Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2013/2014**

Analysis 2
Übungsblatt 8

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Donnerstag, der 05. Juni 2014, um 12 Uhr**.

Aufgabe 1 (6 Punkte): Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y}{\arctan(xy)+2+x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y}{\arctan(xy)+2+x^2}\right)$

(b) $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(yx^2)\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(yx^2)\right)$

(c) $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{28} e^{xy}$

Aufgabe 2 (0 Punkte): Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sind die partiellen Ableitungen stetig? Ist die Funktion stetig?

Aufgabe 3 (6 Punkte): Berechnen Sie $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ und $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Aufgabe 4 (0 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$ existieren.

Aufgabe 5 (0 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $g_{c,d}(x) := f(cx, dx)$ für alle $c, d \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum in 0 haben.

(b) Zeigen Sie, dass f kein lokales Minimum in 0 hat.

Aufgabe 6 (0 Punkte): Wir betrachten die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_1(x,y) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|xy|}, \qquad f_2(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - 3xy^2}.$$

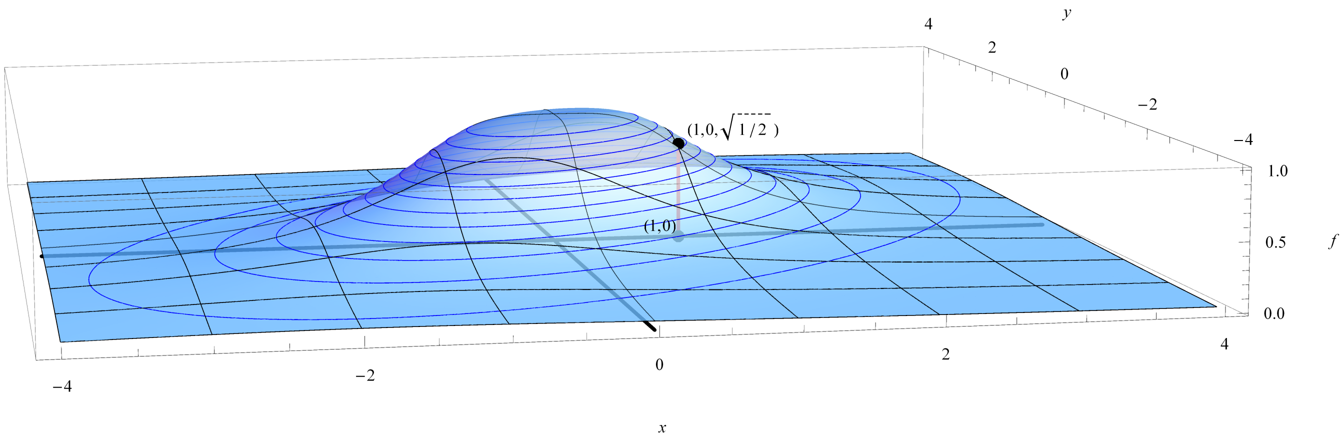
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und die Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 7 (8 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \cos(\arctan(x^2 + y^2 - xy)).$$

(a) Bestimmen Sie bei $(x,y) = (1,0)$ die Richtungsableitungen in Richtung (v_1, v_2).

(b) Die Richtungen kann man auch angeben durch $\vec{v} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$. Berechnen Sie die Richtung $\vec{v}$ des stärksten Abstiegs $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0)$.



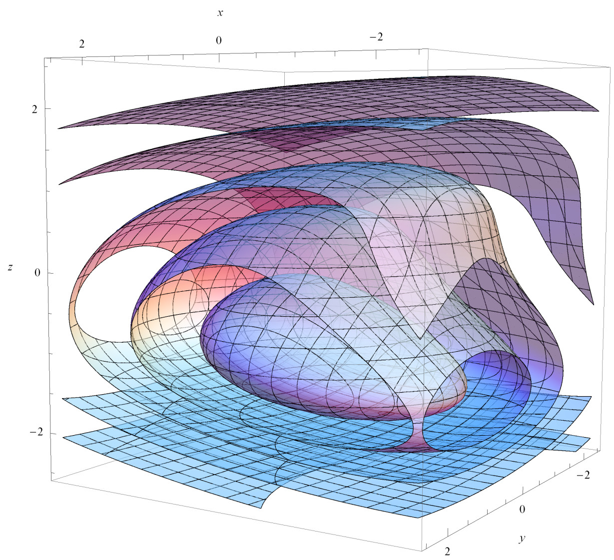
Aufgabe 8 (0 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4 + xz^2 - 2y + 3z.$$

(a) Berechnen Sie die stationären Stellen der Funktion.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion kein lokales Maximum hat.

(c) Zeigen Sie, dass es ein Minimum gibt.



In dieser Skizze sehen sie einige Flächen auf denen f konstant ist (Niveaumengen).

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**