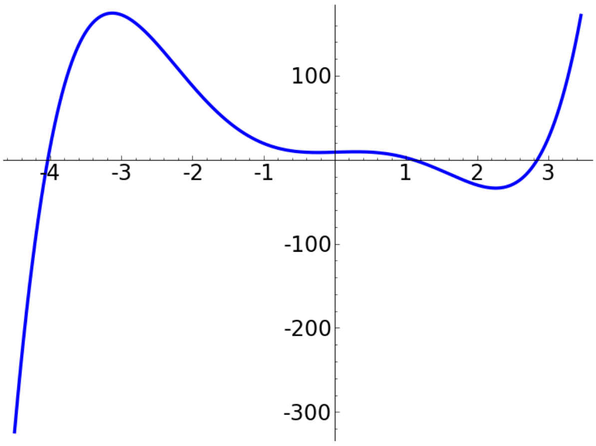
Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 11

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 03. Juli 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = x^5 + x^4 - 12x^3 + x^2 + 2.5x + 9.$$



Dieses Polynom hat 3 reelle Nullstellen.

(a) Wir führen das Newton-Verfahren mit dem Anfangswert $x_0 = 0$ durch. Berechnen Sie x_1.

(b) Überlegen Sie sich mit Hilfe der Zeichnung, gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Wir wollen die Lösungen des folgenden Gleichungssystems mit Newton approximieren.

$$e^{x+y} = x - y, \quad x^4 + 4xy + y^4 = 0$$

(a) Wie lautet die Funktion F in der Iterationsvorschrift nach Newton, so dass

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right)?$$

(b) Wieso sollte man nicht $(-1, 1)$ als Startwert wählen?

Aufgabe 3 (0 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Kontraktion ist, wenn es ein $\theta \in (0, 1)$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq \theta$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (0 Punkte): Das Newton-Verfahren für $\arctan(x) = 0$, das heißt

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i),$$

konvergiert nur, wenn x_0 nahe bei 0 gewählt wird.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass für $x_0 = a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ periodisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $x_0 > a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ divergiert.

(c) Zeigen Sie, dass für $x_0 \in (0, a)$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ konvergiert.

(d) Geben Sie ein Verfahren an, das a approximiert.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Wir betrachten das Polynom $q(x) = x^3 - 2x + 2$.

(a) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren für die Startwerte $x_0 = 1$ und $x_0 = 0$ jeweils x_1, x_2, x_3.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten des Newton-Verfahrens von q für Startwerte in der Nähe von 0 und 1 numerisch. Was passiert?

Aufgabe 6 (0 Punkte): (a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ gegeben. Bei welchen Punkten hat f lokal keine Umkehrfunktion?

(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to (\mathbb{R}^+)^3$ mit $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Umgebung $B_r(a, b)$ gibt, für die $f_{|B_r(a,b)} : B_r(a, b)$ umkehrbar ist.

(b) Wieso ist $f_{|B_r(0,0)}$ für kein $r > 0$ umkehrbar?

(c) Hat $f_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ eine Inverse?

Aufgabe 8 (0 Punkte): Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren eine auf 3 Dezimalstellen genaue Approximation von $\sqrt{2}$.

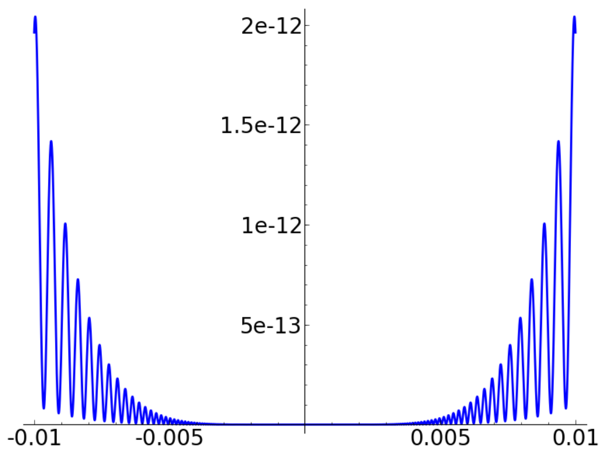
Aufgabe 9 (0 Punkte): Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Gibt es einen Startwert $x_0 \neq 0$, so dass die Konvergenz des Newton-Verfahrens quadratisch ist?

Aufgabe 10 (0 Punkte): *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und x_∞ sei eine einfache Nullstelle von f, also $f(x_\infty) = 0$ und $f'(x_\infty) \neq 0$. Dann kann man zeigen, dass das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergiert:*

Falls x_0 ausreichend nahe bei x_∞ liegt, dann gilt $x_n \to x_\infty$ und es gibt eine Konstante c, so dass $|x_{n+1} - x_\infty| \leq c\,|x_n - x_\infty|^2$.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^6 \left(1.1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$



(a) Berechnen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Können Sie mithilfe der Skizze begründen, welchen Wert $f'(0)$ und $f''(0)$ haben müssen?

(c) Gibt es ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in (a, b)$, so dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \in (a, b)$ gegen die Nullstelle konvergiert?

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**