Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 10

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 26. Juni 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = (1 + x + xy^2)\cos(x+y)$$

an der Stelle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n}\forall_{t\in[0,1]} \;:\; u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y).$$

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und die Hesse-Matrix von u sei positiv semidefinit an jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass u konvex ist.

Aufgabe 3 (0 Punkte): Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) u ist konvex.

(b) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n} \;:\; (\nabla u(x) - \nabla u(y))(x-y) \geq 0.$

(c) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n} \;:\; u(y) \geq u(x) + (\nabla u(x))(y-x).$

(d) Die Hesse-Matrix von u ist positiv semidefinit an jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (0 Punkte): Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}(1 - x^2 - y^4).$$

(a) Berechnen Sie die stationären Punkte von f.

(b) Welche liefern ein Extremum?

(c) Welches Extremum ist global und welches lokal?

Aufgabe 5 (0 Punkte): Berechnen Sie alle stationären Stellen der Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(a) $f_1(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f_2(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f_3(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$

(d) $f_4(x,y) = \cos(x)\cos(y)$

(e) $f_5(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,xy$

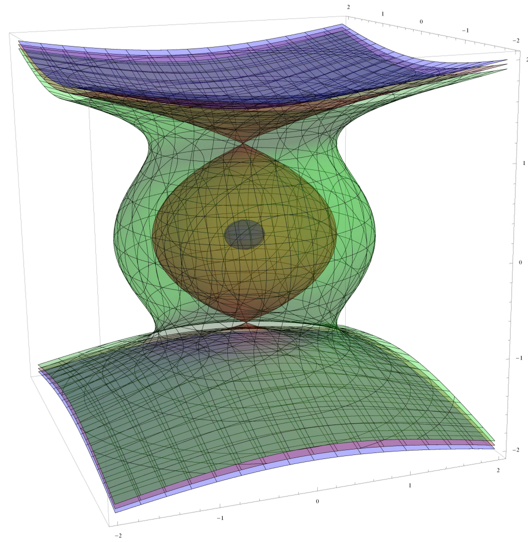
Aufgabe 6 (10 Punkte): Berechnen Sie alle stationären Stellen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$ und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat $f(x, y) = -x^2 + axy - by^2$ ein Maximum in $(0, 0)$?

Aufgabe 8 (0 Punkte): Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y, z) = 1 + z^4 - 2z^2 - x^2 - y^2,$$

hat ein Extremum und zwei Sattelpunkte.
Berechnen Sie die stationären Punkte und begründen Sie mithilfe des Bildes, warum es sich bei dem jeweiligen Punkt um ein Extremum oder einen Sattelpunkt handelt.
Im Bild sieht man die Niveaumengen zu -1, 0 und 0.95.



Aufgabe 9 (0 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine fünfmal differenzierbare Funktion mit $\partial^\alpha f(0, 0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| \leq 2$.

(a) Zeigen Sie: Wenn es ein $\alpha \in \mathbb{N}^2$ gibt mit $|\alpha| = 3$ und $\partial^\alpha f(0, 0) \neq 0$, dann hat f kein Extremum in $(0, 0)$.

(b) Zeigen Sie: Wenn außerdem $\partial^\alpha f(0, 0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| = 3$ und

$$\xi_1^4 \partial_1^4 f(0, 0) + 4\xi_1^3 \xi_2 \partial_1^3 \partial_2 f(0, 0) + 6\xi_1^2 \xi_2^2 \partial_1^2 \partial_2^2 f(0, 0) + 4\xi_1 \xi_2^3 \partial_1 \partial_2^3 f(0, 0) + \xi_2^4 \partial_2^4 f(0, 0) > 0$$

für $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dann hat die Funktion f ein Minimum in $(0, 0)$.

(c) Hat $f(x, y) = x\left(e^{xy} - 1 - y^2\right)$ ein Extremum in $(0, 0)$?

(d) Hat $g(x, y) = x\left(e^{xy^2} - 1 - xy^2\right)$ ein Extremum in $(0, 0)$?

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**

Eine Mitteilung der Fachschaft:
Die Fachschaft Mathematik lädt euch herzlich zum Sommerfest am Freitag, den 27.06.14 ab 16.00 Uhr auf dem Platz zwischen Hörsaalgebäude und Bibliothek ein! Grillgut und Getränke werden vor Ort verkauft. Wir freuen uns auf euch!