Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Michael Kühn

WS 2015/2016

Analysis 1 - Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (im Studierendenarbeitsraum, Mathematisches Institut, 3. Etage) geworfen werden.
Abgabeschluss ist Donnerstag, der 07.01.2016, 12 Uhr.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für alle $x \in (-\infty, 1)$ gilt, dass $1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$ getrennt.

Aufgabe 2: Wir definieren für die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x-1) & \text{für } x \geq 1, \\ a/x & \text{für } x \in (0,1). \end{cases}$$

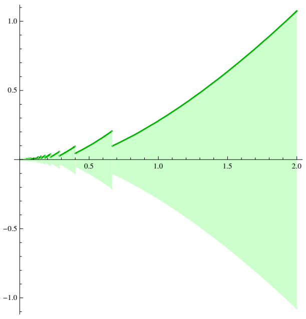
(a) Wie muss a gewählt werden, damit f in 1 stetig ist?

(b) Zeigen Sie, dass f stetig in 1 ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wir definieren die Weihnachtsbaumfunktion
$f : (0, 2] \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^3}\left(1.4 + \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}\right).$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.



Aufgabe 4 (5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt

$$|\exp(x) - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion exp in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist, falls f stetig in 0 ist.

Aufgabe 6: Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } |x| > \sqrt{2} \end{cases}$$

ist stetig auf ganz $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 7 (5 Punkte): In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ äquivalent sind:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{y\in A} \; : \; |x-y| \le \delta \implies |f(x)-f(y)| \le \varepsilon.$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{y\in A} \; : \; |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 10: Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig und monoton wachsend. Sei $x_0 \in [a,b]$ und $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $f(x_0) < x_0 \implies x_n$ ist monoton fallend

(b) $f(x_0) > x_0 \implies x_n$ ist monoton wachsend

(c) x_n konvergiert gegen ein $\xi \in [a,b]$

(d) $f(\xi) = \xi$

Aufgabe 11: Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\downarrow 1} f_n(x)$. (c) $\lim\limits_{x\uparrow 1} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\uparrow 1} f_n(x)$.

Aufgabe 12 (5 Punkte): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Man nennt f Lipschitz-stetig auf D, falls es eine Konstante $L \ge 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$$

gilt.

Zeigen Sie:

(a) Ist eine Funktion f Lipschitz-stetig auf D, dann ist f auch stetig auf D.

(b) Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.