Prof. Guido Sweers **WS 2015/2016**
Jan M. Krämer
Michael Kühn

Analysis 1 - Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Hinweis: Seien A, B zwei beliebige Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

Für $X \subset A$ ist das Bild von X unter f definiert als $\quad f(X) := \{f(x)\ ;\ x \in X\}$.

Für $Y \subset B$ ist das Urbild von Y unter f definiert als $\quad f^{-1}(Y) := \{x \in A\ ;\ f(x) \in Y\}$.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall_{X,Y \subset A} : f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

(b) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall_{X \subset A} : f^{-1}(f(X)) = X$.

Aufgabe 2: Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn $\exists_{g:f(A)\to A} \forall_{x \in A} : g(f(x)) = x$.

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn $\forall_{Y \subset B} : f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$

(c) f ist surjektiv genau dann, wenn $\exists_{g:B \to A} \forall_{y \in B} : f(g(y)) = y$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

(b) $\sum_{j=1}^{n} j \cdot (j!) = (n+1)! - 1$

(c) $\sum_{m=0}^{n} m^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Aufgabe 4: Finden Sie Funktionen $f : B \to C$ und $g : A \to B$, so dass f injektiv, g surjektiv und $f \circ g$ weder injektiv, noch surjektiv ist.

Hinweis: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$

Aufgabe 5: Zeigen Sie jeweils, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

(a) $3^{2n+4} - 2^{n-1} = 7m$.

(b) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9m$.

Aufgabe 6: Es seien $A, B \subset M$ und für eine Menge $S \subset M$ definiert man das Komplement als $S^c = M \setminus S$.

Beweisen Sie die folgenden Mengenidentitäten:

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Aufgabe 7 (5 Punkte): Seien $x, y > 0$, $x \cdot y = 1$. Zeigen Sie, dass $x + y \geq 2$ ist. Wann gilt $x + y = 2$?

Aufgabe 8: Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

(a) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$

(b) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \geq y \iff -x \leq y \leq x$

(c) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \leq |y| \iff x \leq y \vee -x \leq -y$

(d) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \geq y \iff x \geq y \geq 0 \vee -x \geq y$

Aufgabe 9: Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist die folgende Aussage richtig und für welche ist sie falsch?

$$x < y \implies x^k < y^k$$

Aufgabe 10 (5 Punkte): Zeigen Sie jeweils, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen gelten.

(a) $\frac{x^2-4}{x+1} > 0$ (b) $|x^2 - 5| > 4$ (c) $x - 10 - \frac{5}{x-6} > 0$

Aufgabe 11: Beweisen Sie, oder widerlegen Sie jeweils, dass folgende Ungleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(b) $|x - y| \leq |x| + |y|$

(c) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

(d) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Aufgabe 12: Seien A und B n-elementige Mengen und $n \geq 1$. Sei

$$C = \{f : A \to B \ ; \ f \text{ ist bijektiv.}\}.$$

Zeigen Sie, dass C genau $n!$ Elemente hat.

Man hat uns gebeten folgenden Text aufzunehmen: