Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Seien $x, y \in \mathbb{R}$ definiert als kleinste Oberschranken von den streng wachsenden, beschränkten rationalen Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sind folgende Behauptungen äquivalent zu $x > y$?

(i) $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_k > y_n$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\ \ x_k > y_n$.

Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2: Die in Blatt 2, Aufgabe 12 definierte Ordnung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann mit der Abbildung $(x, y) \mapsto x + iy$ auch auf $\mathbb{C}$ definiert werden. Ist $\mathbb{C}$ damit ein geordneter Körper?

Aufgabe 3: Die folgenden Additionstheoreme gelten:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x \pm y) = \cos(x)\sin(y) \pm \sin(x)\cos(y).$$

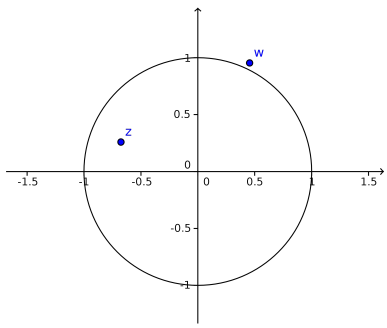
Nutzen Sie diese Additionstheoreme und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ für die folgenden Aufgaben.

(a) Zeigen Sie $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{1}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Berechnen Sie $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Aufgabe 4: Sie sehen z und w in der Zeichnung. Zeichnen Sie auch die folgenden komplexen Zahlen ein:



(a) z^2 (c) zw (e) $|z|$

(b) $\frac{1}{w}$ (d) $\frac{w}{z}$ (f) $\overline{w}$

Aufgabe 5 (5 Punkte): Sei $z = 0.3482759645 + 0.6517240354i$ und $w = 0.6517240354 + 0.3482759645i$.

(a) Skizzieren Sie z, w, $z + w$, zw möglichst ohne aufwändige Berechnung.

(b) Berechnen Sie $\text{Arg}(zw)$

(c) $\left|\dfrac{6\overline{w}^2 z^2 w^4}{(3 + 2i)w^3\overline{z}^3 z^2}\right|$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Schreiben Sie die folgenden komplexen Ausdrücke in der Form $a + ib$ auf, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

(a) $(2-3i)^3$ (b) $\frac{1}{-8+4i}$ (c) $\frac{9+2i}{5+5i}$ (d) $(2+3i)^4$ (e) $|3+4i|$

Aufgabe 7: Schreiben Sie die folgenden komplexen Ausdrücke in der Form $a + ib$ auf, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

(a) $\dfrac{9-2i}{4+7i}$

(b) $\frac{(1-i)^{1000}}{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{249}}$

(c) $\overline{2+3i} \cdot \overline{4-i}$

(d) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^3$

(e) $z + \frac{1}{z}$ mit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Aufgabe 8: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1.$$

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{2n} i^k k = \begin{cases} n(1-i) & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -(n+1)+ni & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 10: Wir betrachten $\mathbb{Q}[i] := \{\, p + qi \in \mathbb{C} \;;\; p, q \in \mathbb{Q} \,\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist $(\mathbb{Q}[i], +, \cdot)$ ein Körper?

Aufgabe 11: Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $z^4 = 16$ (b) $z^4 = -i$ (c) $z^3 = -4i$

Aufgabe 12: Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome.

(a) $z^2 - (1+2i)z - 1 + i$

(b) $z^2 - (6i-2)\, z - 2i - 11$

(c) $z^4 - z^2\big(\sqrt{2} - i\big) - i\sqrt{2}$

Aufgabe 13 (5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(b) Schreiben Sie den exakten Wert von $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ mithilfe von Wurzeln und ohne trigonometrische Funktionen.

(c) Schreiben Sie den exakten Wert von $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)$ mithilfe von Wurzeln und ohne trigonometrische Funktionen.

Hinweis: Additionstheoreme