Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

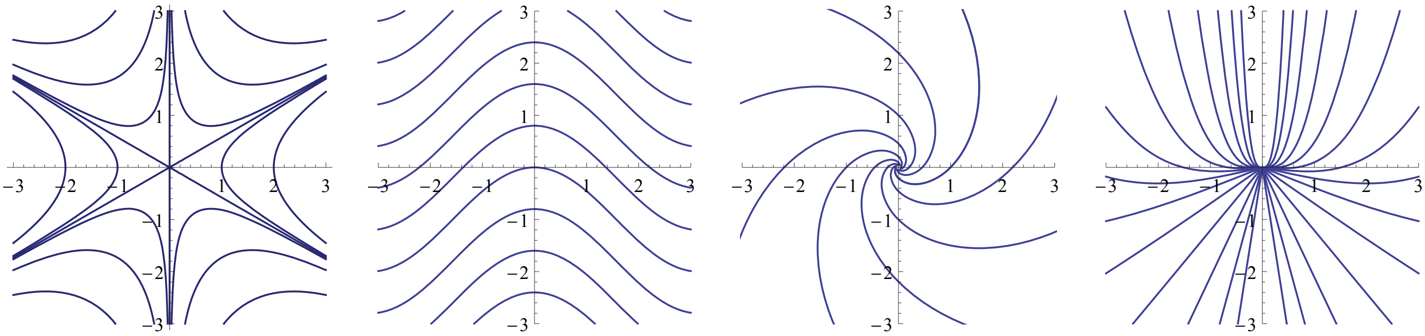
Analysis 2
Übungsblatt 4

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 08. Mai 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): Welche Bilder können die Spur einer Lösung $x(\cdot) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ von

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

mit $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sein? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 2 (10 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Ist die Matrix diagonalisierbar?

(b) Berechnen Sie eine Lösung von $(A-\lambda I)^2 v_2 = 0$, so dass $(A-\lambda I)v_2 =: v_1 \neq 0$, wobei λ ein passender Eigenwert der Matrix ist.

(c) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $T := (v_1, v_2, v_3)$, wobei v_3 ein zu v_1 linear unabhängiger Eigenvektor der Matrix ist.

(d) Berechnen Sie $T^{-1}AT$ und damit $\exp(tA)$, mit $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t)$, mit $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y(t)$, mit $y(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$y'(t) = f(y(t)) \text{ für alle } t \in (a,b).$$

Zeigen Sie, dass y entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

Hinweis: Eine mögliche Beweisskizze:

- Nehmen Sie an, dies wäre nicht so. Dann gibt es $s_1, s_2 \in (a,b)$, so dass $y'(s_1) > 0$ und $y'(s_2) < 0$. Sie dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $s_1 < s_2$ und $y(s_1) \geq y(s_2)$.
- Zeigen Sie, dass es ein kleinstes $s_3 \in (s_1, s_2)$ gibt, mit $y(s_1) = y(s_3)$. Konstruieren Sie damit einen Widerspruch.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei $y_a : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(-1) = a \end{cases}$$

mit

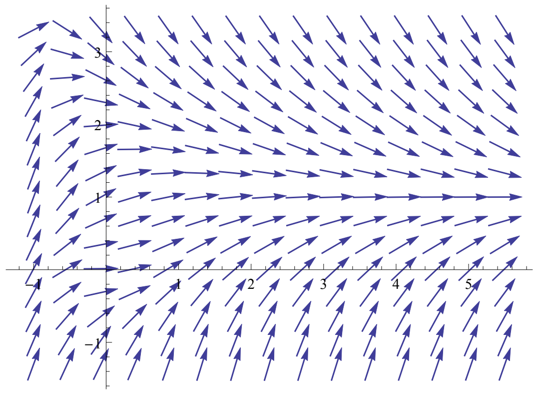
$$f(x,y) = (1 + \exp(-x) - y) \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2 - x\ y}.$$

Die Lösungen kann man nicht berechnen. Weil für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 \geq 1$ gilt, dass

$$\frac{2}{5} \leq \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2 - x\ y} \leq 2, \qquad (1)$$

kann man zeigen, dass unabhängig von a, folgendes gilt

$$\lim_{x \to \infty} y_a(x) = 1. \qquad (2)$$



Das Bild zeigt das Vektorfeld der Differentialgleichung. An der Stelle (x, y) ist dabei die Richtung des Vektors $(1, f(x, y))$ skizziert. Dies ist die Richtung der Tangente einer Lösungskurve an diesem Punkt.

Zeigen Sie (1) und (2).

Aufgabe 6 (0 Punkte): In der Numerik werden Lösungen von Differentialgleichungssysteme approximiert. Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei $t \mapsto x(t)$ die Lösung von

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Sei $\tau \in \mathbb{R}^+$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{\tau^k}{n^k} A^k x_0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\tau^k}{k!} A^k x_0.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \left(I + \frac{\tau}{n} A \right)^n x_0 = x(\tau).$$

(c) Zeigen Sie, dass es $n_\tau \in \mathbb{N}$ gibt, derart, dass für alle $n \geq n_\tau$ die Matrix $\left(I - \frac{\tau}{n} A \right)$ invertierbar ist.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{\tau}{n} A \right)^{-n} x_0 = x(\tau).$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**