Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 2
Übungsblatt 3

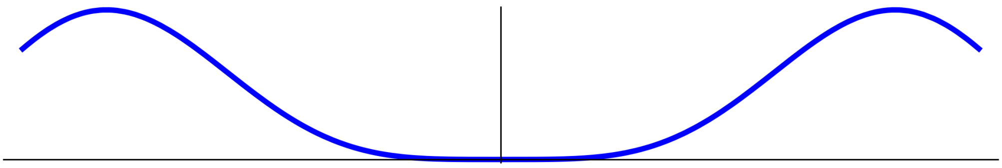
Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Freitag, der 02. Mai 2014, um 10 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Welche Differentialgleichung kann als Lösung die skizzierte Funktion haben?

(a) $y'(t) = f(y(t))$

(b) $y''(t) = f(y(t))$

(c) $y''(t) = f(y'(t))$



Hinweis: $y' > 0$ bedeutet: die Funktion ist wachsend, $y'' > 0$ bedeutet: die Funktion ist konvex. $y' < 0$ bedeutet: die Funktion ist fallend, $y'' < 0$ bedeutet: die Funktion ist konkav.

Aufgabe 2 (0 Punkte):

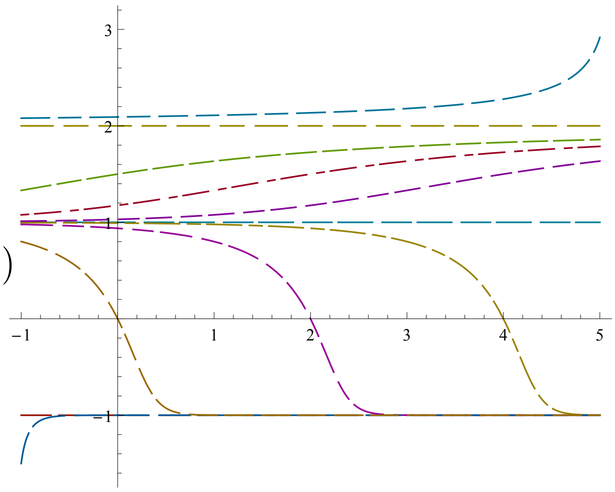
Welche Differentialgleichung gehört zu dem nebenstehenden Bild mit Skizzen einiger Lösungen?

(a) $y'(x) = \frac{1}{2}(y(x) - 2)^2 \left(y(x)^2 - 1\right)$

(b) $y'(x) = -\frac{1}{2}(y(x) - 1)(y(x) - 2)\left(y(x)^2 - 1\right)$

(c) $y'(x) = -\frac{1}{2}(y(x) - 2)^2 \left(y(x)^2 - 1\right)$

(d) $y'(x) = \frac{1}{2}(y(x) - 1)(y(x) - 2)\left(y(x)^2 - 1\right)$



Aufgabe 3 (0 Punkte):

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{\exp((a + ib)t), \exp((a - ib)t)\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{\cos(bt)\exp(at), \sin(bt)\exp(at)\}$$

Hinweis: $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{u_1, \ldots, u_n\} = \{\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_n u_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Finden Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen, jeweils zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(a) $y'(x) = y(x) + e^x$

(b) $y'(x) = 5y(x) + \sin(x)$

(c) $y'(x) = y(x) + 1 + x^2$

(d) $y'(x) = iy(x) + e^{-ix}$

Aufgabe 5 (10 Punkte): $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen und

$$\forall_{(t,s)\in[a,b]\times\mathbb{R}} : f(t,s) < g(t,s). \tag{1}$$

$x(t), y(t)$ sind stetig differenzierbare Funktionen und

$$\forall_{t\in[a,b)} : x'(t) = f(t, x(t)),$$
$$\forall_{t\in[a,b)} : y'(t) = g(t, y(t)).$$

Zeigen Sie, dass aus $x(a) < y(a)$ folgt, dass $x(t) < y(t)$ für alle $t \in [a,b)$.

Hinweis: Nehmen Sie an, die Lösungen sind an einer Stelle gleich. Zeigen Sie, dass es dann ein $t_0 \in (a,b)$ gibt, so dass $x(t_0) = y(t_0)$ und $x(t) < y(t)$ für alle $t \in (a, t_0)$. Zeigen Sie, dass dies zu einem Widerspruch für die Ableitung von $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ an der Stelle t_0 führt.

Aufgabe 6 (0 Punkte): Beweisen Sie Satz 3.19 aus dem Skript:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, nämlich

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)} f(s)ds.$$

Sie dürfen benutzen, dass $\left(e^{At}x_0\right)' = Ae^{At}x_0$.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Beweisen Sie Lemma 3.18 aus dem Skript: Sei $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} : e^{tA+sB} = e^{tA}e^{sB}$$

genau dann, wenn

$$AB = BA.$$