Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Ist f differenzierbar in 0?

Aufgabe 2: Welche Asymptoten hat die Funktion $\coth(x)$?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

(b) Für alle $x, y \in [0, \infty)$ mit $x \neq y$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{y - x}{y^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}} = \left(y^{\frac{m-1}{m}} x^0 + y^{\frac{m-2}{m}} x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{m-3}{m}} x^{\frac{2}{m}} + \ldots + y^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m-2}{m}} + y^0 x^{\frac{m-1}{m}} \right)$$

(c) Ist $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^{\frac{1}{m}}$, dann ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1}.$$

(d) Wie lautet die Ableitung von x^q für $q \in \mathbb{Q}$ an der Stelle $x \in (0, \infty)$?

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

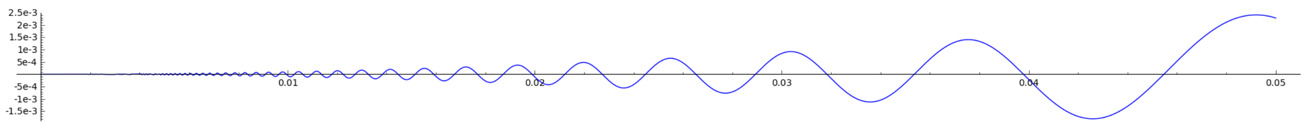
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist.

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass f differenzierbar in 0 ist.

(d) Ist f stetig differenzierbar?



Aufgabe 5: Sei I ein offenes Intervall und f, g seien n mal differenzierbar auf I. Zeigen Sie, dass in I für die n-te Ableitung gilt:

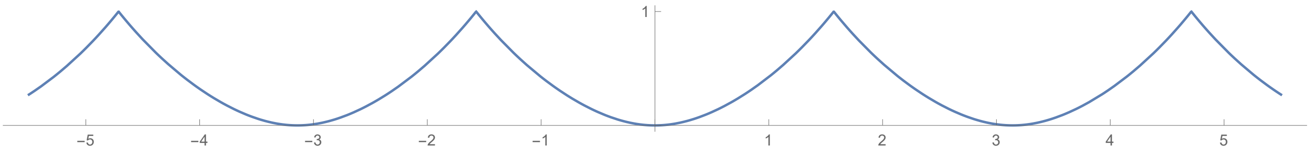
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 6: Sei $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} (\sin(x))^{n(n-1)}$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

(b) Berechnen Sie $f(\frac{\pi}{2})$.

(c) Ist f stetig auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?



Aufgabe 7: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem Intervall (a, b) differenzierbar. Weiter gelte $f(a) \geq g(a)$ und $f'(x) > g'(x)$ für $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) > g(x)$ für $x \in (a, b]$ gilt.

Aufgabe 8: Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Jede differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

(b) Jede Lipschitz-stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 9: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a < b$. Dann gibt es zu jedem γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ eine Stelle $c \in [a, b]$ mit $f'(c) = \gamma$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) := f(x) - \gamma x$. Beachten Sie weiter, dass f nicht als stetig differenzierbar angenommen wird.

Aufgabe 10 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x \tanh(x) + \frac{\sin(x^4)}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Asymptoten von f.

(b) Bestimmen Sie die Asymptoten von f'.

Aufgabe 11: Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin(x^{-1})\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) > f(0)$ für alle $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

(b) Zeigen Sie, dass f in $(-1, 1)$ stetig differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass es kein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f in $(0, \varepsilon)$ monoton fallend ist.

Aufgabe 12: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{\left(-\frac{1}{4} x^2\right)} \sin\left(\frac{8}{x^3}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass f und f' auf $\mathbb{R}$ beschränkt sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\sup_{x \in [-1,1]} f'(x) = -\inf_{x \in [-1,1]} f'(x) = 24$ und für alle $x \in [-1, 1]$ gilt $|f'(x)| \neq 24$.