Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 2
Übungsblatt 12

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 10. Juli 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Berechnen Sie

$$\nabla \begin{pmatrix} x^2+xy+y^2+yz+z^2 \\ xyz+\exp(x+y-z) \end{pmatrix}.$$

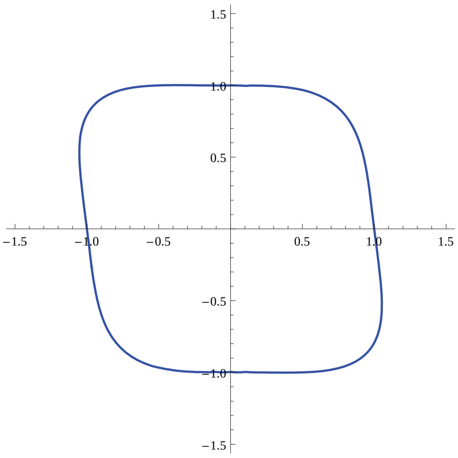
Hier ist ∇ der Gradient und das heißt, die Matrix aller partiellen Ableitungen ist gefragt und nicht die Divergenz, die übrigens durch $\nabla\cdot$ angedeutet wird.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Die Menge

$$W := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^4+\tfrac{1}{2}x^3y+y^4=1\right\}$$

kann man mittels zweier Funktionen $f_1 \geq f_2$ beschreiben:

$$W = \{(x, f_1(x)); x_0 \leq x \leq x_1\} \cup \{(x, f_2(x)); x_0 \leq x \leq x_1\}.$$



(a) Berechnen Sie x_0 und x_1.

(b) Die Punkte $(0,1)$ und $(\frac{1}{2},-1)$ liegen in der Menge W. Berechnen Sie $f_1'(0)$ und $f_1''(0)$ und ebenso $f_2'(\frac{1}{2})$ und $f_2''(\frac{1}{2})$.

Aufgabe 3 (0 Punkte): Wir betrachten die Menge $M \in \mathbb{R}^5$ definiert durch

$$M := \left\{x\in\mathbb{R}^5 \;;\; e^{x_1^2}+e^{x_2^2}+e^{x_3^2}=3e \text{ und } x_2^4-x_2x_4+x_4^4=1 \text{ und } e^{x_3^2}+x_3x_5-e^{x_5^2}=1\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich M in einer Umgebung von $(1,1,1,1,1)$ mit Hilfe von nur zwei Koordinaten parametrisieren lässt.

(b) Kann man M in einer Umgebung von $(1,1,1,1,1)$ durch $\{x_3, x_5\}$ parametrisieren?

Aufgabe 4 (0 Punkte):

(a) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y)=x^4+y^4$ auf der Menge

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2=1\right\}.$$

(b) Berechnen Sie das Minimum und das Maximum von der Funktion

$$f(x,y,z)=x^2+xy+y^2+yz+z^2 \text{ auf } K=\left\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}.$$

Hinweis, betrachten Sie den Rand und das Innere von K getrennt.

Aufgabe 5 (5 Punkte): Berechnen Sie die maximale z-Koordinate von

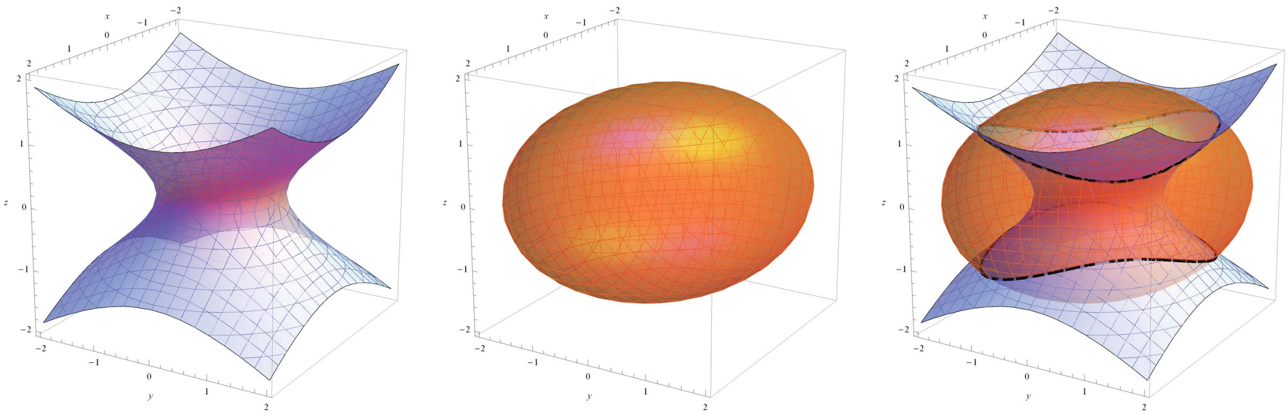
$$E = \left\{(x, y, z)\,; x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 1\right\}.$$

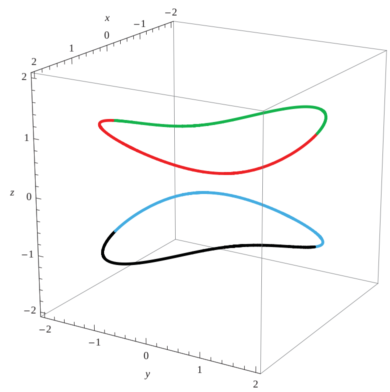
Aufgabe 6 (0 Punkte): Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} K &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - 2z^2 = 1\right\} \text{ und} \\ E &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + xy + y^2 + z^2 = 3\right\}. \end{aligned}$$

Diese Mengen schneiden sich in zwei Kurven,

$$\kappa_1 = \{(x, y, z) \in K \cap E; z > 0\} \text{ und } \kappa_2 = \{(x, y, z) \in K \cap E; z < 0\}.$$





Man kann κ_1 in zwei Teile zerlegen, die sich durch y parametrisieren lassen: $\kappa_1 = \kappa_{11} \cup \kappa_{12}$. Für κ_{11} gibt es eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(y) = (f_1(y), y, f_3(y))$$

derart, dass

$$\kappa_{11} = \{(f_1(y), y, f_3(y))\,; a \le y \le b\}.$$

(a) Berechnen Sie a und b.

(b) Wieso findet man a und b auch, wenn man das Gleichungssystem

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x G_1 & \partial_z G_1 \\ \partial_x G_2 & \partial_z G_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=f(a)} = 0 \text{ und } G(x, y, z)|_{(x,y,z)=f(a)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst für $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 \\ x^2 + xy + y^2 + z^2 - 3 \end{pmatrix}$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**