

Analysis 1 - Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Beweisen Sie, dass für jede $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Erklären Sie, wieso man dies Parallelogrammgleichung nennt.

Aufgabe 2: Skizzieren Sie mit Begründung die Mengen

(a) $\left\{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Arg} \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = \frac{\pi}{4} \right\}$.

(b) $\{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) = |z - 2i| \}$.

Aufgabe 3: Bei Computeralgebrasystemen sieht man häufiger Ausdrücke wie $\sqrt{-1}$ und manchmal liest man $\sqrt{-1} = i$. Was ist an folgender Rechnung falsch?

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 4 (5 Punkte): (a) $z_1 = -1 + 2i$ ist eine Nullstelle des Polynoms

$$z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25.$$

Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10iz^2 + 5z - i.$$

(c) $2 + i$ und $3i$ sind Nullstellen von

$$z^6 - 5z^5 + 16z^4 - 42z^3 + 53z^2 + 27z - 90.$$

Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen.

Aufgabe 5:

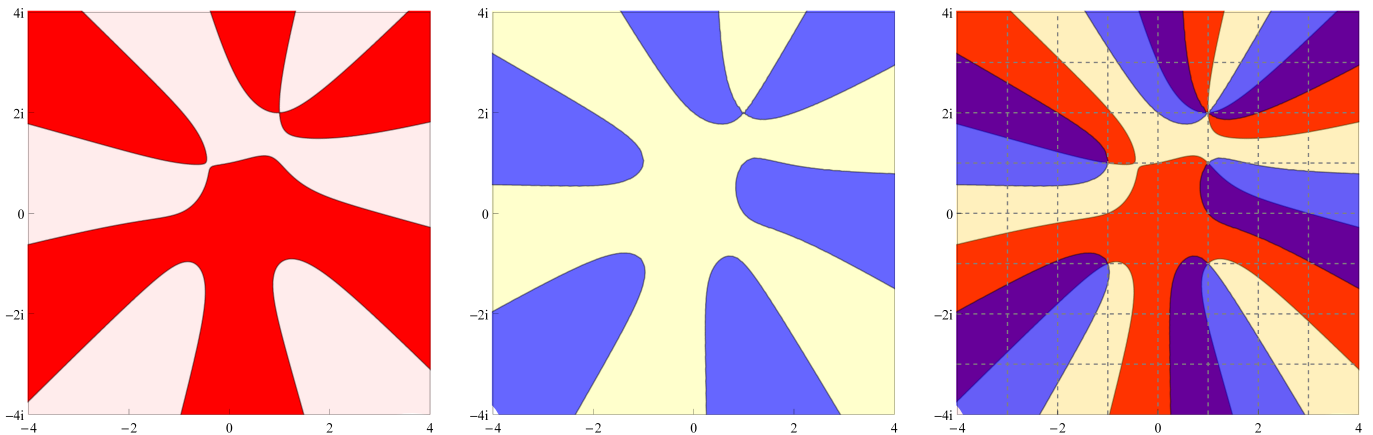
- (a) Berechnen Sie $f(\mathbb{C})$ für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{|z|}{z} + \frac{|z|}{\bar{z}}$.
(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{|z+2i|}$?

Aufgabe 6 (5 Punkte): Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$?

Aufgabe 7: Betrachten Sie die Funktion

$$p(z) = z^6 - (2 + 4i)z^5 - (3 - 4i)z^4 + 4z^2 - (8 + 16i)z - (12 - 16i).$$

- (a) Wo findet man in der Skizze die Nullstellen von $p(z)$?
(b) Versuchen Sie mithilfe der Skizze Nullstellen von $p(z)$ zu finden. Überzeugen Sie sich davon, dass es sich tatsächlich um Nullstellen handelt.
(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $p(z)$.



Rot bedeutet $\text{Re}(p(z)) < 0$, Blau bedeutet $\text{Im}(p(z)) < 0$.

Aufgabe 8 (5 Punkte): Berechnen Sie $f(K)$ mit $K = \{z \in \mathbb{C} ; |z - 1| = 1\}$ und $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Aufgabe 9: Es seien $A = \{z \in \mathbb{C} ; |z - 2i| = 1\}$ und

$$f_a : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad f_a(z) = (1 + i)z,$$
$$f_b : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad f_b(z) = \frac{1}{z - i}.$$

Beschreiben und skizzieren Sie mit Begründung

- (a) $f_a(A)$; (b) $f_b(A)$; (c) $(f_a \circ f_b)(A)$; (d) $(f_b \circ f_a)(A)$.