**Prof. Guido Sweers**
**Jan M. Krämer**
**Michael Kühn**

**WS 2015/2016**

# Analysis 1 - Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

**Aufgabe 1:** Seien $S := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : [a, b] \to S$ gibt, die bijektiv und stetig ist.

**Aufgabe 2 (5 Punkte):** Berechnen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen.

(a) $\frac{1}{x} + \sqrt{1 + x^2}$

(b) $x \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(c) $\frac{2x^3 + |x|^3}{x^2 - 2}$

(d) $\sqrt{5 + 2x + x^2}$

**Aufgabe 3:** Wir betrachten die Temperatur auf dem Äquator, die als stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ dargestellt werden kann. Gibt es zwei verschiedene Orte mit gleicher Temperatur?

**Aufgabe 4 (5 Punkte):** Hat die Gleichung $\exp(x) + x = 0$ eine Lösung in $\mathbb{R}$?

**Aufgabe 5 (5 Punkte):** Geben Sie jeweils ein Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

(a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$. Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.

(b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Funktionen mit $f(x) < g(x)$. Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x) < \lim_{x\to 0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.

(c) Es sei $a_n$ eine Folge, $f$ stetig, injektiv und es gelte $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

(d) Jede bijektive Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ist stetig.

**Aufgabe 6:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist.

**Aufgabe 7 (5 Punkte):** Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ gibt, die jeden ihrer Werte genau 2 mal annimmt.

**Aufgabe 8:** (a) Berechnen Sie $\liminf_{x\to 0} f(x)$ und $\limsup_{x\to 0} f(x)$ für

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) \exp(x)$$

(b) Berechnen Sie $\liminf_{x\to 0} h(x)$ und $\limsup_{x\to 0} h(x)$ für

$$h(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

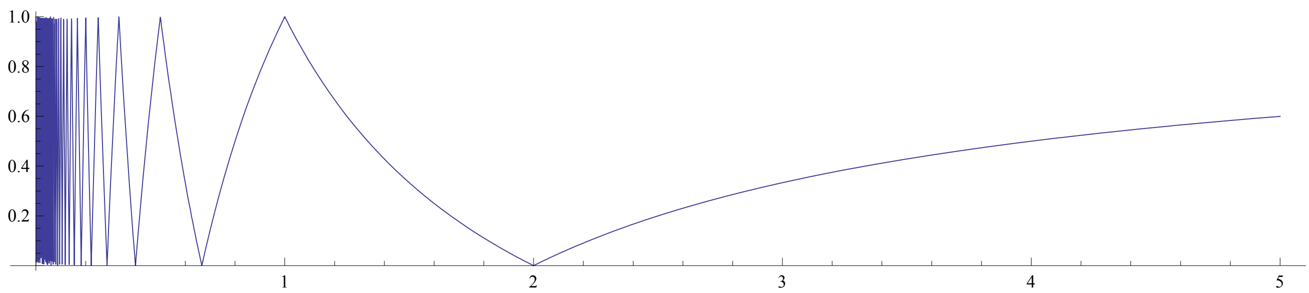
**Aufgabe 9:** Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in M} \ : \ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede in $M$ Lipschitz-stetig Funktion auch gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 10:** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0,5) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \left|2\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) - 1\right|$, stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.




**Aufgabe 11:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $T > 0$, wenn

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \ : \ f(x+T) = f(x).$$

(Beispiel: Die Funktion $\sin(x)$ hat als Perioden $2\pi, 4\pi, \ldots$ und als kleinste Periode $2\pi$.)

(a) Seien $T_1 < T_2$ zwei Perioden von $f$. Zeigen Sie, dass $T_2 - T_1$ eine Periode von $f$ ist.

(b) Überlegen Sie sich, dass wenn $P := \{ T > 0 \ ; \ T \text{ Periode von } f \}$ kein Minimum hat, es eine streng monoton fallende Folge $T_n \in P$ gibt, die gegen das Infimum von $P$ konvergiert.

Konstruieren Sie damit eine Folge von Perioden von $f$, die gegen Null konvergiert. Nutzen Sie dazu Teil (a) und die Tatsache, dass $T_n$ eine Cauchyfolge ist.

(c) Sei $f$ stetig und das Infimum von $P$ sei Null. Zeigen Sie, dass $f$ konstant ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede nichtkonstante, stetige, periodische Funktion $f$ eine kleinste (positive) Periode hat.

(e) Gilt das auch für nichtstetige Funktionen?