Prof. Guido Sweers **WS 2015/2016**
Jan M. Krämer
Michael Kühn

Analysis 1 - Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie jeweils $\sup\{x_n\}, \inf\{x_n\}, \limsup\limits_{n\to\infty} x_n, \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

(a) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$

(b) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(c) $x_n = n^{(-1)^n}$

Aufgabe 2: Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe von Partialbruchzerlegung in möglichst einfacher Form:

(a) $\dfrac{x^2 + 2x - 12}{(x-2)^2(x-3)}$

(b) $\dfrac{x^4 - 9\,x^3 + 3\,x^2 + 145\,x - 300}{(x-8)(x+1)}$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen.

(a) Zeigen Sie: $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, so dass $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe 4: Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Sei $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 1\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right)$

(b) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 1\right)$

Aufgabe 5 (5 Punkte): Angenommen jedes $x \in (-1,1) = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1\}$ ist ein Häufungspunkt für die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass dann 1 auch ein Häufungspunkt für diese Folge ist.

Aufgabe 6: Richtig oder falsch?

(a) Wenn $\{a_n\}$ nicht beschränkt ist, dann hat es auch keinen Häufungswert.

(b) Wenn $\{a_n\}$ nur einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert $\{a_n\}$.

(c) Wenn $\{a_n\}$ beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert $\{a_n\}$.

Aufgabe 7: Die Ganzzahlfunktion $x \mapsto [x]$ ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert als $[x] := \sup\{n \in \mathbb{N}\,;\, n \leq x\}$. Wir definieren

$$a_n := \left\{\sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

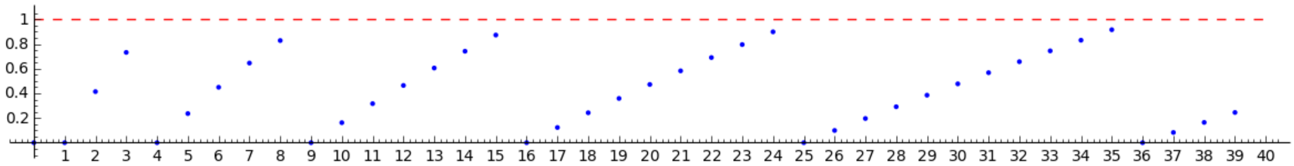
Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $n, m \in \mathbb{N}^+$:

(a) Für $n = m^2$ gilt $a_n = 0$.

(b) Für $n = m^2 + 2m$ gilt $a_n > 1 - \frac{1}{2m}$.

(c) Für $n \in [m^2, m^2 + 2m)$ gilt $a_n < a_{n+1} < a_n + \frac{1}{2m}$.

(d) Die Häufungspunkte von a_n sind $[0, 1]$



Aufgabe 8: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen und die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch durch das arithmetische Mittel $a_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k$.

(a) Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Folgern Sie:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

(c) Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9 (5 Punkte): Beweisen Sie für $c \in \mathbb{R}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = c \iff \forall_{\varepsilon>0} : (\exists_{n_0}\forall_{n\geq n_0} : a_n < c + \varepsilon) \wedge (\forall_{k_0\in\mathbb{N}}\exists_{k\geq k_0} : a_k > c - \varepsilon)$$

Wir wurden gebeten folgenden Hinweis aufzunehmen:

Liebe Studierende!
Die Fachschaft Mathematik möchte Weihnachten feiern. Mit Euch! Ihr seid eingeladen **am 9.12. ab 19 Uhr im Asta Café** einen Glühwein oder Punsch auf die kommenden Feiertage zu trinken. Wir freuen uns auf euch!