Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 8 - Version 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 12 Uhr.

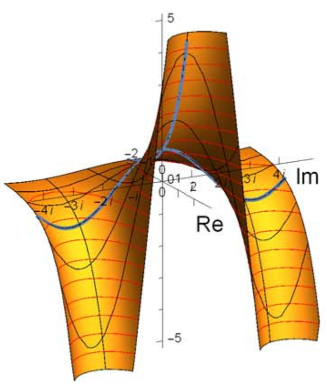
Aufgabe 1 (8 Punkte): Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

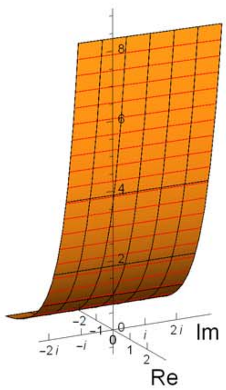
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + n^2} z^n$

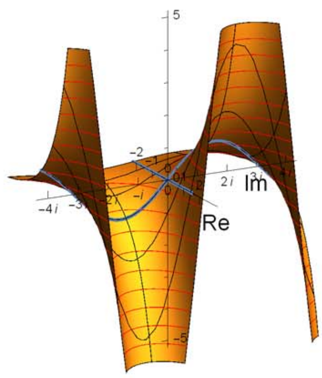
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n} x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-3}{z+2}\right)^n$

Beachten Sie auch jeweils den Rand des Konvergenzkreises.
Hinweis: (d) ist keine Potenzreihe in z.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Die folgenden Bilder zeigen $z \mapsto \mathrm{Re}(\exp(z))$, $z \mapsto \mathrm{Im}(\exp(z)$ und $z \mapsto |\exp(z)|$. Welches Bild gehört zu welcher Funktion?







Aufgabe 3 (4 Punkte): Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+10}}{2^n} x^{2n+5}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{30} + 2^n}{3^n - 2^n} x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!) + 3}{n} x^n$

Aufgabe 4: Sei $a_{n,m} = \left\{ \begin{array}{cl} 2^{m-n} & \text{wenn } n > m \\ 0 & \text{wenn } n = m \\ -2^{n-m} & \text{wenn } n < m \end{array} \right|$. Gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$?

Aufgabe 5 (4 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

$$\forall_{x\in(-1,1)} \;:\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Aufgabe 6: Sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Gilt $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$?

Aufgabe 7: Wir definieren die (reellen) Potenzreihen $S, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad C(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\exp(ix) = C(x) + iS(x)$

(b) $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$

(c) $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$

Aufgabe 8: Wir definieren das $(n+1)$-te Restglied der Exponentialreihe durch

$$R_{n+1}(x) := \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Zeigen Sie:

(a) Für $|x| \le 1$ gilt $|R_{n+1}(x)| \le 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

(b) $\exp(1)$ ist irrational.

Aufgabe 9: Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\forall_{m,n\in\mathbb{N}^+} \;:\; \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{m}\left|\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!}\right| + \sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$

(b) $\forall_{k,n\in\mathbb{N}^+} \;:\; \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$

(c) $\forall_{k\in\mathbb{N}} \;:\; \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$