Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 5 v2

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 15. Mai 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): $A \in M^{4\times 4}(\mathbb{R})$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass mit diesen Eigenschaften die Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$ eindeutig bestimmt sind. Berechnen Sie diese Lösungen.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Die Funktionen

$$y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix}1+t\\1+t\\-1+t\\-1+t\end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c_4 e^{2t} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen von $y'(t) = My(t)$. Berechnen Sie M.

Aufgabe 3 (0 Punkte): Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\exp(tA_i)$

$$A_1 = \begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix},\qquad A_2 = \begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-2&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix},\qquad A_3 = \begin{pmatrix}1&4&-3\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (0 Punkte): Wir betrachten zwei Familien $\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ und $\{\mathcal{B}_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$ von Trajektorien, die wie folgt definiert sind:

$$\mathcal{A}_c = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y = cx^2\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_c = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ 2y^2 + x^2 = c\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ und $\{\mathcal{B}_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$ orthogonale Familien von Trajektorien sind.

Aufgabe 5 (5 Punkte): Geben Sie eine Familie von Trajektorien $\{\mathcal{B}_c\}$ an, so dass $\{\mathcal{B}_c\}$ und $\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$, definiert durch

$$\mathcal{A}_c = \left\{(x,y)\ ;\ y^3 + x + \frac{x^3}{3} = c\right\},$$

orthogonale Familien von Trajektorien sind.

Aufgabe 6 (0 Punkte): Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen.

(a) $y'(x) = \sqrt{1-y^2}, \quad y(-1) = -1.$

(b) $t'(x) = \sqrt[3]{t(x)}, \quad t(0) = 0.$

Aufgabe 7 (10 Punkte): Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungen und geben Sie die maximalen Existenzintervalle an.

(a) $y'(x) = x\,(1 - y^2(x))$, mit $y(2) = -\sqrt{2}$.

(b) $2t\,y(t)\,y'(t) = t^2 + y^2(t)$, mit $y(1) = -2$.

(c) $t'(x) = x^4\,t(x) + x^4\,t^4(x)$, mit $t(0) = \frac{1}{2}$.

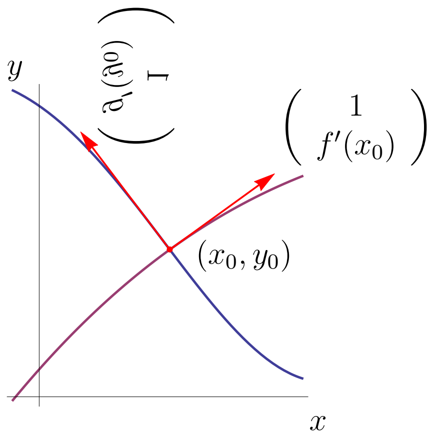
(d) $x'(y) = y\,x(y) + y^3$, mit $x(0) = 0$.

(e) $t'(y)\,y^2 = t(y)\,\ln(t(y)) - t'(y)$, mit $t(1) = 1$.

Aufgabe 8 (0 Punkte): Es gelte

$$\alpha(x,y) = c_1 \iff y = f(x) \text{ und } \beta(x,y) = c_2 \iff x = g(y),$$

wobei f und g differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass sich die Kurven in (x_0, y_0) genau dann orthogonal schneiden, wenn $f'(x_0) = -g'(y_0)$.



Aufgabe 9 (0 Punkte): Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. *Hinweis: Bei den Ricatti-Gleichungen können Sie $x(t) = \pm\frac{1}{t}$ als Lösung versuchen.*

(a) $y'(t) + y(x) = y^2(x)\ln(x)$

(b) $y'(t) - y^2(t) - 2xy(t) = 2$, $y(0) = 1$.

(c) $ty'(t) + y(t) - t^3y^3(t) = 0$.

(d) $t^2y'(t) - 2ty(t) + t^2y^2(t) = -2$

(e) $x'(t) = -x(t) + \cos(t)$

(f) $x'(t) = -\frac{1}{t}x(t) + \cos(2t)$

(g) $x'(t)(1+t^2) + 4tx(t) = (1+t^2)^{-2}$

(h) $y'(x) = \cos^3(x) + \cos^3(x)e^y$

(i) $y'(x)y(x) = xe^{y^2(x)}$

(j) $y'(x) = y(x)e^x - 2e^x + y(x) - 2$

(k) $y'(x)(x^2-1) = 2xy(x) + 2x$

(l) $y'(x) = \cos^2(x)\cos^2(2y(x))$

(m) $xy'(x) = \sqrt{1-y^2(x)}$

(n) $y'(x) = 2y(x) + e^{2x}$

(o) $y'(x)x^2 = \sqrt{4-x^2}(1+y)^2$

(p) fehlerhaft

(q) $x^2y'(x) = y^2 - 6x^2$

(r) $x^2(y'(x)+1) = (x+y)y$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**