Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt wird in den Übungen in der 2. Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1: Es seien $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{\{1\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1\}\}$, $D = \{\{1\}, 2\}$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) $B \in A$ (c) $C \in A$ (e) $D \in A$

(b) $B \subset A$ (d) $C \subset A$ (f) $D \subset A$

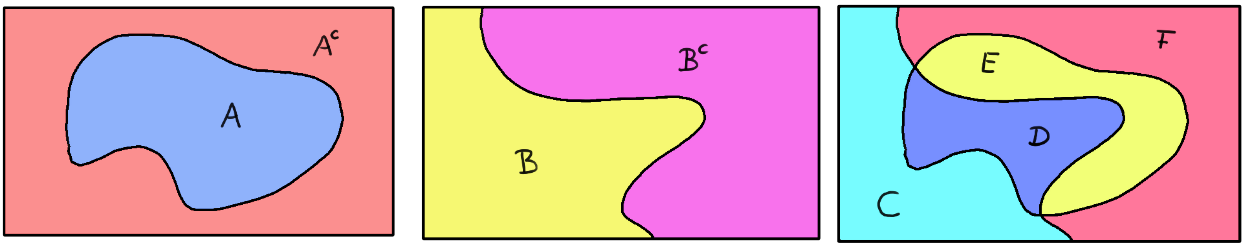
Aufgabe 2: Seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $D = \{10, 11, 12\}$.

Schreiben Sie die folgenden Mengen explizit auf, d.h. als Menge der Elemente $\{a, b, c, \ldots\}$.

(a) $A \setminus B$, $C \setminus A$, $D \setminus A$, $A \setminus D$

(b) $A \cap B$, $A \cup D$, $B \cup D$

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Mengen in den folgenden Skizzen, dabei sind $A, B \subset X$ und $A^c = X \setminus A$ und $B^c = X \setminus B$. Das rechte Bild zeigt dabei die Überlagerung der Konturen von A und B.



Geben Sie die Definition von C, D, E, F mithilfe der Mengen A, B an.

Aufgabe 4: Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien? Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist, unabhängig vom Wahrheitswert der zugrundeliegenden Aussagen. Anstelle von $(\neg X)$ schreiben wir $\neg X$, denn $\neg$ bezieht sich immer auf das nächstliegende Objekt.

(a) $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

(b) $\neg (A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$

(c) $(A \implies B) \iff \neg (A \wedge \neg B)$

(d) $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

(e) $(\neg (A \Rightarrow B)) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

(f) $(\neg (A \Rightarrow B)) \iff (\neg A \implies \neg B)$

(g) $A \implies (A \vee B)$

(h) $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$

Aufgabe 5: Definieren Sie $A \implies B$, $A \iff B$ und $A \wedge B$ mithilfe von $\neg$ und $\vee$.

Aufgabe 6: Jemand behauptet, dass es in jeder Stadt eine Straße gibt, in der in jedem Haus ein Stockwerk existiert, auf dem alle Fenster geöffnet sind.

Geben Sie eine möglichst einfache Formulierung für die Verneinung dieser Aussage an, insb. ohne „gilt nicht“ , „ist falsch“ , oder ähnliche Terme.

Aufgabe 7: Seien M_1 und M_2 Mengen und $P(x, y)$ sei jeweils wahr oder falsch. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

(a) $\forall_{y \in M_2} \forall_{x \in M_1} : P(x, y)$ und $\forall_{x \in M_1} \forall_{y \in M_2} : P(x, y)$

(b) $\exists_{y \in M_2} \exists_{x \in M_1} : P(x, y)$ und $\exists_{x \in M_1} \exists_{y \in M_2} : P(x, y)$

(c) $\forall_{x \in M_1} \exists_{y \in M_2} : P(x, y)$ und $\exists_{y \in M_2} \forall_{x \in M_1} : P(x, y)$

Formulieren Sie allgemeine Gesetze für das Vertauschen von Quantoren.

Aufgabe 8: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Schreiben Sie die Negation folgender Aussage hin, sie dürfen dabei das Symbol $\neg$ nicht verwenden (auch keine identischen Symbole und Worte):

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in \mathbb{R}} \; : \; (|x - y| < \delta) \implies (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Aufgabe 9: Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $2 \cdot 2 + 3 > 5 \implies 2 \cdot 2 + 2 > 5$

(b) $2 \cdot 2 + 3 < 5 \implies 2 \cdot 2 + 4 < 5$

Aufgabe 10: Wir beweisen die Existenz des Weihnachtsmannes. Wir betrachten dazu zuerst die Aussage A, die wir definieren als: „Wenn A wahr ist, dann existiert der Weihnachtsmann.“

Aussage A ist wahr. Um die Implikation zu zeigen, nehmen wir an, dass A wahr ist und müssen zeigen, dass der Weihnachtsmann existiert. Da aber A nach Annahme war ist und damit aus A folgt, dass der Weihnachtsmann existiert, existiert der Weihnachtsmann. Damit ist A bewiesen.

Da A wahr ist und damit aus A die Existenz des Weihnachtsmanns folgt, existiert der Weihnachtsmann. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 11: Sei $M := \{\text{S ist eine Menge} \; ; \; S \notin S\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten.

(a) Untersuchen Sie, ob $M \in M$.

(b) Untersuchen Sie, ob $M \notin M$.

(c) Was folgern Sie daraus?

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**