

Analysis 1 - Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $a_1 = 2$ und $a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^n$. Zeigen Sie, dass $a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Beweisen Sie, dass folgende Aussagen für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gelten.

(a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

(b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \leq k$,

(c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass folgende Aussagen für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gelten.

(a) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

Aufgabe 4: (a) Seien A_1, A_2, \dots abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

abzählbar ist.

(b) Benutzen Sie (a) und dass \mathbb{R} überabzählbar ist, um zu zeigen, dass jedes Intervall (a, b) mit $a < b$ überabzählbar ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte): Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n.$$

Aufgabe 6: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte): Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ ist, indem Sie eine beschränkte monoton wachsende Folge in \mathbb{Q} finden, die $\frac{1}{x}$ als Grenzwert hat.

Aufgabe 8: Wir definieren $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$. Beweisen Sie, dass

(a) $f_{m+n} = f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1}$,

(b) $f_{2n} = f_n(f_{n+1} + f_{n-1})$,

(c) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$.

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$|x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|.$$

Hinweis: $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$.

Aufgabe 10: Sei $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mit $b, d > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aufgabe 11: Überprüfen Sie jeweils, welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität für die jeweilige Relation auf den vorgegebenen Mengen erfüllt sind:

(a) Die Menge der Menschen und die biologische Verwandtschaft als Relation zwischen zwei Menschen.

(b) Die Menge \mathbb{Z} mit $x \leq y$.

(c) Die Menge \mathbb{Z} mit $x < y$.

(d) Die Menge $\{1, 2, 3\}$ mit $x \sim y$, falls $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Aufgabe 12 (5 Punkte): Sei $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $(x, y) \leq (\tilde{x}, \tilde{y})$ definiert durch

$$x < \tilde{x} \vee (x = \tilde{x} \wedge y \leq \tilde{y}).$$

Zeigen Sie, dass dies eine totale Ordnung auf M bildet.

Aufgabe 13: Jemand sagt Ihnen beim gemeinsamen Lernen:

Ich verstehe nicht warum man die Forderung der Reflexivität bei Äquivalenzrelationen braucht. Wenn es symmetrisch und transitiv ist, dann kann man wie folgt argumentieren: $x \sim y$ impliziert mit der Symmetrie, dass $y \sim x$. Und da aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt, dass $a \sim c$, folgt aus $x \sim y$ und $y \sim x$, dass $x \sim x$. Also folgt aus Symmetrie und Transitivität die Reflexivität.

Hat die Person recht? Schreiben Sie entweder einen formalen Beweis auf, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an und erläutern Sie, warum der Beweis nicht korrekt ist.

Aufgabe 14: Wir betrachten die Menge $K = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$; p und q sind Polynome und $q \not\equiv 0$. Wir definieren Addition und Multiplikation wie bei den rationalen Zahlen und wollen genau wie dort nicht zwischen $\frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$ und $\frac{p(x)}{q(x)}$ unterscheiden, wenn $\tilde{p}(x)q(x) \equiv p(x)\tilde{q}(x)$.

Wir nehmen an, dass $q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$ mit $a_n > 0$. Dann definieren wir für Polynome $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ und $\tilde{p} = b_m x^m + \dots + b_0$, dass $p \leq \tilde{p}$, falls $n < m$ oder $n = m$ und es ein $i \leq n$ gibt, so dass für alle $i < k \leq n$ gilt, dass $a_k = b_k$ und $a_i < b_i$. Damit definieren wir nun $\frac{p}{q} \leq \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} \iff p\tilde{q} \leq \tilde{p}q$.

(a) Zeigen Sie, dass K damit zu einem geordneten Körper wird.

(b) Zeigen Sie, dass jede Intervallschachtelung in K aus einem Element besteht, aber nicht jede beschränkte Menge ein Supremum hat.