Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 2
Übungsblatt 1 (v2)

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist Donnerstag, der 17. April 2014, um **12 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): Berechnen Sie den Winkel zwischen v_1 und v_2 und den Winkel zwischen v_3 und v_4.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{22} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (0 Punkte): Sei $p \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(t) = \left(\cos(t) \left|\cos(t)\right|^{\frac{2}{p}-1}, \sin(t) \left|\sin(t)\right|^{\frac{2}{p}-1} \right)$$

als Spur die Menge $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; |x|^p + |y|^p = 1 \}$ hat.

(b) Zeichnen Sie diese Spuren für $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$ und $p = 3$.

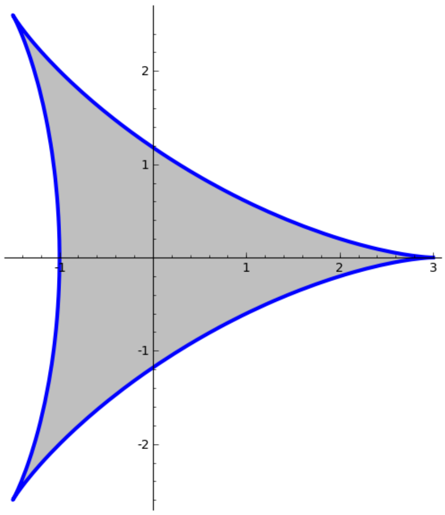
Aufgabe 3 (10 Punkte):

Wir betrachten die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)).$$

(a) Bestimmen Sie die größtmöglichen Teilintervalle von $[0, 2\pi]$, auf denen die Kurve glatt ist.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve eingeschlossen wird.



Aufgabe 4 (0 Punkte): Gegeben sei die Kurve $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \left(\frac{1}{\cos(x)}, \operatorname{artanh}(\sin(x)) \right).$$

Geben Sie die Umparametrisierung auf Bogenlänge von f an.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Wir betrachten einen Zug von der Seite, der sich mit Geschwindigkeit $v = 3m/s > 0$ nach rechts bewegt. Auf Höhe der Lauffläche am Rad mit Radius $r = 0.5m$ ist außen ein weißer Fleck zu sehen.

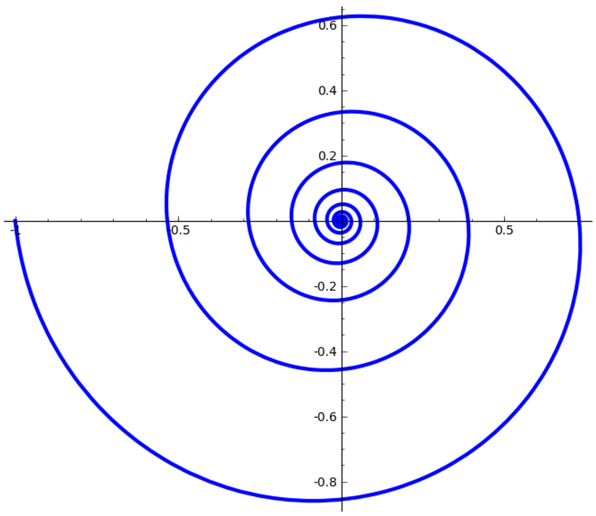
(a) Bestimmen Sie die Kurve dieses Flecks in Abhängigkeit von der Zeit, wobei er bei $t = 0$ die Schiene mit $y = 0$ berührt.

(b) Skizzieren Sie die Kurve.

(c) Ist die Kurve glatt?

(d) Skizzieren Sie die Kurve des Flecks, wenn er sich auf dem Spurkranz befindet, das heißt einen größeren Radius als die Lauffläche des Rades hat.

Aufgabe 6 (10 Punkte):



Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k < 0$. Die Funktion $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\phi(t) = (a \exp(kt) \cos(t), a \exp(kt) \sin(t))$$

(a) Ist die Kurve glatt?

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Kurve an einem Punkt P und der Geraden durch 0 und P.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{cases} \left(|t|^{\frac{5}{4}} \cos\left(\frac{1}{t}\right), |t|^{\frac{5}{4}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) & t \neq 0 \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$$

(a) Ist f differenzierbar?

(b) Ist f stetig differenzierbar?

(c) Skizzieren Sie f, eingeschränkt auf das Intervall $[0, 1]$.

(d) Zeigen Sie, dass die Bogenlänge von f, eingeschränkt auf das Intervall $[0, 1]$, endlich ist. *Hinweis: Schätzen Sie dafür den Integranden geeignet ab.*

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**