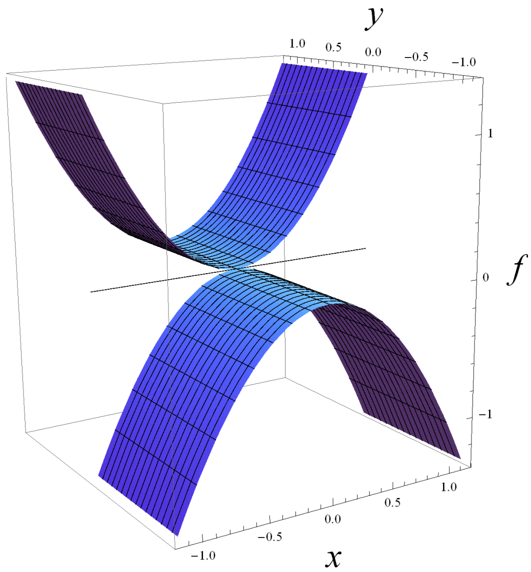
Aufgaben der Klausur vom 24. Juli 2010
Prüfungsstoff: Analysis II

1. Berechnen Sie die Lösung von $y'(t) = \dfrac{t}{y(t)}$, die $y(1) = -1$ erfüllt.

2. Berechnen Sie die Tangente in $(2,0)$ an $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + y - e^{xy} = 3\}$.

3. Man betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y = 0, \\ -x^2 & \text{für } y < 0. \end{cases}$$



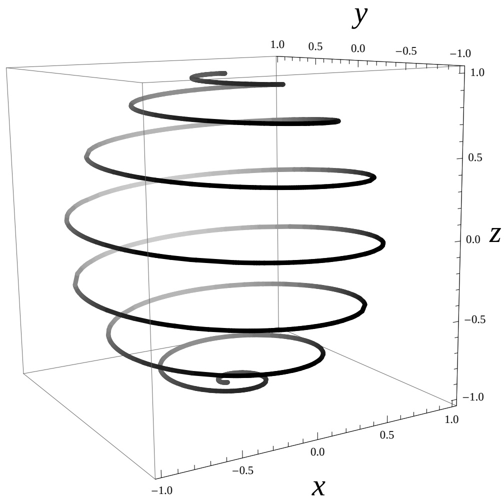
   (a) Ist f stetig in $(0,0)$?

   (b) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

   Beweisen Sie Ihre Antworten.

4. Wir betrachten die Kurve $k : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$k(t) = (\sin(t)\cos(15t), \sin(t)\sin(15t), \cos(t)).$$

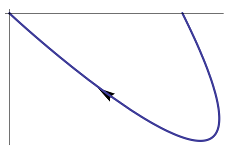


   (a) Wie ist die Bogenlänge ℓ von k definiert?

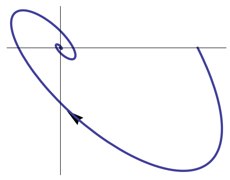
   (b) Berechnen Sie a und b derart, dass

$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{a + b\sin^2(t)}\,dt.$$

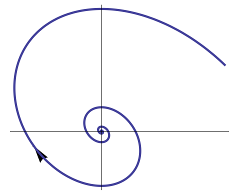
5. a)



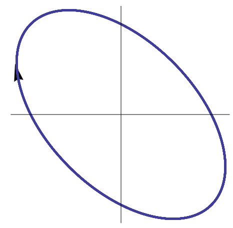
b)



c)



d)



Wir betrachten das System $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für:

I. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1 + 2i$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$

Die zugehörige Skizze ist ...

Die Klassifizierung ist ....

II. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$

Die zugehörige Skizze ist ...

Die Klassifizierung ist ....

III. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = \frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$

Die zugehörige Skizze ist ...

Die Klassifizierung ist ....

IV. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$

Die zugehörige Skizze ist ...

Die Klassifizierung ist ....

Ergänzen Sie die Lücken im Text.

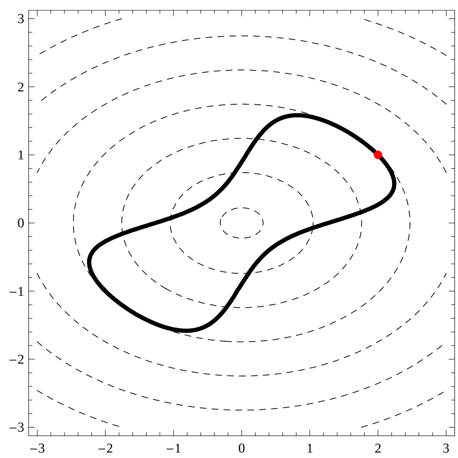
Mit „Klassifizierung“ ist gemeint: stabiler Knoten, instabiler Strudel, ...

6. Sei $A = \{(x,y)\,; x^2 + 2y^2 + xy + e^{2-xy} = 9\}$, und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2.$$

Wir behaupten, dass die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ihr Maximum annimmt in $(2,1)$. Was sagt der Multiplikator-Satz von Lagrange zu dieser Aussage?

Im Bild ist A dargestellt als durchgezogene Kurve, und die gestrichelten Kurven sind Niveaulinien von f.

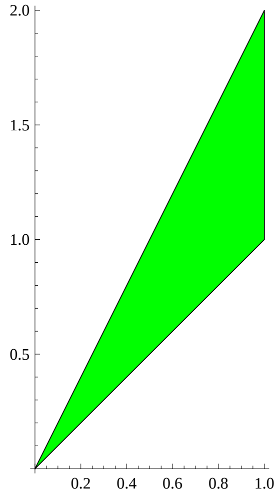


7. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung um $(\pi, 1)$ von

$$f(x,y) = \sin(xy).$$

8. Berechnen Sie für $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y < 2x < 2\}$ das Integral

$$\int_\Omega y \; d\,(x,y)\,.$$



9. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f\,(0,1) = 2$, und sei $g\,(x,y) = xf\,(x,y)$.

   (a) Berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}\,(0,1)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}\,(0,1)$.

   Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f\,(0,1) = 2$, und sei $g\,(x,y) = xf\,(x,y)$.

   (b) Existieren $\frac{\partial g}{\partial x}\,(0,1)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}\,(0,1)$?

   (c) Ist g differenzierbar in $(0,1)$?

10. Wir betrachten

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+2}.$$

   (a) Zeigen Sie $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$.

   (b) Beweisen Sie, dass $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ und $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ existieren.

   (c) Berechnen Sie die Stellen, wo die Funktion f ihr Minimum bzw. ihr Maximum annimmt.