Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 2
Übungsblatt 9 v2

Abgabeschluss für dieses Übungsblatt ist **Freitag, der 20. Juni 2014, um 10 Uhr**.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to R$, $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - 3xy^2}$, differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 2 (10 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f auf $\mathbb{R}^2$ existieren.

(b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht stetig partiell differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x,y)$ existiert.

(e) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve.

(a) Schreiben Sie die Kettenregel für $f \circ \gamma$ hin.

(b) Wir nehmen an, dass $\gamma(t)$ eine Höhenlinie von f beschreibt, das heißt $f(\gamma(t)) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ die Höhe dieser Höhenlinie ist. Zeigen Sie, dass der Tangentialvektor dieser Kurve senkrecht auf dem Gradienten der Funktion steht:

$$\gamma'(t) \perp (\nabla f)(\gamma(t)).$$

Aufgabe 4 (0 Punkte): Eine der folgenden Funktionen hat ein Minimum im Punkt $(0,0,0)$. Welche?

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz$$
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - yz$$

Aufgabe 5 (0 Punkte):

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass es zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein

$$\xi \in \{tx + (1-t)y \; ; \; t \in [0,1]\}$$

gibt, so dass

$$f(y) - f(x) = (\nabla f(\xi))\,(y - x).$$

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Gibt es zu $x, y \in \mathbb{R}^2$ ein

$$\xi \in \{tx + (1-t)y \; ; \; t \in [0,1]\},$$

so dass

$$g(y) - g(x) = (\nabla g(\xi))\,(y - x)$$

gilt?

Aufgabe 6 (0 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ y\left(\dfrac{|y|}{x^2} - 1\right) & \text{für } -x^2 < y < x^2, \\ y + x^2 & \text{für } y \leq -x^2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion in $(0,0)$ differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in $(0,0)$ existieren.

(c) Zeigen Sie, dass $\partial_2 f$ nicht stetig in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 7 (0 Punkte): Wir betrachten $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) f_α ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(b) f_α hat partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.

(c) f_α hat stetige partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.

(d) f_α ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

(e) f_α ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**