Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 7

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Freitag, der 30. Mai 2014, um 10 Uhr**.

Aufgabe 1 (0 Punkte): Zeigen Sie jeweils die Aussage, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ hat ein Maximum.

(b) Eine stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ hat ein Maximum.

(c) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ hat ein Maximum.

(d) Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ hat ein Extremum.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

(a) Beschreiben Sie die Nullstellenmenge der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = x_1(1 - 2x_1^2 - x_2^2)(x_2 - x_1).$$

Skizzieren Sie diese Menge.

(b) Zeigen Sie, dass f mindestens 4 Extrema hat.

(c) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x,y) = x_1(1 - 2x_1^2 - x_2^2)(x_2 - x_1)e^{-x_1^2 - 3x_2^2},$$

mindestens 8 Extrema hat.

Aufgabe 3 (0 Punkte): Die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ_1 ist

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in \ell_1 \; ; \; \|x\|_1 \le 1\}.$$

Finden Sie eine Folge in $\overline{B_1(0)}$, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 4 (0 Punkte): U, V seien normierte Vektorräume. Eine Funktion $f : K \subset U \to V$ heißt gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in K} : \|x-y\|_U < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_V < \varepsilon.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion gleichmäßig stetig ist, falls die Menge K kompakt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion an, die nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Sei V ein normierter Vektorraum und $A \subset V$. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn gilt:

Wenn $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ in V konvergiert, dann muss der Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in A liegen.

Aufgabe 6 (8 Punkte): V, W seien normierte Vektorräume, $f : V \to W$ sei eine stetige Funktion. Welche der Eigenschaften

(a) offen

(b) abgeschlossen

(c) kompakt

(d) zusammenhängend

gelten für $f(A) \subset W$, wenn sie für $A \subset V$ gelten, bzw. für $f^{-1}(B) \subset V$, wenn sie für $B \subset W$ gelten? Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie Gegenbeispiele an, falls es nicht gilt.

Aufgabe 7 (6 Punkte):

(a) Geben Sie die Menge $A = \sin^{-1}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ an. Ist A offen in $\mathbb{R}$?

(b) Geben Sie die Menge $B = \arccos^{-1}\left((-\pi, \pi)\right)$ an. Ist B offen in $\mathbb{R}$?

Aufgabe 8 (0 Punkte): Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\pi\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = \frac{\sin(x)\sin(y)}{\left(\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2}$$

An welchen Stellen in $(\pi\mathbb{Z})^2 = \{(n\pi, k\pi) \in \mathbb{R}^2; n, k \in \mathbb{Z}\}$ ist f stetig fortsetzbar und an welchen Stellen nicht?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 9 (0 Punkte): Wir betrachten die normierten Vektorräume $\mathcal{V}_1 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, ., \|.\|_1)$ und $\mathcal{V}_2 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, ., \|.\|_2)$. Zeigen Sie, dass

$$B_1^{\mathcal{V}_1}(0) = \{x \in \ell_1 \; ; \; \|x\|_1 < 1\}$$

nicht offen in $\mathcal{V}_2$ ist.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**