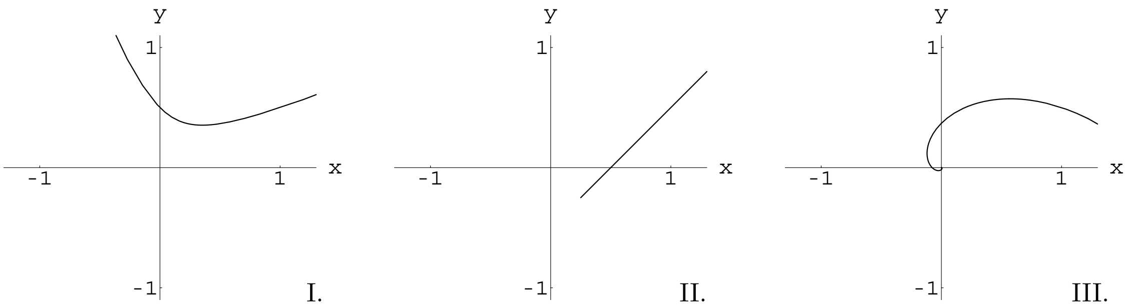
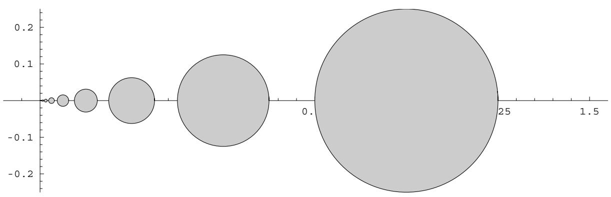
1. Geben Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für $x, y \in \mathbb{R}^n$ an und beweisen Sie diese.
2. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Berechnen Sie die Krümmung.
3. Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = 1 - (x(t))^2$ an.
4. Es sind drei Systeme von Differentialgleichungen gegeben und Skizzen von 3 zugehörigen Lösungen. Welches Bild gehört zu welchem System? Begründen Sie Ihre Aussage und klassifizieren Sie den Typ des Systems.

$$a)\ \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x'(t) = y(t) - x(t) \\ y'(t) = y(t) + x(t) \end{cases}$$



5. Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$.
   (a) Wie definiert man $\exp(tA)$?
   (b) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Welches Anfangswertproblem löst $x(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$?
6. Man definiert $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{\frac{1}{2^{n+2}}} \left(\frac{1}{2^n}, 0\right) \subset \mathbb{R}^2$.



   (a) Ist D offen?
   (b) Ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_{\frac{1}{2^{n+2}}} \left(\frac{1}{2^n}, 0\right)}$ abgeschlossen?
7. Berechnen Sie die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y^2 - xy - x^2 + x^4$.
8. Betrachten wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = |xy| \sqrt{x^2 + y^2}$ in Umgebungen von $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ und $P_3 = (1, 1)$.
   In welchen dieser drei Punkte ist f differenzierbar?
9. Berechnen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x\, e^{xy}$ in $(0, 1)$.
10. Wir definieren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y) = \begin{cases} (x + 1, y) & \text{für } x^2 + y^2 \le 1, \\ \left(\frac{x+1}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) & \text{für } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $F(\mathbb{R}^2) \subset \overline{B_2(0, 0)}$.
   (b) Wir definieren $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ und $(x_{i+1}, y_{i+1}) = F(x_i.y_i)$. Hat $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge?
11. Wir betrachten F aus der letzten Aufgabe.
   (a) Ist F stetig?
   (b) Hat F einen Fixpunkt?
12. Sei $K = \left\{(x, y)\,; y^2 - xy - x^2 + x^4 = 0\right\}$. Gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ und eine Funktion $g : (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$K \cap B_\varepsilon(1) \times B_\delta(1) = \{(g(y), y)\,; |y - 1| < \varepsilon\}\,?$$