Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 0

Dieses Blatt wird in den Übungsgruppen vom 14. - 16. April 2014 besprochen und nicht bewertet.

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Asymptoten.

(b) Berechnen Sie die inverse Funktion g und geben Sie das Definitionsgebiet an.

(c) Zeichnen Sie f und g.

(d) Welche Asymptoten hat g?

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$.

(a) Ist f surjektiv?

(b) Ist f injektiv?

(c) Geben Sie das Definitionsgebiet der inversen Funktion an.

(d) Wo ist die inverse Funktion differenzierbar?

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.

(a) Ist f surjektiv?

(b) Ist f injektiv?

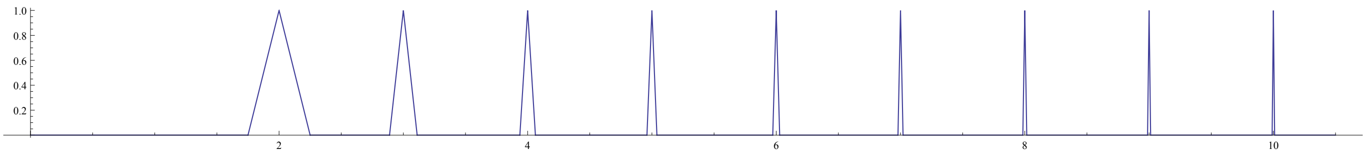
(c) Bestimmen Sie alle maximalen Intervalle, auf denen f injektiv ist.

(d) Bestimmen Sie für jedes dieser Intervalle das Bild dieses Intervalls unter f. Bestimmen Sie auch den Definitionsbereich der inversen Funktion und das Bild der inversen Funktion für jedes dieser Intervalle.

(e) Wo sind die inversen Funktionen differenzierbar?

Aufgabe 4: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - n^2 \, |x - n| & \text{für } x \in [n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}],\ n \in \{2, 3, 4, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



(a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$ nicht existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 5: Beweisen Sie, dass $\cos(x) \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: Geben Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen an:

(a) $\frac{1}{x^2(x^2-x-12)}$

(b) $\frac{x^2-3}{2x^2+4x+8}$

(c) $\frac{(x^2-5x+6)(x^2+5x+4)}{x^2-6x+8}$

Geben Sie auch an, auf welchen Intervallen die Stammfunktionen definiert sind.

Aufgabe 7: Existieren die uneigentlichen Integrale?

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+\sqrt{x}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+\sqrt{x}}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|+1}dx$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{|\ln(x)|+1}dx$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x)^2dx$

(i)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$

Aufgabe 8: Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \tan(x)dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$

(d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx$

(e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2(x)}dx$

(f) $\displaystyle\int_e^{e^3} \ln(x)dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2e^{x^3}+\frac{1}{3}}{e^{x^3}+x}dx$

(h) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(x)}dx$

(i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x\cos(\sqrt{x})}}dx$

(j) $\displaystyle\int_3^4 x(x-3)^7dx$

(k) $\displaystyle\int_{-\sqrt[3]{3}}^{0} x^2\sin(x^3+3)dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{5}{2}}\cos(x)dx$

(m) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx$

(n) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(p) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{1+x^2}dx$

(q) $\displaystyle\int_1^2 x^2e^xdx$

(r) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^{-x}dx$

(s) $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{x^3-x^2}dx$

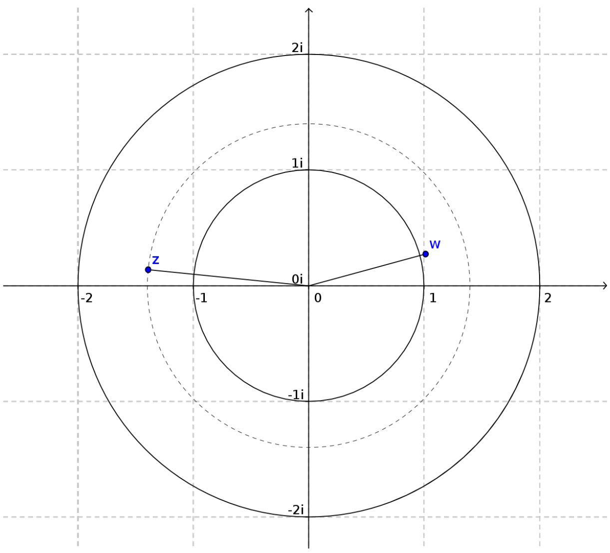
(t) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} e^x\sin(x)dx$

(u) $\displaystyle\int_1^e \ln^2(x)dx$

(v) $\displaystyle\int_1^{1+\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin(x-1)^2}\sin(x-1)\cos(x-1)dx$

Aufgabe 9:

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ wie eingzeichnet und $u, v \in \mathbb{C}$, so dass $u^2 = v^2 = z$ und $\mathrm{Re}(u) > \mathrm{Re}(v)$.
Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen ein:



(a) z^2

(b) $\bar{z}$

(c) $z\bar{z}$

(d) zw

(e) $\frac{z}{w}$

(f) $\frac{1}{z}$

(g) iz

(h) u

(i) v

(j) $\mathrm{Im}(z) + i\,\mathrm{Re}(z)$

(k) $-z$

(l) $|z|$