Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1: Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) Für $x > 1$ gilt $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$.

(b) Für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ gilt $\alpha \leq \tan(\alpha)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn gilt:

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x) \text{ für alle } x, y \in I.$$

Aufgabe 3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie:

(a) f ist konvex in $I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in I: \quad f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

(b) f konvex und streng monoton wachsend $\Longrightarrow$ $(-f^{inv}) : f(I) \to \mathbb{R}$ ist konvex.

Aufgabe 4: Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(a) $|\cos(e^x) - \cos(e^y)| \leq |x - y|$ für $x, y \leq 0$,

(b) $|\ln(1 + x)| \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für $x > 0$.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie die Funktion $f(t) = \ln(1 + t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ *im Intervall* $[0, x]$.

Aufgabe 5: Seien $a, b > 0$ und $b \neq 1$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln(x)$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^a} \ln(x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} x^x$ (d) $\displaystyle\lim_{x \to b} \frac{x^b - b^x}{b^x - b^b}$

Aufgabe 6 (4 Punkte): Zeigen Sie, dass die Ungleichungen

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1 + x}\right)^3 \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

für $0 \leq x < \infty$ gelten.
Hinweis: Untersuchen Sie die Taylor-Entwicklung von $\ln(1 + x)$ *um den Punkt* $a = 0$.

Aufgabe 7: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots \lambda_n f(x_n)$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in I$ gilt.

Aufgabe 8: Sei $\varepsilon > 0$, $f : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) Es gelte $|f(x)| + |f'(x)| \neq 0$. Zeigen Sie, dass f nur endlich viele Nullstellen in $[0,1]$ haben kann.

(b) f' sei stetig, $f(0) = 0$ und $|f'(x)| \leq \lambda\, |f(x)|$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ in $[0,1]$.

Aufgabe 9: Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ stetig und bijektiv.

(a) Zeigen Sie, dass f^{inv} genau dann streng monoton steigend ist, wenn f streng monoton steigend ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes f ein $x \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass $f^{inv}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

Aufgabe 10 (8 Punkte): Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arccos(x) + \sin(x) - \frac{\pi}{2}}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{\sin(x)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{\sin(x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\arcsin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \arcsin\left(\tfrac{1}{x+1}\right)\right)$

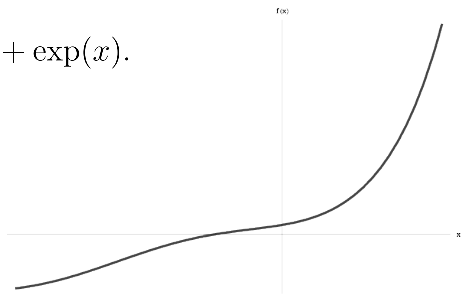
Hinweis zu (d): Mittelwertsatz

Aufgabe 11 (4 Punkte): Sei $f(x) = x - \sin(x) + \exp(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$.

(c) Berechnen Sie $(f^{inv})'(1)$.



Aufgabe 12: Wir betrachten die Funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \tfrac{1}{x} + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \left(\tfrac{1}{x} + \sin(\tfrac{1}{x})\cos(\tfrac{1}{x})\right)\exp\left(\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} g(x) = \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass für $g'(x) \neq 0$ gilt, dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\right).$$

(c) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\right) = 0.$

(d) Gilt $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$?