Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 2
Übungsblatt 2

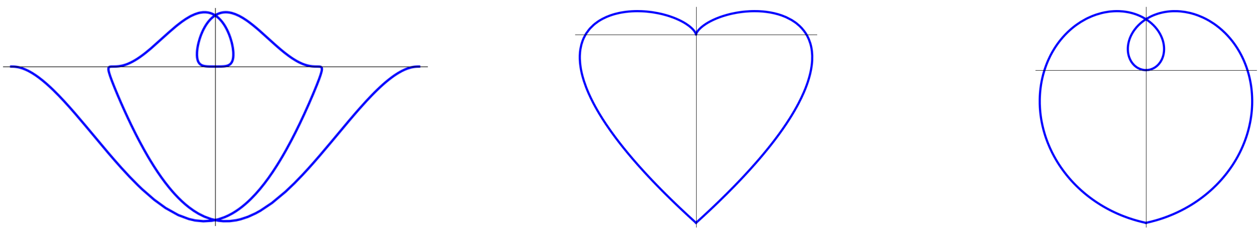
Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist Donnerstag, der 24. April 2014, um **12 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): Welche Spur gehört zu welcher Kurve?

$f : [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$
$f(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$

$g : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$g(t) = (t\cos(t), t\sin^3(t))$

$h : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$
$h(t) = (t^3 - t^5, \frac{1}{2}t^2 - t^4)$



Aufgabe 2 (0 Punkte): Die Kurve $f : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(t) = (2\sin(\tfrac{t}{2}), \sin(t)).$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Besitzt die Kurve einen Doppelpunkt?

(c) Mit welchem Winkel schneidet sich die Kurve am Doppelpunkt?

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Die Kurve $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f(t) = (\cos(t), \frac{1}{2}t^2, \sin(t))$.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Krümmung.

(c) Bestimmen Sie den Tangentialeinheitsvektor und den Hauptnormalenvektor.

Aufgabe 4 (0 Punkte): Wir betrachten $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$.

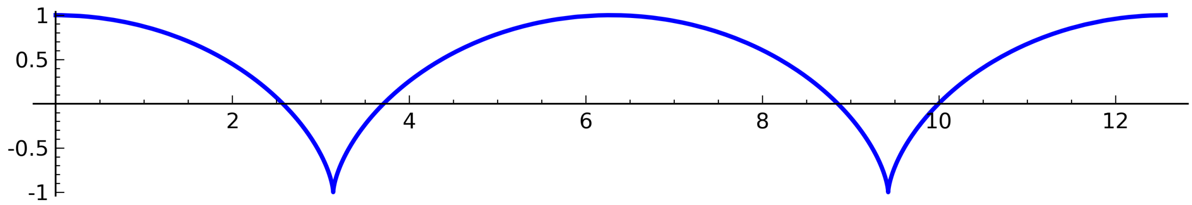
(a) Skizzieren Sie die Spur.

(b) Berechnen Sie die Stellen, an denen die Krümmung minimal bzw. maximal ist.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Ein Punkt auf dem Rand von einem Rad (mit Radius 1), das sich abrollt, beschreibt eine Kurve, die man Zykloide nennt:

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } z(t) = (t + \sin(t), \cos(t))$$

Beweisen Sie, dass die Evolute dieser Zykloide eine verschobene Zykloide ist (mit Ausnahme der singulären Stellen).



Aufgabe 6 (10 Punkte): Berechnen Sie die Evolute zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (\cos(t), t, \sin(t))$.

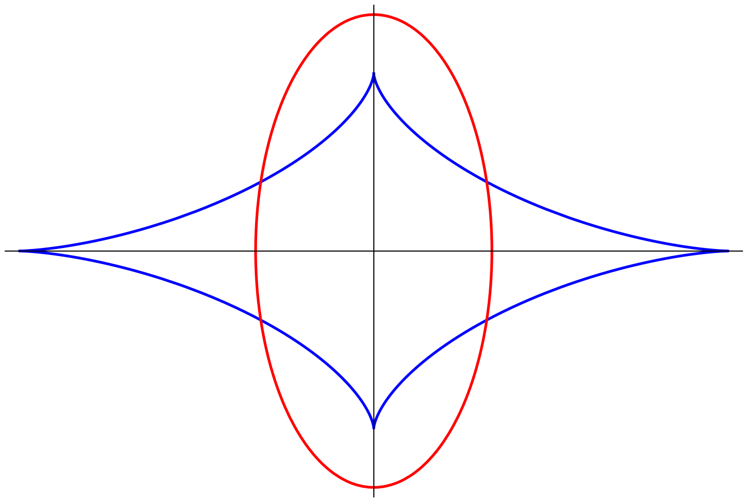
Aufgabe 7 (0 Punkte):

Im Bild sind die Spuren der Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,$$

$$f(t) = (\sin(t), 2\cos(t))$$

und ihrer Evolute dargestellt. Berechnen Sie die 4 Umkehrpunkte der Evolute.



Aufgabe 8 (0 Punkte): Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbare glatte Kurve und sei die Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = g_1(t) + i g_2(t)$$

Zeigen Sie, dass für die Krümmung gilt

$$\kappa = \frac{|\mathrm{Im}(\bar{\gamma}'\gamma'')|}{|\gamma'|^3}$$

Aufgabe 9 (0 Punkte): Gegeben sei die Kurve $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t^3, t^6)$.

(a) Ist die Kurve glatt?

(b) Existiert eine Umparametrisierung auf eine glatte Kurve?

Aufgabe 10 (0 Punkte): Sei$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbar Kurve, so dass $f'(t)$ und $f''(t)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass für die Evolute m(t) gilt, dass

$$m(t) = f(t) + \|f'(t)\|^2 \frac{f''(t) - \frac{f'(t)\cdot f''(t)}{f'(t)\cdot f'(t)} f'(t)}{\left\| f''(t) - \frac{f'(t)\cdot f''(t)}{f'(t)\cdot f'(t)} f'(t) \right\|^2}.$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**