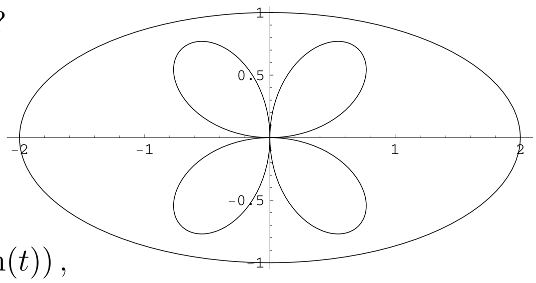
NAME:	AUFGABE 1	

1. (a) Wie lautet die Definition der Bogenlänge einer Kurve?



   (b) Zeigen Sie, dass die Kurven

$$\alpha \;:\; [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \alpha(t) = (2\sin(t), \cos(t))\,,$$
$$\beta \;:\; [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \beta(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))\,,$$

   die gleiche Bogenlänge haben.

NAME: AUFGABE 2

2. Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = (1 + x(t))^2$ mit ihren Existenzintervallen an.

Name: Aufgabe 3

3. Wir betrachten das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) - x(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

   (a) Ist dieses System stabil? *(neutral stabil, asymptotisch stabil, instabil, ...)*

   (b) Zu welchem Typ gehört dieses System? *(Knoten, entarteter Knoten, Sattelpunkt, Zentrum, Strudel, Quark, ...)*

Name: Aufgabe 4

4. (a) Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\{\varphi_i \in \mathbb{R}^n; 1 \le i \le n\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$ von Eigenvektoren von A. Die zugehörigen Eigenwerte nennen wir $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, das heißt: $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$. Zeigen Sie, dass

$$\exp(tA)\varphi_i = e^{\lambda_i t}\varphi_i.$$

(b) Sei $A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit folgenden Eigenwerten und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1 \text{ mit } \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \text{ mit } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 0 \text{ mit } \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung zu $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

NAME:

AUFGABE 5

5. Berechnen Sie die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{x^2-y^2}\,(x^2 + y^2)$.

NAME: AUFGABE 6

6. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
   Geben Sie eine Definition von "*f ist differenzierbar in a*" an.

   (b) Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
   Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x, g(x))$ differenzierbar?

   (c) Seien folgende Werte gegeben:

$$f(0,0) = 1,\ \partial_1 f(0,0) = 2,\ \partial_2 f(0,0) = 3,\ g(0) = 0 \text{ und } g'(0) = 4.$$

   Wenn möglich, berechnen Sie $h'(0)$ für h aus (b).

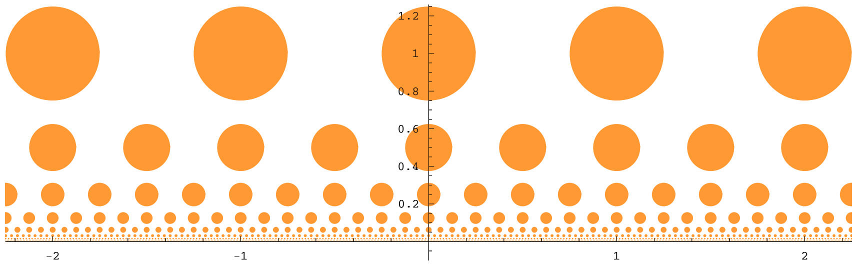
NAME: | AUFGABE 7

7. Sei $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x-a\| < r\}$ die offene Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt a. Sei $D_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x-a\| \leq r\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt a.

   Wir definieren A als die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Kreisscheiben wie folgt:

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_{\frac{1}{2^{k+2}}}\left(\frac{n}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right).$$

   Eine Skizze von A ist beigefügt.



   (a) Gilt folgendes:

$$A^o = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_{\frac{1}{2^{k+2}}}\left(\frac{n}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right)?$$

   (b) Ist A abgeschlossen?

   (c) Welche Häufungspunkte hat A?

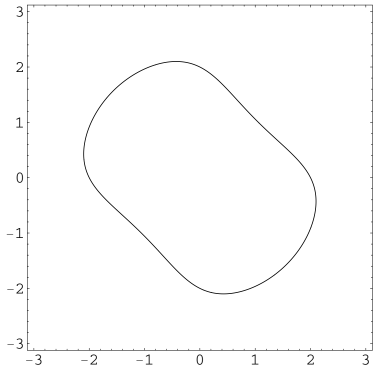
8. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y\, e^{xy}$ in $(0, 1)$.

NAME:	AUFGABE 9	

9. Wir definieren $k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + e^{xy} = 5\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass k beschränkt ist.

   (b) Man berechne die Tangente durch $(0, 2)$ an die Menge k.



NAME: | AUFGABE 10

10. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Unter welcher Bedingung ist $f : B_r(a) \to f\left(B_r(a)\right)$, mit $r > 0$ genügend klein, invertierbar?

(b) Wir nehmen $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 2x \\ (x+1)\,y \end{pmatrix}$.

Es gibt eine Stelle $a \in \mathbb{R}^2$, wo f lokal nicht invertierbar ist. Berechnen Sie diese Stelle a.