Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 13
Version 2

Dieses Übungsblatt wird nicht bewertet und dient der Vorbereitung auf die Nachklausur.

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2: Für Kugelkoordinaten verwendet man $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$ und setzt

$$(x, y, z) = \Psi(r, \phi, \theta) := (r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\theta))\,.$$

(a) Geben Sie, dort wo sie definiert ist, die Umkehrfunktion zu Ψ an.

(b) Geben Sie eine möglichst größte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Kugelkoordinatentransformation ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3: Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)dx = 0.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(x + y + z) + \cos(x)\cos(z)dxdydz$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 ydydx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xe^{y^3} dydx$

Aufgabe 5: entfällt

Aufgabe 6: Ω ist ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ mit Flächeninhalt $\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^2}(\Omega) = 6$. Wir definieren

$$Z = \left\{(x, y, z); \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right) \in \Omega \text{ und } 0 < z < 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^3}(Z)$.

Aufgabe 7: Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \cos\left(x^2\right) dxdy$.

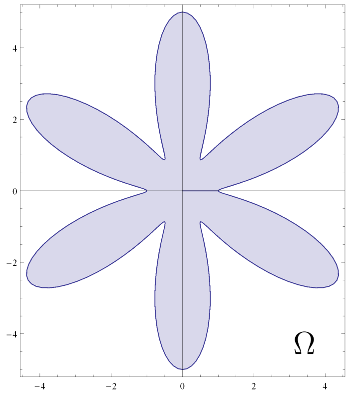
Hinweis: Integrationsgrenzen geändert

Aufgabe 8: Berechnen Sie für

$$\Omega = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; 0 \leq r \leq 3 - 2\cos(6\varphi)\}$$

das Integral

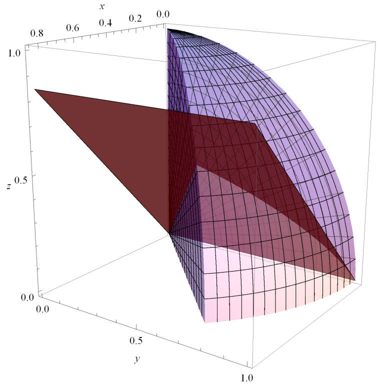
$$\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y)\,.$$



Aufgabe 9: Geben Sie ein explizites Integral an für das

Berechnen des Volumens von

$$G = \left\{(x,y,z)\,; 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2} \text{ und } z \geq x\right\}.$$



In der Vorlesung und im Skript ist das Volumen für (unregelmäßige) Gebiete definiert durch Approximationen von außen und von innen mit Blöcken. Wenn das äußere Volumen $\mathrm{Vol}_a(\Omega)$ und innere Volumen $\mathrm{Vol}_{in}(\Omega)$, die man so als Infimum, bzw. als Supremum bekommt, identisch sind, nennt man diese Zahl $\mathrm{Vol}(\Omega)$ das Volumen der Menge Ω.

- Eine Menge, für die das Volumen einer Menge so definiert ist, nennt man Jordan-quadrierbar.
- Eine Jordan-quadrierbare Menge Ω mit $\mathrm{Vol}(\Omega) = 0$ heißt Jordan-Nullmenge.

Aufgabe 10: * Überlegen Sie sich anschaulich, warum eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genau dann Jordan-quadrierbar ist, wenn der Rand $\partial\Omega$ eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 11: *

(a) Überlegen Sie sich anschaulich, dass $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht Jordan-quadrierbar ist, dass heißt

$$\mathrm{Vol}_a(A) > \mathrm{Vol}_{in}(A).$$

(b) Ist die Menge $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}) \cap [0,10]^2$ Jordan-quadrierbar?

(c) Seien A_n disjunkte, Jordan-quadrierbare Mengen. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nicht unbedingt Jordan-quadrierbar sein muss.

Aufgabe 12: Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y \leq x < 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx$.

Was sagt Fubini-Tonelli dazu?

Aufgabe 13: Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \text{ und } \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy dx.$$

Aufgabe 14: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x,y) dy$.

(b) Berechnen Sie $\int_0^1 \partial_1 f(x,y) dy$ für $x \neq 0$.

(c) Berechnen Sie $\int_0^1 \partial_1 f(0,y) dy$.

(d) Zeigen Sie, dass $\left(\partial_x \int_0^1 f(x,y) dy \right) \Big|_{x=0} \neq \int_0^1 \left(\partial_x f(x,y) \right) \big|_{x=0} dy$.

Integration und Ableitung darf man nur vertauschen, wenn der Integrand gewisse Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 15: Nehmen wir an, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und konvex, und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_\Omega f(x) dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)| \, dx.$$

Aufgabe 16: Wenn man $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$ nicht kennt, lässt sich die Stammfunktion der Funktion e^{-x^2} nicht mit bekannten Funktionen angeben. Wir können aber trotzdem den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

berechnen. Sei $M > 0$.

(a) Wieso gilt $\left(\int_{-M}^{M} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{[-M,M]^2} e^{-x^2 - y^2} d(x,y)$?

(b) Zeigen Sie $\int_{B_M(0,0)} e^{-x^2-y^2} d(x,y) \leq \int_{[-M,M]^2} e^{-x^2-y^2} d(x,y) \leq \int_{B_{\sqrt{2}M}(0,0)} e^{-x^2-y^2} d(x,y)$.

(c) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral $\int_{B_M(0,0)} e^{-x^2-y^2} d(x,y)$.

(d) Bestimmen Sie anschließend den Wert von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Aufgabe 17: Sei $f : [0,1] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f um die x-Achse rotiert.

(a) Geben Sie eine Formel für das Volumen von Ω an.

(b) Berechnen Sie damit das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

(c) Berechnen Sie damit das Volumen von $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, y^2 + z^2 \leq 1 - x, \; x \in [0,1] \right\}$.

Aufgabe 18: Berechnen Sie
$$\int_{[0,1]^2} \frac{x}{x^2+y+1} d(x,y).$$

Aufgabe 19: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Randpunkten $(0,0)$, $(-1,2)$ und $(1,1)$. Berechnen Sie
$$\int_{\Omega} \left(x^2+3xy+y^4\right) d(x,y).$$

Aufgabe 20: * Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Berechnen Sie $u(-1)$, $u(1)$ und $u''(x)$, wenn u definiert ist durch
$$u(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} (1-x)(1+y) f(y)\, dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{1} (1-y)(1+x) f(y)\, dy.$$

Aufgabe 21: Skizzieren Sie $C = \left\{(x,y)\,; x^2+y^2 \le 2\min(x,y)\right\}$ und berechnen Sie den Flächeninhalt von C.

Aufgabe 22: Berechnen Sie das Volumen von
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^3 ; \frac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right) < xy+yz+xz < x+y+z\right\}.$$

Hinweis: verwenden Sie
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$
mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Es gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 23: Das Innere eines Torus wird beschrieben durch
$$T = \left\{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) + s(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta)\,; 0 \le s \le r \text{ und } \varphi,\theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

Die zwei Radien sind r und R. Berechnen Sie das Volumen im Fall $r \le R$.