Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 5 - Version 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) $\dfrac{\pi}{\frac{1}{7} - 33^{26}} > \dfrac{\pi}{\frac{3}{22} - 33^{26}}$.

(b) $\left(\dfrac{25 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{7} - \left(34^{126}\right)^{-1}}\right)^{-3} > \left(\dfrac{\frac{1}{7} - \left(34^{127}\right)^{-1}}{25 + \frac{2}{3}}\right)^{3}$

(c) Es gibt $x \in \mathbb{R}$ derart, dass $|\cos(x) + i \sin(x)| = x$.

(d) $|\cos(1) + i \sin(1)| = 1$.

(e) Die Folge $\left\{\frac{2^n - 1}{2^n + 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Ist $\{a_{p(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$?

(b) Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $\{a_{p(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass die Folgen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{2^n + n^2}{\sqrt{4^n + 3^n + 2n}}$

(b) $b_n = \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n+3}}{n+2}$

(c) $c_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{Im}(c_n) - i \operatorname{Re}(c_n)}{|c_n| + 1}$, mit $c_0 = 2i$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|\operatorname{Re}(c_{n+2})| \leq \frac{1}{2}|\operatorname{Re}(c_n)|$ *und* $|\operatorname{Im}(c_{n+2})| \leq \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(c_n)|$

(d) $d_n = \frac{n!}{n^n}$

(e) $e_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge definiert durch

$$a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} := 1 + \tfrac{1}{a_n}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $a_{n+2} > a_n$ genau dann, wenn $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies a_{n+2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (und umgekehrt für $>$)

(d) Zeigen Sie, dass a_n konvergiert, indem Sie zeigen, dass a_{2n} und a_{2n+1} gegen den gleichen Grenzwert konvergieren müssen.

Aufgabe 5: Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $b_{n+1} = \frac{72}{1+b_n}$, $b_0 = 2$

(b) $d_{n+1} = \frac{d_n+6}{d_n+2}$, $d_0 = -1$

(c) $c_k = k\left(1 - \sqrt{1 - \frac{6}{k}}\right)$ für $k \geq 6$

(d) $d_0 = 5$, $d_{k+1} = d_k(2 - d_k)$

Aufgabe 6: Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reelle Folgen. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ genau dann konvergiert, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.

Aufgabe 7: Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge definiert durch $f_0 := 1, f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie

(a) Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_n := \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}$, ist streng monoton wachsend.

(b) Die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $c_n := \frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}}$, ist streng monoton fallend.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n < c_n$.

(d) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mit der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 4.

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für $x, y \geq 0$ gilt, dass $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

(b) Für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt, dass $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion. Nehmen Sie an, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und wenden Sie die Bernoulli-Ungleichung auf

$$\left(1 + \tfrac{x_{n+1}-\hat{x}}{(n+1)\hat{x}}\right)^{n+1} \textit{an, mit } \hat{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Aufgabe 9: Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend und die Folge $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.

(b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4 \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} = \frac{n^n}{(n-1)!}$$

(d) Wir setzen $e := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$