Prof. Guido Sweers **WS 2013/2014**
Jan M. Krämer

Analysis 2
Übungsblatt 6 v3

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 22. Mai 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): Seien $a, b, c > 0$. Zeigen Sie, dass die Mengen E_1 und E_2 offen sind.

$$E_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} < c \right\}, \quad E_2 := (0,1) \times (0,1)$$

Aufgabe 2 (10 Punkte):

(a) Zeigen Sie mithilfe der ε-δ-Definition, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = x^2 y,$$

stetig ist.

(b) Zeigen Sie mithilfe der ε-δ-Definition, dass $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x,y) = \operatorname{Arg}(x+iy),$$

für $(x,y) \in (0,\infty) \times \{0\}$ unstetig ist.

Hinweis: $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Aufgabe 4 (0 Punkte): Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Der abzählbare Durchschnitt offener Mengen ist offen.

(b) Für jede Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt, dass $\overline{U}$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, in der U enthalten ist.

(c) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ beliebig. Für jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ gilt: $A \subset U \implies A \subset U^\circ$.

(d) Die abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

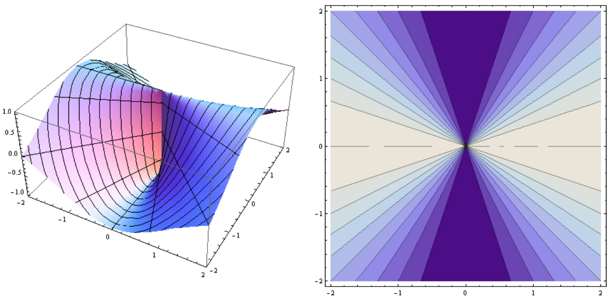
(e) Für jede Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt, dass $\overline{(U^\circ)} = \overline{U}$.

(f)* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist der abzählbare Durchschnitt offener Mengen.

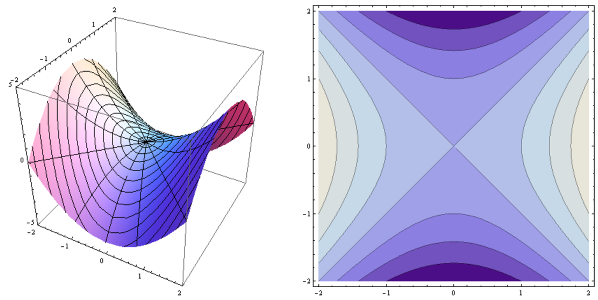
Aufgabe 5 (0 Punkte):

1. Welche Funktion gehört zu welchem Bild?
2. Untersuchen Sie, ob die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig in $(0,0)$ sind.

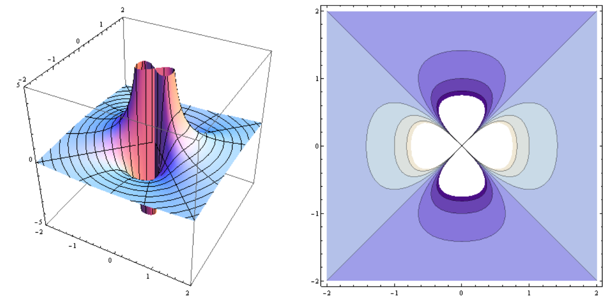
- $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^4+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{|x|^3+|y|^3} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$



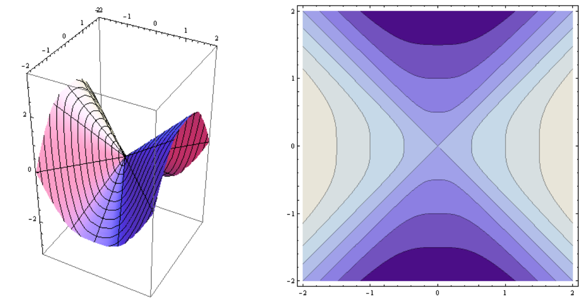
(a)



(b)



(c)



(d)

Aufgabe 6 (0 Punkte): $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seien stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass $x \mapsto g(f(x))$ stetig ist.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Existiert der folgende Grenzwert?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^4+\left(x+\sqrt[3]{y}\right)^2+y^4}$$

Aufgabe 8 (0 Punkte): Bestimmen Sie für M_i jeweils $\overline{M}_i$, ∂M_i, M_i°, M_i^{HP} und M_i^{IP}.

$$M_1 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; n,m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \qquad M_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{2^{-2n}}(0) \setminus B_{2^{-(2n+1)}}(0).$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**