Prof. Guido Sweers **WS 2015/2016**
Jan M. Krämer
Michael Kühn

Analysis 1 - Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3 Punkte): Berechnen Sie

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}i\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Welche Reihen konvergieren?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

Aufgabe 3 (4 Punkte): Seien m_3, m_5, m_6 die dritte, bzw fünfte und sechste Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Geben Sie m_3, m_5, m_6 an und bestimmen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+n^{m_3}}{n^{m_6+3}+n^{m_5+1}+11}.$$

Aufgabe 4: Sind die folgenden Reihen konvergent oder divergent? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{5}{2}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{14}\frac{2^n+3^n i}{(4i)^n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$

Aufgabe 5 (5 Punkte): Untersuchen Sie die folgende Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+2(-1)^n}$$

(a) Konvergiert die Reihe absolut?

(b) Gelten die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums?

(c) Konvergiert die Reihe?

Aufgabe 6: Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert } \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ konvergiert}$$

Hinweis: Zeigen Sie $2xy \leq x^2 + y^2$.

(b) Sei $a_n > 0$ monoton fallend. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 7: Die Folge $\mathcal{F} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kann man in zwei disjunkte Teilfolgen

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ und } \mathcal{F}_2 = \left\{\frac{-1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ zerlegen.}$$

(a) Geben Sie eine Folge $\mathcal{F}$ mit den oben genannten Eigenschaften an, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Geben Sie eine Folge $\mathcal{F}$ mit den oben genannten Eigenschaften an, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Aufgabe 8 (3 Punkte): Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis an, oder ein Gegenbeispiel.

(a) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$.

(c) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 9: Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) Wenn $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ gilt, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Aufgabe 10: Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis an, oder ein Gegenbeispiel.

(a) $\left(\exists c < 1 \;:\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq c\right) \Rightarrow \left(\exists d < 1 \;:\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq d\right)$

(b) $\left(\exists d < 1 \;:\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq d\right) \Rightarrow \left(\exists c < 1 \;:\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq c\right)$