

### Analysis 1 - Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

*Hinweis:* Seien  $A, B$  zwei beliebige Mengen und  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

Für  $X \subset A$  ist das Bild von  $X$  unter  $f$  definiert als  $f(X) := \{f(x) ; x \in X\}$ .

Für  $Y \subset B$  ist das Urbild von  $Y$  unter  $f$  definiert als  $f^{-1}(Y) := \{x \in A ; f(x) \in Y\}$ .

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a)  $f$  ist injektiv genau dann, wenn  $\forall_{X, Y \subset A} : f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$
- (b)  $f$  ist injektiv genau dann, wenn  $\forall_{X \subset A} : f^{-1}(f(X)) = X$ .

**Aufgabe 2:** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a)  $f$  ist injektiv genau dann, wenn  $\exists_{g: f(A) \rightarrow A} \forall_{x \in A} : g(f(x)) = x$ .
- (b)  $f$  ist surjektiv genau dann, wenn  $\forall_{Y \subset B} : f(f^{-1}(Y)) = Y$
- (c)  $f$  ist surjektiv genau dann, wenn  $\exists_{g: B \rightarrow A} \forall_{y \in B} : f(g(y)) = y$ .

**Aufgabe 3 (5 Punkte):** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

- (a)  $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- (b)  $\sum_{j=1}^n j \cdot (j!) = (n + 1)! - 1$
- (c)  $\sum_{m=0}^n m^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

**Aufgabe 4:** Finden Sie Funktionen  $f : B \rightarrow C$  und  $g : A \rightarrow B$ , so dass  $f$  injektiv,  $g$  surjektiv und  $f \circ g$  weder injektiv, noch surjektiv ist.

*Hinweis:*  $(f \circ g)(x) := f(g(x))$

**Aufgabe 5:** Zeigen Sie jeweils, dass für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ein  $m \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

- (a)  $3^{2n+4} - 2^{n-1} = 7m$ .
- (b)  $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 9m$ .

**Aufgabe 6:** Es seien  $A, B \subset M$  und für eine Menge  $S \subset M$  definiert man das Komplement als  $S^c = M \setminus S$ .

Beweisen Sie die folgenden Mengenidentitäten:

- (a)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- (b)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- (c)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**Aufgabe 7 (5 Punkte):** Seien  $x, y > 0$ ,  $x \cdot y = 1$ . Zeigen Sie, dass  $x + y \geq 2$  ist. Wann gilt  $x + y = 2$ ?

**Aufgabe 8:** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

- (a)  $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$       (c)  $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \leq |y| \iff x \leq y \vee -x \leq -y$   
 (b)  $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \geq y \iff -x \leq y \leq x$       (d)  $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : |x| \geq y \iff x \geq y \geq 0 \vee -x \geq y$

**Aufgabe 9:** Für welche  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  ist die folgende Aussage richtig und für welche ist sie falsch?

$$x < y \implies x^k < y^k$$

**Aufgabe 10 (5 Punkte):** Zeigen Sie jeweils, für welche  $x \in \mathbb{R}$  die folgenden Ungleichungen gelten.

- (a)  $\frac{x^2-4}{x+1} > 0$       (b)  $|x^2 - 5| > 4$       (c)  $x - 10 - \frac{5}{x-6} > 0$

**Aufgabe 11:** Beweisen Sie, oder widerlegen Sie jeweils, dass folgende Ungleichungen für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten.

- (a)  $|x + y| \leq |x| + |y|$       (c)  $|x + y| \geq ||x| - |y||$   
 (b)  $|x - y| \leq |x| + |y|$       (d)  $|x - y| \geq ||x| - |y||$

**Aufgabe 12:** Seien  $A$  und  $B$   $n$ -elementige Mengen und  $n \geq 1$ . Sei

$$C = \{f : A \rightarrow B ; f \text{ ist bijektiv.}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $C$  genau  $n!$  Elemente hat.

Man hat uns gebeten folgenden Text aufzunehmen:

Kölner Laboratorium  
für Wirtschaftsforschung





*Spielend Geld verdienen im Dienste der Forschung: im Kölner Labor für Wirtschaftsforschung können Studenten aller Fachrichtungen an Experimenten teilnehmen und sich unkompliziert etwas dazuverdienen. Es werden regelmäßig Studien durchgeführt, bei denen die Bezahlung von den getroffenen Entscheidungen abhängt. Es sind keine Vorkenntnisse erforderlich. Unverbindliche Anmeldung als Teilnehmer und mehr Infos unter <http://lab.uni-koeln.de>*

## Spielend Geld verdienen ...

... in wirtschaftswissenschaftlichen Experimenten

**<http://cler.uni-koeln.de>**