(0)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist auf $[-1,1]$ und dass

$$P.V. \int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{x} dx = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)-g(0)}{x} dx.$$

Beispiel 15.6 *Ist $\cot : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar? Sowohl in 0 als auch in π wird die Funktion unbeschränkt. Das heißt, um die Frage zu bejahen, soll sowohl*



$$\ell_1 := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\delta}^{1} \cot(x)dx \quad \text{als auch} \quad \ell_2 := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{1}^{\pi-\delta} \cot(x)dx$$

existieren. Übrigens darf die Zahl 1 willkürlich gewählt werden innerhalb $(0,\pi)$. Weil für $x \in (0,1]$ gilt

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \geq \frac{\cos(1)}{\sin(x)} \geq \frac{\cos(1)}{x}$$

($\cos(1) > 0$) hat man

$$\int_{\delta}^{1} \cot(x)dx \geq \int_{\delta}^{1} \frac{\cos(1)}{x} dx = -\cos(1)\ln(\delta) \to \infty \text{ wenn } \delta \downarrow 0.$$

Also ist der Cotangens nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar auf $[0,\pi]$. Was bei π passiert, muss man nicht mal mehr betrachten.

Das letzte Beispiel führt zum nächsten Lemma:

Lemma 15.7 *Sei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f,g : (a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, die für jedes $\delta > 0$ Riemann-integrierbar sind auf $[a+\delta, b]$. Nehme an, dass*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ für } x \in (a,b]\,.$$

Wenn g uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

Beweis. Wenn $g \geq 0$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a,b]$, gilt

$$\int_{a+\delta}^{b} g(x)dx \leq \ell_g := \int_{a}^{b} g(x)dx < \infty.$$

Weil $f \geq 0$ auf $(a,b]$ hat man, dass $\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ monoton zunimmt für $\delta \downarrow 0$. Auch ist $\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ gleichmäßig beschränkt, denn es gilt

$$\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx \leq \ell_g.$$

Die Monotonie und die Beschränktheit liefern, dass

$$\ell_f := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

existiert. ■

15.1.2 Das uneigentliche Riemann-Integral der zweiten Sorte

Definition 15.8 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $T > a$ Riemann-integrierbar ist auf $[a, T]$. Wenn*

$$\ell := \lim_{T \to \infty} \int_{a}^{T} f(x)dx \text{ existiert,}$$

nennt man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, \infty)$ und man schreibt

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \ell.$$

Beispiel 15.9 *Betrachte $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ für $\alpha > 0$ mit*

$$f_\alpha(x) = x^{-\alpha}.$$

Die Funktion f_α ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[1, \infty)$, dann und nur dann wenn $1 < \alpha$. Denn für $T > 1$ gilt

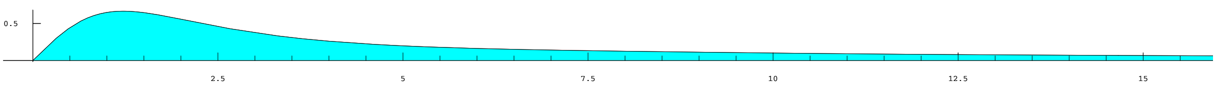
$$\int_{1}^{T} x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^T = \frac{1}{1-\alpha}\left(T^{1-\alpha} - 1\right) & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ \left[\ln(x)\right]_1^T = \ln(T) & \text{falls } \alpha = 1, \end{cases}$$

und der Grenzwert existiert nur, wenn $1 - \alpha < 0$.

Beispiel 15.10 *Ist $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit*

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + \cos(x)}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[0, \infty)$?



Hoffnung auf eine explizite Stammfunktion existiert nicht. Wir vermuten, dass für große x diese Funktion sich fast verhält wie $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ auf $[10, \infty)$ nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar ist, wird g es auch nicht sein. Das wollen wir aber präziser haben.

Dazu zeigen wir, dass eine Teilmenge von

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0 \text{ und } 0 \leq y \leq g(x)\right\}$$

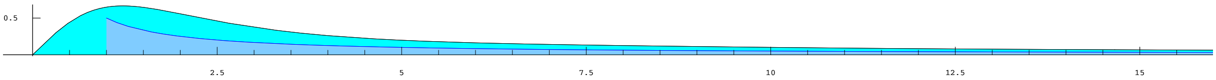
schon Flächeninhalt ∞ hat. Wir verwenden, dass für $x > 1$ gilt

$$\frac{x}{x^2 + \cos(x)} \geq \frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2x},$$

und man also für $T > 1$ die folgende Abschätzung hat:

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx \;&=\; \int_0^1 \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx + \int_1^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx \;\geq \\ &\geq\; \int_1^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx \;\geq\; \int_1^T \frac{1}{2x}dx \;=\; \frac{1}{2}\ln(T).\end{aligned}$$

Die Integrale $\int_0^{17} \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx$ *und* $\int_1^{17} \frac{1}{2x}dx$ *sind hier abgebildet:*



Weil $\frac{1}{2}\ln(T) \to \infty$ *wenn* $T \to \infty$, *folgt*

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx = \infty.$$

Die Funktion g ist also nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar auf $[0,\infty)$.

Auch hier formulieren wir ein Lemma dazu.

Lemma 15.11 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die für jedes $T > a$ Riemann-integrierbar sind auf $[a,T]$. Nehme an, dass*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ für } x \in [a,\infty).$$

Wenn g uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a,\infty)$, dann ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,\infty)$.

Beweis. Weil es ähnlich wie beim Beweis von Lemma 15.7 ist, überlassen wir es dem Leser. ■

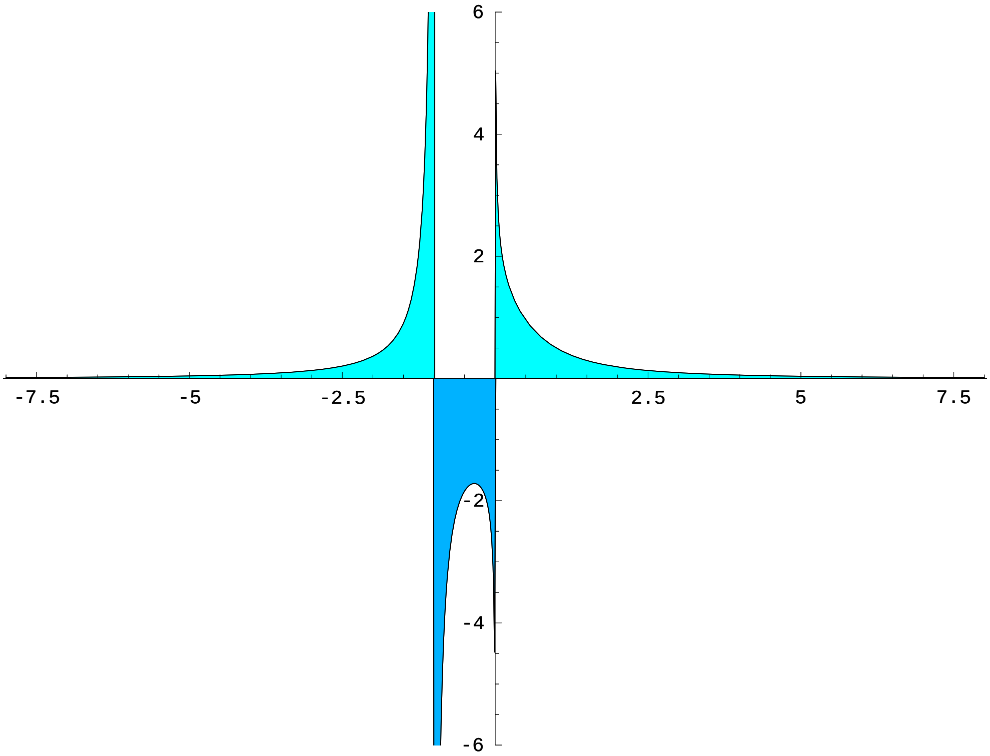
Beispiel 15.12 *Ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$ uneigentlich Riemann-integrierbar? Dann muss man erstens die Problemstellen inventarisieren. Neben $\pm\infty$ muss man dazu die Nullstellen vom Nenner bestimmen:*

$$\begin{array}{rcl} x^2+\sqrt[3]{x}=0 & \Leftrightarrow & x^2=-\sqrt[3]{x} \\ & & \Downarrow \\ x\left(x^5+1\right)=0 & \Leftrightarrow & x^6=-x \end{array}$$

Es gibt nur zwei reelle Nullstellen: $x = 0$ und $x = -1$. Insgesamt hat man so aber 6 uneigentliche Problemstellen:

$$\{-\infty, -1 \text{ links}, -1 \text{ rechts}, 0 \text{ links}, 0 \text{ rechts}, +\infty\}.$$

Wenn man Maple oder Mathematica die Funktion skizzieren lässt, erkennt man die Singularitäten:



Die Problemstellen muss man einzeln anschauen. Wenn aber eine davon schon dafür sorgt, dass das dazugehörende uneigentliche Integral nicht existiert, ist man fertig. Fangen wir rechts an:

- $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *für große x sollte man vergleichen können mit $\frac{1}{x^2}$ und das würde uneigentlich Riemann-integrierbar bedeuten.*

- $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\int_{\delta}^{10}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *falls $0<x\ll 1$ sollte man vergleichen können mit $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ und das würde uneigentlich Riemann-integrierbar bedeuten.*

- $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *falls $-\frac{1}{2}\ll x<0$ sollte man vergleichen können mit $\frac{-1}{\sqrt[3]{|x|}}$ (negativ!) und das würde uneigentlich Riemann-integrierbar bedeuten.*

- $\lim\limits_{\rho\downarrow 0}\int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *falls $-1<x\ll-\frac{1}{2}$ sollte man vergleichen können mit $\frac{-1}{x+1}$ (negativ!) und das würde „nicht uneigentlich Riemann-integrierbar" bedeuten.* **Bingo!**

- $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\int_{-2}^{-1-\gamma}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; ....

- $\lim\limits_{S\to-\infty}\int_{S}^{-2}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; ....

Wir versuchen „nicht uneigentlich Riemann-integrierbar" hinzukriegen, und schauen uns $\lim\limits_{\rho\downarrow 0}\int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$ an. Um zu verstehen was bei $x=-1$ passiert, müssen wir die Funktion $g(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ untersuchen bei $x=-1$. Um abzuleiten schreiben wir

$$g(x)=x^2-(-x)^{\frac{1}{3}}$$

und finden so

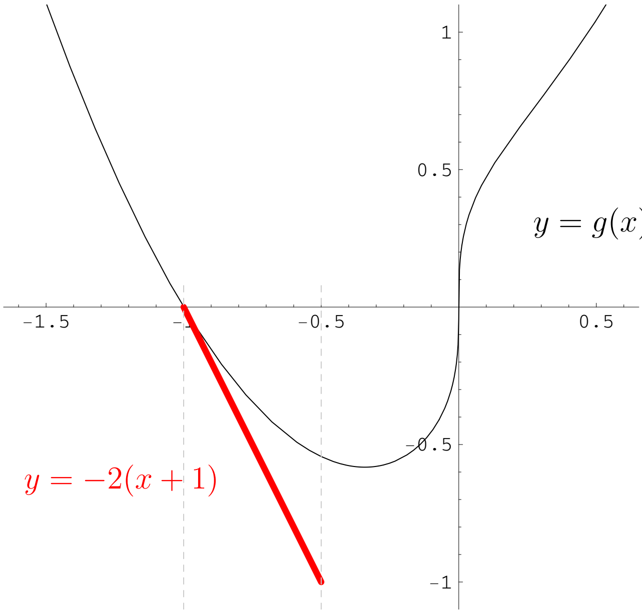
$$g'(x)=2x+\tfrac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

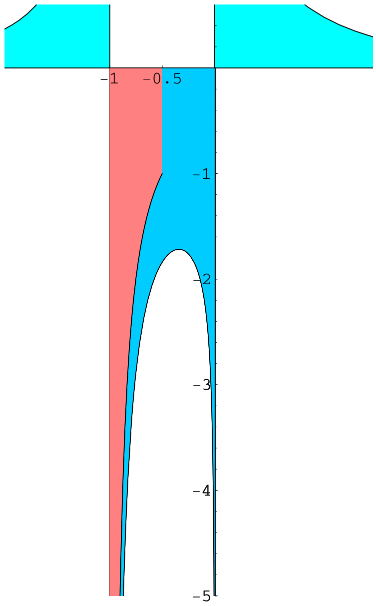
Dann folgt $g'(-1) = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} > -2$. *Aus der Stetigkeit von* g' *auf* $(-\infty, 0)$ *finden wir, dass* $g'(x) > -2$ *in einer rechten Umgebung von* $x = -1$ *und mit dem Mittelwertsatz, dass in dieser rechter Umgebung gilt*

$$g(x) - g(-1) = g'(\theta)(x - -1) > -2(x+1).$$

Man kann sogar zeigen, dass

$$g(x) > -2(x+1) \text{ für } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$





Ausschnitt vom Bild auf Seite 177 mit der Abschätzung.

Dann gilt auch

$$\frac{1}{-2(x+1)} > \frac{1}{g(x)} \text{ für } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

und das liefert

$$\int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} dx \leq \int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{-2(x+1)} dx = \left[-\tfrac{1}{2}\ln(x+1)\right]_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\ln(\rho).$$

Weil $\ln(\rho) \to -\infty$ *für* $\rho \downarrow 0$, *folgt*

$$\int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} dx \to -\infty \text{ für } \rho \downarrow 0$$

und $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} dx$ *existiert nicht als uneigentliches Integral.*

15.2 Reihen und uneigentliche Riemann-Integrale

Manchmal lassen Reihen und uneigentliche Riemann-Integrale sich vergleichen.

Lemma 15.13 *Wenn* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *folgende Bedingungen erfüllt:*

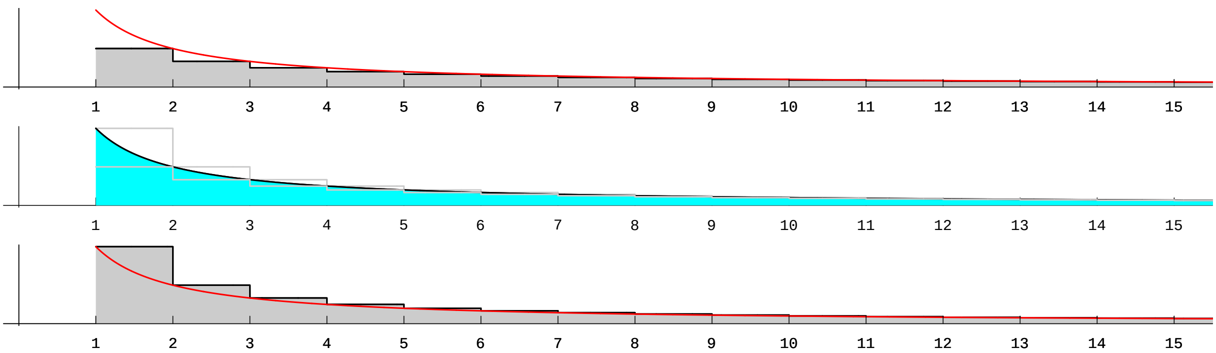
1. f *ist positiv:* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^+$*;*

2. *f ist monoton fallend: $x > y > 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;*

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

dann gilt für jede $N \in \mathbb{N}^+$

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \tag{15.1}$$



Beweis. Man bemerke, dass für die Ganzzahlfunktion $x \mapsto [x]$ folgendes gilt:

$$[x] + 1 \geq x \geq [x]\,.$$

Weil f monoton fallend ist, gilt

$$f([x]+1) \leq f(x) \leq f([x]) \text{ für } x \geq 1.$$

So gilt auch

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N f([x]+1)dx \leq \int_1^N f(x)dx \leq \int_1^N f([x])dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Die Bedingung $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ wird nicht benutzt. ■

Korollar 15.14 *Sei f wie in Lemma 15.13. Dann gilt folgendes.*
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert, dann und nur dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert.

Beweis. Man benutze die Abschätzung (15.1) aus Lemma 15.13. ■

Beispiel 15.15 *So können wir nun sofort sehen, dass die harmonische Reihe divergiert:*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^N \frac{1}{x}dx = \ln(N) \to \infty \text{ wenn } N \to \infty.$$

Literaturverzeichnis

[1] Amann, Herbert; Escher, Joachim. Analysis 1. Birkhäuser.

[2] Bröcker, Theodor. Analysis 1. Bibliographisches Institut.

[3] Forster, Otto. Analysis 1 Vieweg Studium.

[4] Königsberger, Konrad. Analysis 1. Springer-Lehrbuch.

[5] Spivak, Michael. Calculus. Publish or Perish Inc/Cambridge University Press.

[6] Walter, Wolfgang. Analysis 1. Springer-Lehrbuch.

Index