Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 13

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1: Man kann mit vollständiger Induktion zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = \tfrac{1}{5}\,(n-1)\,n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n^2-n-\tfrac{1}{3}\right).$$

Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4$.

(a) Zeigen Sie, dass $m_n = \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^2}\right)$ eine Untersumme ist für f auf $[0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass $M_n = m_n + \frac{1}{n}$ eine Obersumme ist für f auf $[0,1]$.

(c) Begründen Sie damit, dass $\int_0^1 x^4 dx$ existiert und berechnen Sie den Wert.

Aufgabe 2: Sind die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig?

(a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^3)$,

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Sei $a < b$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion mit $f([a,b]) = [c,d]$. Zeigen Sie Folgendes:

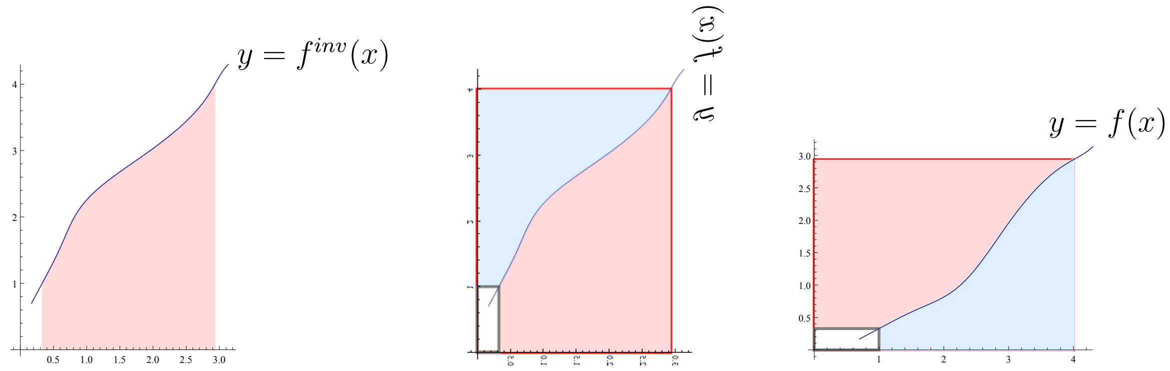
(a) Wenn M eine Obersumme ist für f auf $[a,b]$, dann ist $(bd-ca)-M$ eine Untersumme für f^{inv} auf $[c,d]$.

(b) Wenn m eine Untersumme ist für f auf $[a,b]$, dann ist $(bd-ca)-m$ eine Obersumme für f^{inv} auf $[c,d]$.

(c) Weil f und auch f^{inv} streng wachsende monotone Funktionen sind, sind beide Funktionen auf dem jeweiligen Intervall Riemann-integrierbar. Zeigen Sie

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d f^{inv}(x)\,dx = bd - ca.$$

Hinweis: Lassen Sie sich von den folgenden Bildern inspirieren.



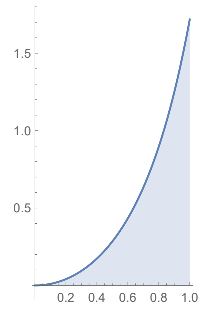
Aufgabe 4 (6 Punkte):

(a) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von

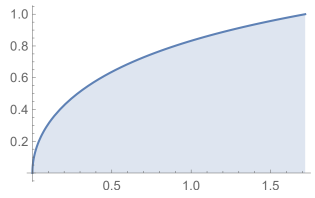
$$f : [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ mit } f(x) = e^{x^2} - 1.$$

(b) Berechnen Sie mit Aufgabe 3:

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - 1\right) dx + \int_0^{e-1} \sqrt{\ln(1+x)}dx.$$



$y = e^{x^2} - 1$



$y = \sqrt{\ln(1+x)}$

Aufgabe 5 (6 Punkte): Sei $f : [0, 10]$ definiert durch $f(x) = x - [x]$.

(a) Skizzieren Sie f auf $[0, 10]$.

(b) Berechnen Sie $\int_0^{10} f(x)\, dx$.

Aufgabe 6: Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [-1, 0), \\ e^{\sqrt{x}} & \text{für } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f invertierbar ist und dass f^{inv} definiert ist auf $[-2, 0) \cup [1, e]$ durch

$$f^{inv}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \in [-2, 0), \\ (\ln(x))^2 & \text{für } x \in [1, e]. \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx + \int_{-2}^0 f^{inv}(x)\, dx + \int_1^e f^{inv}(x)\, dx.$$

Aufgabe 7:

(a) Zeigen Sie, durch Vergleich der Flächeninhalte, dass

$$\int_0^\pi (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi \left(1 - \sin(x)^2\right) dx.$$

Hinweis: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

(b) Berechnen Sie, ohne Stammfunktionen zu verwenden

$$\int_0^\pi (\sin(x))^2\, dx.$$