

Notizen zur Vorlesung

# Analysis II



G. Sweers

Sommersemester 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurven I</b>	<b>1</b>
1.1	Der $n$ -dimensionale Euklidische Raum . . . . .	1
1.1.1	Das innere Produkt . . . . .	2
1.2	Die Definition einer Kurve . . . . .	4
1.3	Bogenlänge . . . . .	6
1.4	Flächeninhalt . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Kurven II</b>	<b>13</b>
2.1	Definition der Krümmung . . . . .	13
2.2	Krümmung bei beliebigen Kurven . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Differentialgleichungen I</b>	<b>21</b>
3.1	Eine Einleitung . . . . .	21
3.1.1	Lösungsbegriff . . . . .	23
3.1.2	Erste Ordnung und Systeme höherer Ordnung . . . . .	26
3.2	Lineare Gleichungen, konstante Koeffizienten . . . . .	27
3.2.1	Einfache Beispiele linearer Gleichungen . . . . .	27
3.3	Lineare Systeme, konstante Koeffizienten . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Differentialgleichungen II</b>	<b>35</b>
4.1	Die Lineare Algebra zum Matrixexponenten . . . . .	35
4.2	Die Spur der Lösung . . . . .	39
4.3	Lineare Stabilität . . . . .	41
4.3.1	Klassifizierung in zwei Dimensionen . . . . .	44
4.3.2	Geometrische Zusammenhänge . . . . .	44
4.4	Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Differentialgleichungen III</b>	<b>51</b>
5.1	Linear, erste Ordnung, variable Koeffizienten . . . . .	51
5.2	Nicht-linear, konstruktiv lösbar, erster Ordnung . . . . .	53
5.2.1	Trennbare Differentialgleichungen . . . . .	53
5.2.2	Homogene Differentialgleichungen . . . . .	56
5.2.3	Differentialgleichungen von Bernoulli und Riccati . . . . .	57
5.2.4	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	58
5.3	Eine geometrische Anwendung . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Grundbegriffe I</b>	<b>63</b>
6.1	Topologische Begriffe . . . . .	63
6.2	Darstellung Funktionen mehrerer Veränderlichen . . . . .	66
6.3	Mehrere Veränderliche, Konvergenz, Stetigkeit . . . . .	67

6.3.1	Der Limes bei Folgen . . . . .	67
6.3.2	Der Limes bei Funktionen . . . . .	68
6.3.3	Stetigkeit . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Grundbegriffe II</b>	<b>77</b>
7.1	Noch mehr Dimensionen . . . . .	77
7.1.1	Mehr als endlich dimensional . . . . .	78
7.1.2	Äquivalente Normen bei endlichen Dimensionen . . . . .	80
7.1.3	Limes bei unendlichen Dimensionen . . . . .	81
7.1.4	Alternativ bei Stetigkeit . . . . .	82
7.2	Extremum . . . . .	83
7.3	Kompaktheit . . . . .	84
7.4	Der Begriff Zusammenhang . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Ableitungen in mehr Dimensionen</b>	<b>91</b>
8.1	Partielle Ableitungen . . . . .	91
8.1.1	Eine Einführung . . . . .	91
8.1.2	Die Definition und einige Beispiele . . . . .	92
8.1.3	Einige Ergebnisse zu partiellen Ableitungen . . . . .	94
8.2	Richtungsableitungen . . . . .	96
<b>9</b>	<b>Mehrdimensionale Diff.rechnung I</b>	<b>99</b>
9.1	Differenzierbarkeit . . . . .	99
9.1.1	Bedeutung des Gradienten und Beispiele . . . . .	103
9.1.2	Zusammenfassung . . . . .	104
9.2	Rechenregeln . . . . .	105
9.3	Extremum . . . . .	106
9.4	Algebraisches Intermezzo . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Mehrdimensionale Diff.rechnung II</b>	<b>113</b>
10.1	Zweite Ableitungen und Extrema bei Polynomen . . . . .	113
10.2	Approximation durch Polynome . . . . .	115
10.2.1	Das Taylorpolynom . . . . .	115
10.2.2	Die Taylorreihe . . . . .	118
10.3	Hesse-Matrix und Extremum . . . . .	120
<b>11</b>	<b>Inverse Funktionen</b>	<b>125</b>
11.1	Gleichungen lösen durch Approximation . . . . .	125
11.1.1	Wiederholung . . . . .	125
11.1.2	In höheren Dimensionen . . . . .	127
11.2	Kontraktionen . . . . .	132
11.2.1	Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	134
11.3	Umkehrfunktionen . . . . .	135
<b>12</b>	<b>Implizite Funktionen</b>	<b>141</b>
12.1	Implizite Funktionen in 2D . . . . .	141
12.2	Implizite Funktionen in höheren Dimensionen . . . . .	144
12.3	Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	148

<b>13 Integrale in m.D. I</b>	<b>155</b>
13.1 Volumen . . . . .	155
13.2 Integrale durch Ober- und Untersummen . . . . .	157
13.3 Berechnen von mehrdimensionalen Integralen . . . . .	161
13.3.1 Integrale auf rechteckigen Gebieten . . . . .	161
13.3.2 Integrale auf allgemeineren Gebieten . . . . .	163
13.3.3 Volumen in Scheiben . . . . .	165
13.4 Alternative Koordinatensysteme . . . . .	166
13.4.1 Polarkoordinaten . . . . .	167
13.4.2 Zylinderkoordinaten . . . . .	168
13.4.3 Kugelkoordinaten . . . . .	169
<b>14 Integrale in m.D. II</b>	<b>173</b>
14.1 Volumenabschätzungen . . . . .	173
14.2 Transformationssatz . . . . .	177



# Analysis 2, Woche 1

## Kurven I



### 1.1 Der $n$ -dimensionale Euklidische Raum

Darunter versteht man für eine Zahl  $n \in \mathbb{N}^+$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n); \text{ mit } x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Ebenso gibt es auch  $\mathbb{C}^n := \{(z_1, z_2, \dots, z_n); \text{ mit } z_i \in \mathbb{C} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Elemente von  $\mathbb{R}^n$  nennt man Vektoren. Man kann Vektoren miteinander addieren, und man kann sie multiplizieren mit Zahlen aus  $\mathbb{R}$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in \mathbb{R}$  setzt man

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (1.1)$$

$$t \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (t x_1, t x_2, \dots, t x_n). \quad (1.2)$$

Die Struktur, die man so bekommt, werden wir allgemeiner beschreiben. Im Folgenden steht  $\mathbb{K}$  für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.1**  $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$  heißt ein **Vektorraum** über  $\mathbb{K}$ , wenn folgendes gilt. Die Addition und die Multiplikation mit Skalaren sind wohldefiniert:

$$t \in \mathbb{K} \text{ und } x, y \in V \Rightarrow x + y \in V \text{ und } t \cdot x \in V,$$

und haben die folgenden Eigenschaften:

$(V, +)$  ist eine kommutative Gruppe:

1. **Assoziativität:** für alle  $x, y, z \in V$  gilt  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
2. **Neutrales Element:** es gibt ein  $0 \in V$  derart, dass für alle  $x \in V$  gilt  $x + 0 = x$ ,
3. **Inverses Element:** für jedes  $x \in V$  gibt es  $-x \in V$  derart, dass  $x + (-x) = 0$ ,
4. **Kommutativität:** für alle  $x, y \in V$  gilt  $x + y = y + x$ .

Für die Multiplikation mit Skalaren gilt außerdem:

5. **Assoziativität:** für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$  und  $x \in V$  gilt  $t_1 \cdot (t_2 \cdot x) = (t_1 t_2) \cdot x$ ,
6. **Unitäres Element:** für alle  $x \in V$  gilt  $1 \cdot x = x$ ,
7. **Distributivität:** für alle  $t \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in V$  gilt  $t \cdot (x + y) = (t \cdot x) + (t \cdot y)$ .

**Bemerkung 1.1.1** • Man findet direkt, dass  $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$  mit der Addition aus (1.1) und der Multiplikation mit Skalaren aus (1.2) ein Vektorraum ist. Oft schreibt man kurz  $\mathbb{R}^n$ .

- Auch  $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$  mit der Addition aus (1.1) und der Multiplikation mit Skalaren aus (1.2) ist ein Vektorraum.

Der Beweis der Behauptungen in dieser Bemerkung wird den Lesern überlassen. Der Punkt für die Multiplikation mit Skalaren wird ab hier weggelassen.

Weiter definiert man für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ :

- die **Länge** (oder **Größe**) von  $x$ :

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1.3)$$

- die **Distanz** zwischen  $x$  und  $y$ :

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Wenn wir  $x \in \mathbb{R}^n$  schreiben, werden wir  $x_k$  für die  $k$ -te Koordinate schreiben.

**Bemerkung 1.1.2** Für  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt, schreibt man oft auch  $|x|$  statt  $\|x\|$ . Für  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  stimmen Betrag und Länge sowieso überein.

**Definition 1.2** Sei  $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$  ein Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Eigenschaften hat, nennt man eine **Norm**:

1. **Positiv-Definitheit:** für alle  $x \in V$  gilt  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2. **Homogenität:** für alle  $t \in \mathbb{K}$  und  $x \in V$  gilt  $\|t \cdot x\| = |t| \|x\|$ ,
3. **Dreiecksungleichung:** für alle  $x, y \in V$  gilt  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Wenn eine solche Norm existiert, nennt man  $(V, +, \mathbb{K}, \cdot, \|\cdot\|)$  einen **normierten Vektorraum**.

**Lemma 1.3** Die Länge  $\|\cdot\|$ , definiert in (1.3), ist eine Norm auf  $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ .

Die ersten beiden Eigenschaften kann man sofort zeigen. Wir werden dies dem Leser überlassen. Nur der Beweis der Dreiecksungleichung ist etwas aufwendiger und folgt noch.

### 1.1.1 Das innere Produkt

Eine zusätzliche Struktur auf  $\mathbb{R}^n$  ist das **Skalarprodukt der Vektoren**, definiert für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  durch

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1.4)$$

Bemerke, dass für  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$x \cdot x = \|x\|^2. \quad (1.5)$$

Allgemeiner betrachtet man folgendes:

**Definition 1.4** Ein **inneres Produkt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für den reellen Vektorraum  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  ist eine Funktion von  $V \times V$  nach  $\mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

1. **Positiv-Definitheit:** für alle  $x \in V$  gilt  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2. **Symmetrie:** für alle  $x, y \in V$  gilt  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,
3. **Linearität:** für alle  $x, y, z \in V$  und  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt  $\langle sx + ty, z \rangle = s \langle x, z \rangle + t \langle y, z \rangle$ .

**Lemma 1.5**  $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ , mit  $x \cdot y$  definiert in (1.4), ist ein inneres Produkt für  $\mathbb{R}^n$ .

Der Beweis ist elementar.

**Bemerkung 1.5.1** Für Vektorräume über  $\mathbb{C}$  ersetzt man die Symmetrie in Definition 1.4 durch

$$2'. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ für alle } x, y \in V.$$

Die Definition der Länge und des komplexen inneren Produktes wird für  $z \in \mathbb{C}^n$  wie folgt gemacht:

$$\|z\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \cdots + z_n \bar{z}_n}, \quad (1.6)$$

$$\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \cdots + z_n \bar{w}_n. \quad (1.7)$$

Es folgt sofort, dass Bedingung 2' erfüllt ist.

$(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$  ist ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .

**Lemma 1.6 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$x \cdot y \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.8)$$

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, dass  $\|y\| \neq 0$ . Man betrachte  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(t) = \|x + ty\|^2$  und findet

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(t) = (x + ty) \cdot (x + ty) \\ &= x \cdot x + ty \cdot x + x \cdot ty + ty \cdot ty \\ &= \|x\|^2 + 2t x \cdot y + t^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  beschreibt eine Parabel und hat ein nichtnegatives Minimum, wenn  $f'(t) = 0$ , also wenn  $2x \cdot y + 2t \|y\|^2 = 0$ . Anders gesagt, für

$$t_0 = -\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}.$$

Es gilt

$$0 \leq \|x + t_0 y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \left( -\frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \right) x \cdot y + \left( -\frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \right)^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{\|y\|^2}$$

und so auch

$$(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Man findet  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ , und damit ist (1.8) bewiesen. ■

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt so

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \leq 1,$$

und das erlaubt uns, den Winkel  $\varphi$  zwischen zwei nicht trivialen Vektoren wie folgt zu definieren:

$$\varphi = \angle(x, y) := \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}\right).$$

Diese Definition stimmt überein mit unserer geometrischen Vorstellung vom Winkel zwischen zwei Vektoren in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ . Insbesondere ist sie nicht abhängig von der Größe der Vektoren.

**Lemma 1.7 (Die Dreiecksungleichung)** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (1.9)$$

**Beweis.** Wir quadrieren, benutzen 1.5 und Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Weil die Terme positiv sind, folgt (1.9). ■

## 1.2 Die Definition einer Kurve

Bevor wir uns mit Kurven beschäftigen, brauchen wir die Stetigkeit und Differenzierbarkeit für Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.8** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall.

- Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt stetig, wenn jede Komponente  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.
- Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt differenzierbar, wenn jede Komponente  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist. Die Ableitung  $f'$  in  $t \in I$  wird wie folgt definiert:

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)).$$

- Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt stetig differenzierbar, wenn die Ableitungen  $f'_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.

**Bemerkung 1.8.1**  $f'_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn  $f'_k$ , definiert im Innern  $I^\circ$  von  $I$ , auf dem Rand  $\partial I$  zu einer stetigen Funktion erweitert werden kann. Man nehme an dem Rand die linke beziehungsweise rechte Ableitung.

**Bemerkung 1.8.2** Ebenso läßt sich zweimal differenzierbar, zweimal stetig differenzierbar, stückweise differenzierbar, rechtsdifferenzierbar usw. definieren.

**Definition 1.9** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nennen wir eine **Kurve**. Das Bild  $f(I)$  nennt man die **Spur**.

- Wenn  $f$  differenzierbar ist auf  $I$ , nennen wir die Kurve differenzierbar. Der Vektor  $f'(t)$  heißt der **Tangentenvektor** zur Kurve  $f$  an Parameterstelle  $t$ .

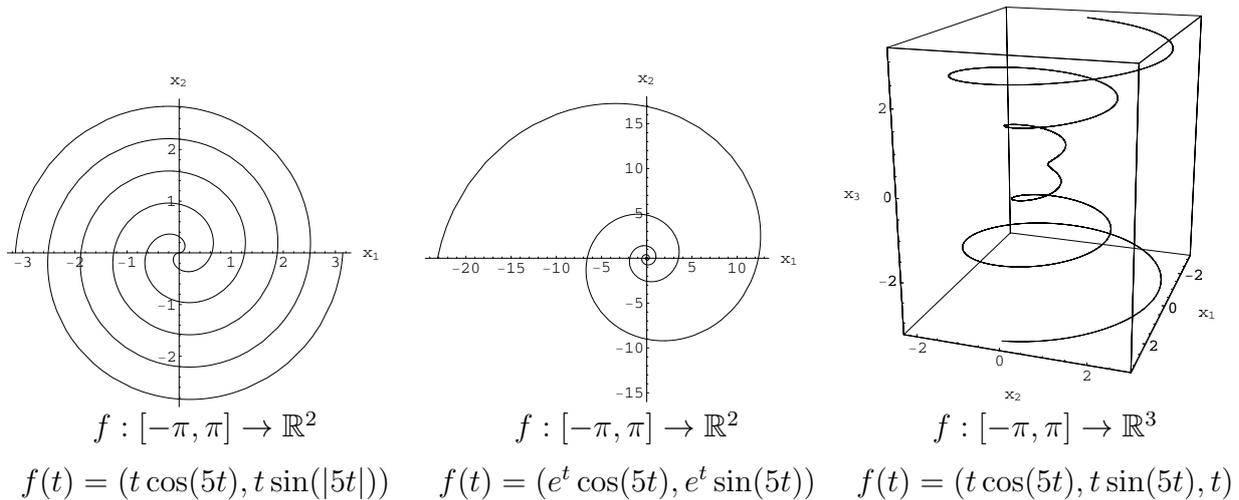


Abbildung 1.1: Drei Beispiele von Kurven und ihren Spuren

- Wenn  $f$  stetig differenzierbar ist auf  $I$  und  $\|f'(t)\| \neq 0$  für alle  $t \in I$ , nennen wir die Kurve **glatt**.

Wenn in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  die Funktion  $f(t)$  die Position von etwas am Zeitpunkt  $t$  darstellt, dann ist  $f'(t)$  der Geschwindigkeitsvektor und  $\|f'(t)\|$  die Geschwindigkeitsgröße.

**Definition 1.10** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Kurve und  $y = f'(t) \in \mathbb{R}^n$  der Tangentialvektor an der Parameterstelle  $t$ .

- $\tau = \frac{y}{\|y\|}$  nennt man den **Tangentialeinheitsvektor** zur Kurve  $f$  an Parameterstelle  $t$ ;
- jeden Vektor  $\nu \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\nu\| = 1$  und  $\nu \cdot \tau = 0$ , nennt man einen **Normaleneinheitsvektor** zur Kurve  $f$  an Parameterstelle  $t$ .

In zwei Dimensionen kann man aus einem Tangentialeinheitsvektor  $\tau$  sehr einfach einen Normaleneinheitsvektor konstruieren:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix}.$$

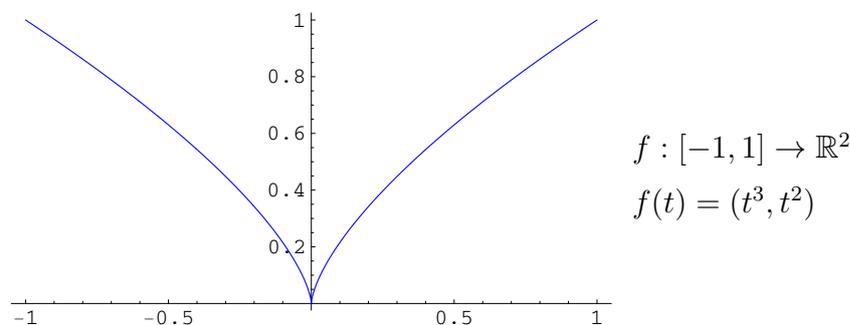


Abbildung 1.2: Die Neilsche Parabel

**Beispiel 1.11** Die Neilsche Parabel  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (t^3, t^2)$  ist eine differenzierbare Kurve, die nicht glatt ist. Dies zeigt sich auch durch den Umkehrpunkt in der Spur.

Wenn  $t$  die Zeit darstellt und  $f(t)$  die Position eines Teilchens in einem Koordinatensystem  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  zur Zeit  $t$ , dann stellt  $f'(t)$  den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit  $t$  dar. Die Geschwindigkeit, genauer gesagt die Größe der Geschwindigkeit, ist  $\|f'(t)\|$ . Die zweite Ableitung  $f''(t)$  stellt den Beschleunigungsvektor zur Zeit  $t$  dar und  $\|f''(t)\|$  die Beschleunigung.

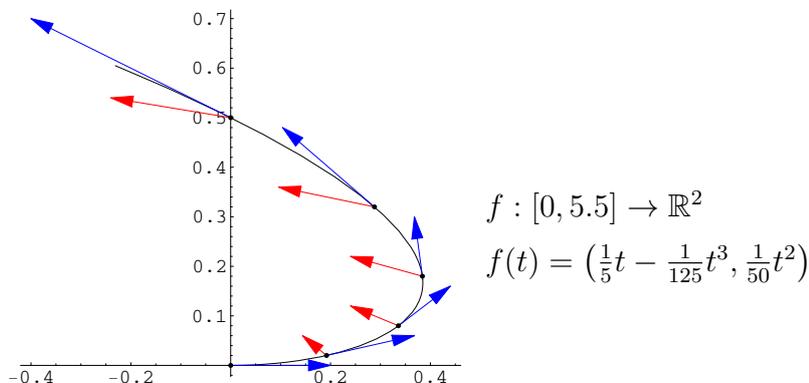


Abbildung 1.3: Position, Geschwindigkeit (blau) und Beschleunigung (rot)

**Bemerkung 1.11.1** Die gleiche Spur kann man durch mehrere Kurven bekommen. Zum Beispiel liefern  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  und  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$  die gleiche Spur.

### 1.3 Bogenlänge

Ein **Polygonzug** ist eine Kette von Geraden, die man benutzen kann, um die Länge einer Kurve zu approximieren. Siehe Abbildung 1.4.

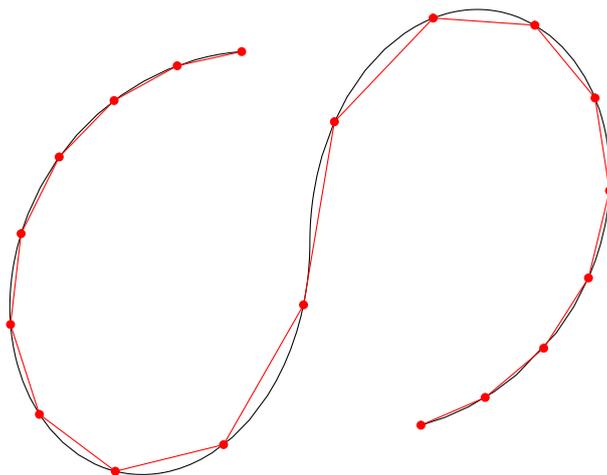


Abbildung 1.4: Eine Spur mit einem Polygonzug

Setzt man die Knotenpunkte  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ , dann ist die Länge dieses Polygonzuges gleich

$$\ell = \sum_{j=1}^k \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|.$$

Wenn man solche Knotenpunkte verteilt über eine Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , indem man das Intervall  $[a, b]$  aufspaltet in  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , dann hat der dazugehörige Polygonzug durch die Knotenpunkte  $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)$  die Länge

$$\ell_k = \sum_{j=1}^k \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \approx \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\| \approx \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad (1.10)$$

Formulierungen wie  $\approx$  vermitteln eine Idee, aber bedeuten mathematisch eigentlich nichts. Man kann es sich jedoch etwas genauer überlegen. Wenn die Komponenten  $f_i$  zweimal differenzierbar sind auf  $[a, b]$ , dann sagt der Satz von Taylor

$$f_i(t_j) - f_i(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1}) f'_i(t_{j-1}) + (t_j - t_{j-1})^2 R_{i,j}$$

wobei die  $R_{i,j}$  gleichmäßig beschränkt sind. Angenommen  $|R_{i,j}| \leq M$ , dann gilt genau gesagt

$$\left| \ell_k - \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\| \right| \leq nM \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1})^2 \leq nM(b-a) \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}).$$

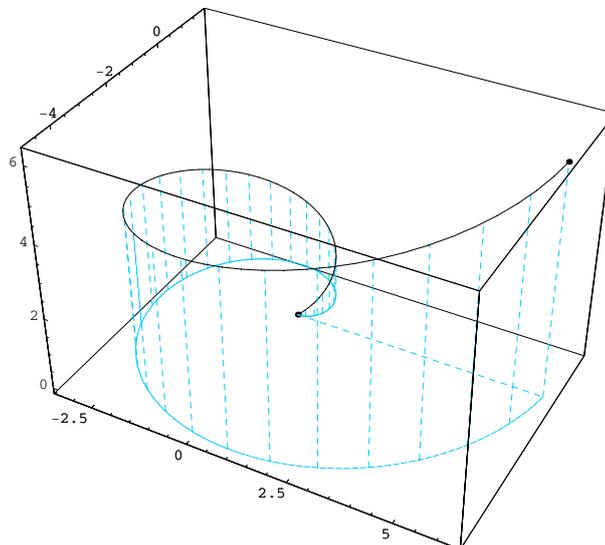
Indem wir die  $t_j$  genügend nahe zusammen legen, kann man die rechte Seite so klein bekommen, wie man möchte. Die Approximation  $\sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\|$  ist eine Riemannsumme, die, wenn man wiederum  $\max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1})$  nach 0 gehen lässt, das Integral rechts in (1.10) approximiert. Diese Überlegungen führen zu folgender Definition.

**Definition 1.12** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve. Die Bogenlänge von  $f$  über das Intervall  $[a, b]$  wird definiert durch

$$\ell = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

**Bemerkung 1.12.1** Obwohl die Bogenlänge für alle differenzierbaren Kurven  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert ist, heißt das nicht, dass man diese Länge immer mit Hilfe der üblichen Standardfunktionen explizit berechnen kann.

**Beispiel 1.13** Wir möchten die Bogenlänge von  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$  berechnen.



Man hat  $f'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$  und es folgt

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 + 2}.$$

So bekommt man

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt = \ln \left( \sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi^2 + 1} \right) + \sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi^2 + 1}.$$

Beim Berechnen des Integrals kann man die Substitution  $t = \sqrt{2} \sinh x$  verwenden.

Wenn zwei Kurven die gleiche Spur liefern, sind die dazugehörigen Bogenlängen gleich? Wenn das Wort Bogenlänge vernünftig gewählt ist, sollte das so sein.

**Beispiel 1.14** Die Kurven  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (\cos(2\pi t^2), \sin(2\pi t^2))$  und  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$  liefern beide den Einheitskreis als Spur. Trotzdem gilt

$$\begin{aligned} \ell_f &= \int_{-1}^1 \sqrt{(-4\pi t \sin(2\pi t^2))^2 + (4\pi t \cos(2\pi t^2))^2} dt = \int_{-1}^1 4\pi |t| dt = 4\pi, \\ \ell_g &= \int_{-1}^1 \sqrt{(\pi \sin(\pi t))^2 + (\pi \cos(\pi t))^2} dt = \int_{-1}^1 \pi dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Was ist hier los?

Die Bogenlänge ist nur gleich bei Kurven, bei denen die Spur genau einmal durchlaufen wird. Genauer wird es formuliert im nächsten Lemma.

**Lemma 1.15** Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatte Kurven sind und außerdem gilt:

- die Spur ist identisch:  $f([a, b]) = g([c, d])$ ,
- $f$  und  $g$  sind injektiv<sup>1</sup>,

dann sind auch die Bogenlängen identisch.

Statt dieses Lemma direkt zu beweisen, parametrisieren wir auf Bogenlänge um. Für eine glatte Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  setzen wir

$$s(t) := \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau.$$

Für diese Funktion  $s(\cdot)$  gilt, dass  $s(t)$  die Länge der Kurve ist zwischen  $f(a)$  und  $f(t)$ , und für die Bogenlänge von  $f$  gilt dann  $\ell_f = s(b)$ .

Weil  $f$  glatt ist, sind die Komponenten differenzierbar und es gilt

$$s'(t) = \|f'(t)\| > 0.$$

Wegen des Satzes für inverse Funktionen ist  $\sigma = s^{inv}$  wohldefiniert auf  $[0, \ell_f]$ , sogar differenzierbar, und es gilt

$$\sigma(0) = a, \sigma(\ell_f) = b \text{ und } \sigma'(t) = \frac{1}{s'(\sigma(t))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(t))\|}.$$

<sup>1</sup>Man kann isolierte Stellen als Ausnahme zulassen.

- Wir setzen

$$\varphi : [0, \ell_f] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi(t) = f \circ \sigma(t). \quad (1.11)$$

Diese Kurve  $\varphi$  heißt die **Umparametrisierung auf Bogenlänge** von  $f$ .

Die Funktion  $\varphi$  beschreibt die gleiche Spur wie  $f$ , und physikalisch gesagt, läuft mit konstanter Geschwindigkeit durch diese Spur:

$$\|\varphi'(t)\| = \|(f \circ \sigma)'(t)\| = \|f'(\sigma(t)) \sigma'(t)\| = \sigma'(t) \|f'(\sigma(t))\| = 1.$$

Man findet  $\int_0^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_0^t d\tau = t$ . Mit Geschwindigkeit 1 diese gleiche Spur durchlaufen liefert also die Bogenlänge  $\ell_f$ .

- Wir können eine Parametrisierung auch **umorientieren**. Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt, setzt man

$$f^{\text{umorientiert}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } f^{\text{umorientiert}}(t) = f(b + a - t). \quad (1.12)$$

Die Spur von  $f^{\text{umorientiert}}$  ist gleich der Spur von  $f$ , wird aber umgekehrt durchlaufen.

Um auf einen Beweis vom Lemma zurückzukommen: man hat für die zu  $f, \varphi, f^{\text{umorientiert}}$  und  $\varphi^{\text{umorientiert}}$  gehörenden Bogenlängen, dass

$$\ell_\varphi = \ell_f = \ell_{f^{\text{umorientiert}}} = \ell_{\varphi^{\text{umorientiert}}}.$$

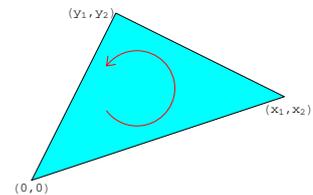
Weil  $\ell_\varphi$  nicht abhängt von der spezifischen glatten Kurve  $f$ , sondern nur von der Spur und der Bedingung, dass sie glatt und injektiv durchlaufen wird, folgt das Ergebnis im Lemma.

## 1.4 Flächeninhalt

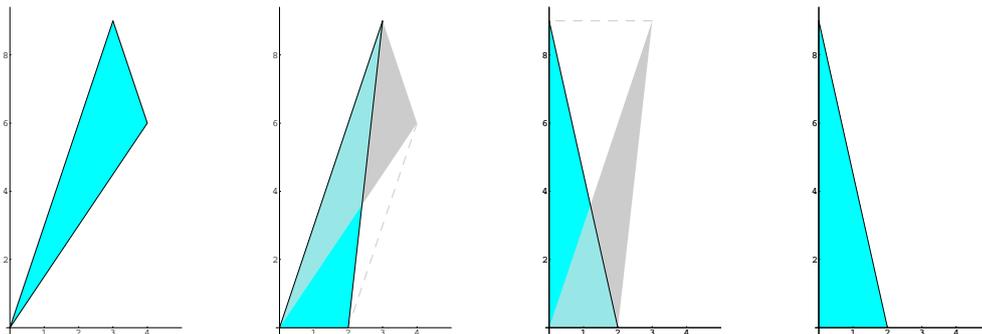
In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf die zweidimensionale Ebene.

**Lemma 1.16** *Ein Dreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(x_1, x_2)$  und  $(y_1, y_2)$ , orientiert gegen den Uhrzeigersinn, hat den Flächeninhalt*

$$I = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$



**Beweis.** Man benutze die Eigenschaften von Determinanten und schaue sich folgende Bilder an.



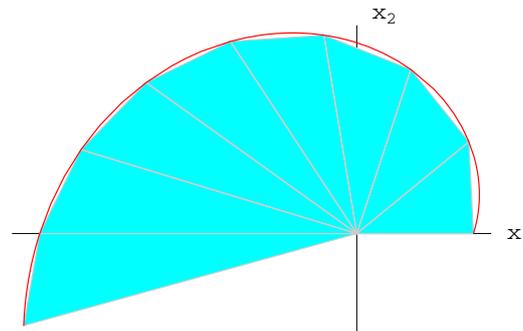
Die Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt. Für die dazugehörigen Determinanten gilt, wenn  $y_2 \neq 0$ , dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2}{y_2} y_1 & y_1 \\ x_2 - \frac{x_2}{y_2} y_2 & y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2}{y_2} y_1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - \frac{y_1}{y_2} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \text{„}\frac{1}{2}bh\text{“}, \end{aligned}$$

mit  $b = \text{‘Breite’} = x_1 - \frac{y_1}{y_2} x_2$  und  $h = \text{‘Höhe’} = y_2$ . Wenn  $y_2 = 0$  gilt, und  $x_2 \neq 0$ , kann man ähnlich vorgehen. Wenn  $y_2 = x_2 = 0$  gilt, ist der Flächeninhalt 0. ■

Wenn man einen Polygonzug mit Knotenpunkten  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  hat, dann wird der von dem Fahrstrahl aus  $(0, 0)$  überstrichene Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte von Dreiecken und das liefert:

$$I_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1^{(j)} & x_1^{(j+1)} \\ x_2^{(j)} & x_2^{(j+1)} \end{pmatrix}.$$



Wie im letzten Paragraphen bei der Bogenlänge setzt man  $x^{(i)} = f(t_i)$  und findet mit Hilfe einer Eigenschaft von Determinanten, dass

$$I_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} f_1(t_i) & f_1(t_{i+1}) \\ f_2(t_i) & f_2(t_{i+1}) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} f_1(t_i) & f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i) \\ f_2(t_i) & f_2(t_{i+1}) - f_2(t_i) \end{pmatrix},$$

und anschließend, mit dem Satz von Taylor für stetig differenzierbare  $f$  und mit der Integral-Approximation durch Riemann-Summen, dass

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} f_1(t_i) & \frac{f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \\ f_2(t_i) & \frac{f_2(t_{i+1}) - f_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \end{pmatrix} (t_{i+1} - t_i) \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \det \begin{pmatrix} f_1(t_i) & f_1'(t_i) \\ f_2(t_i) & f_2'(t_i) \end{pmatrix} (t_{i+1} - t_i) \approx \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_1'(t) \\ f_2(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Die ungenauen Aussagen mit  $\approx$  geben eine heuristische Erklärung. Einen genauen Beweis braucht erstens die Fehlerabschätzung vom Taylorschen Theorem und führt zweitens zurück zu der Definition des Integrals. Das Riemann-Integral bekommt man, indem man die Streuung  $\{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_k = b\}$  feiner macht, das heißt, mehr und mehr Zwischenpunkte nimmt, und damit den zugehörigen Limes berechnet.

**Lemma 1.17 (Sektorformel von Leibniz)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine glatte Kurve. Wenn der Fahrstrahl aus  $(0, 0)$  an dieser Kurve ein Gebiet einmal überstreicht, dann gilt für den orientierten<sup>2</sup> Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_1'(t) \\ f_2(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt. \quad (1.13)$$

**Bemerkung 1.17.1** Ausschreiben der Determinante liefert

$$\frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_1'(t) \\ f_2(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_a^b (f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t)) dt.$$

Wir werden keinen Beweis vom Lemma geben und es bei dieser heuristischen Erklärung belassen.

**Bemerkung 1.17.2** Dieser und der letzte Paragraph haben eine ähnliche Struktur. Ein wesentlicher Unterschied ist, dass Bogenlänge als Definition erscheint und dass der Flächeninhalt in einer Behauptung auftaucht. Der Grund ist, dass Bogenlänge neu ist, und Flächeninhalt, jedenfalls für Flächen  $\{(x_1, x_2) ; a \leq x_1 \leq b \text{ und } 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\}$ , schon als Integral definiert worden ist. Diese alte Definition könnte man erweitern auf Flächen, die definiert sind mit Hilfe eines Fahrstrahls an einer Kurve. Ein Beweis von Lemma 1.17 würde dann bedeuten, dass man zeigt, dass das Ergebnis dieser alten Definition übereinstimmt mit dem Ergebnis in (1.13).

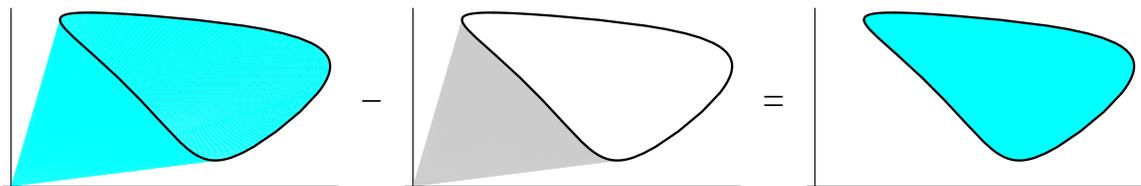
**Bemerkung 1.17.3** Wenn man eine Kurve mit Polarkoordinaten beschreibt, das heißt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t)),$$

wobei  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , dann vereinfacht sich die Formel in (1.13) zu

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} r(t) \cos t & r(t) \sin t \\ r'(t) \cos t - r(t) \sin t & r'(t) \sin t + r(t) \cos t \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_a^b (r(t))^2 dt.$$

**Korollar 1.18** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine glatte geschlossene Kurve. Geschlossen heißt  $f(a) = f(b)$ . Wenn sie linksherum orientiert ist und  $f|_{[a,b]}$  ist injektiv, dann gilt für den Flächeninhalt  $I$  vom umschlossenen Gebiet die Formel in (1.13).

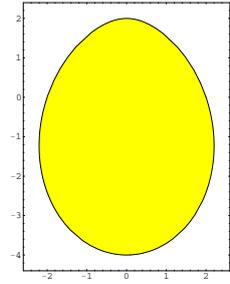


<sup>2</sup>„Der orientierte Flächeninhalt“ heißt hier: von dem in einer Bewegung nach links überstrichenen Gebiet wird der Standard-Flächeninhalt genommen und von dem in einer Bewegung nach rechts überstrichenen Gebiet wird der Flächeninhalt mit einem Minuszeichen genommen.

**Beispiel 1.19** Betrachten wir die Kurve  $\alpha_{\text{uf}} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\alpha_{\text{uf}}(t) = \begin{pmatrix} (2 - \sin t) \cos t \\ (3 - \sin t) \sin t \end{pmatrix}.$$

Diese Kurve ist geschlossen und links herum orientiert. Wir möchten den Flächeninhalt vom umschlossenen Gebiet berechnen. Mit der Formel aus (1.13) findet man:



$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} (2 - \sin(t)) \cos(t) & (3 - \sin(t)) \sin(t) \\ -(2 - \sin(t)) \sin(t) - (\cos(t))^2 & (3 - \sin(t)) \cos(t) - \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \dots = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{13}{2} - \frac{19}{4} \sin(t) - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{4} \sin(3t) \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{13}{4} dt = \frac{13}{2} \pi. \end{aligned}$$

# Analysis 2, Woche 2

## Kurven II



### 2.1 Definition der Krümmung

Wenn wir eine Kurve  $t \mapsto f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten, und dabei  $t$  als Zeit sehen, hat man physikalisch gesehen das folgende:

- $f(t)$  ist der Ortsvektor zum Zeitpunkt  $t$ ;
- $f'(t)$  ist der Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt  $t$ ;
- $f''(t)$  ist der Beschleunigungsvektor zum Zeitpunkt  $t$ .

Wenn man statt  $f$  die Umparametrisierung auf Bogenlänge  $\varphi$  betrachtet, bedeutet das, dass man durch die Spur läuft mit konstanter Geschwindigkeit, genauer gesagt mit Geschwindigkeitsgröße 1. In dem Fall bekommt man auch mit  $\varphi''$  eine geometrische Größe. Denn, wenn die Geschwindigkeitsgröße konstant ist, muss der Beschleunigungsvektor seitwärts gerichtet sein. Das sieht man auch wie folgt. Weil  $\|\varphi'\| = 1$  gilt, folgt

$$\varphi' \cdot \varphi'' = \frac{1}{2} (\varphi' \cdot \varphi')' = \frac{1}{2} (\|\varphi'\|^2)' = \frac{1}{2} (1)' = 0.$$

**Beispiel 2.1** Betrachten wir als Beispiel den Kreis  $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = R^2$ . Diesen Kreis kann man auf Bogenlänge parametrisieren durch

$$\varphi : [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } \varphi(t) = (m_1 + R \cos(t/R), m_2 + R \sin(t/R)).$$

Man findet direkt  $\varphi'(t) = (-\sin(t/R), \cos(t/R))$  und es folgt

$$\|\varphi'(t)\| = 1.$$

Auch findet man  $\varphi''(t) = \left(\frac{-\cos(t/R)}{R}, \frac{-\sin(t/R)}{R}\right)$  und

$$\|\varphi''(t)\| = \frac{1}{R}.$$

Es gilt  $\varphi'(t) \cdot \varphi''(t) = 0$  und auch, dass  $\|\varphi''(t)\|^{-1}$  den Radius vom Kreis ergibt. Beim Kreis definiert man die Krümmung  $\kappa$  durch  $\kappa = R^{-1}$ . Also gilt hier  $\kappa = \|\varphi''(t)\|$ .

Auch für Kurven in  $\mathbb{R}^n$  kann man, wenn die Kurve glatt ist und zweimal differenzierbar, mit Hilfe der Umparametrisierung nach Bogenlänge so die Krümmung definieren. Diese Krümmung  $\kappa$  soll so sein, dass man mit  $R = \kappa^{-1}$  den Radius des Kreises findet, der sich „am besten anschmiegen“ lässt an diese Kurve bei der Stelle  $\varphi(t)$ . Dieser Vorgang führt zu der folgenden Definition.

**Definition 2.2** Sei  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweimal stetig differenzierbare Kurve mit  $\|\varphi'(t)\| = 1$  für  $t \in [0, T]$ . Dann definiert man an der Parameterstelle  $t$ :

- die **Krümmung**:  $\kappa(t) = \|\varphi''(t)\|$ ,

und falls  $\varphi''(t) \neq 0$ :

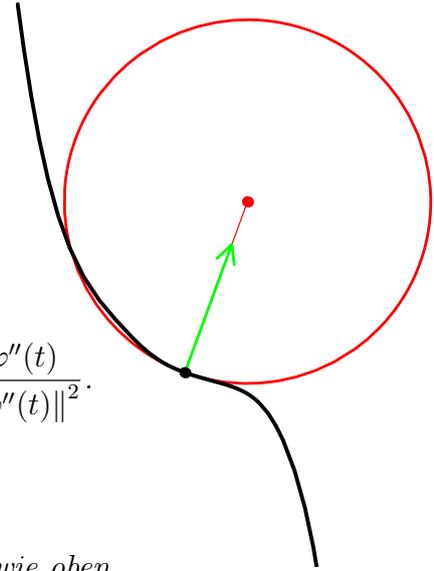
- den **Hauptnormalenvektor**:  $\nu(t) = \frac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|}$ ,

- den **Krümmungsradius**:  $r(t) = \frac{1}{\|\varphi''(t)\|}$ ,

- den **Krümmungsmittelpunkt**:  $m(t) = \varphi(t) + \frac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|^2}$ .

Falls  $\varphi''(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, T]$

- die **Evolute**: die Kurve  $m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $m(t)$  wie oben.



Den Kreisbogen, der  $\varphi(t)$  für  $t$  nahe an  $t_0$  so am Besten approximiert, würde man dann parametrisieren durch

$$c(t) = m(t_0) + R \sin\left(\frac{t-t_0}{R}\right) \varphi'(t_0) + R \cos\left(\frac{t-t_0}{R}\right) \frac{-\varphi''(t_0)}{\|\varphi''(t_0)\|} \quad (2.1)$$

mit

$$R = \frac{1}{\|\varphi''(t_0)\|}.$$

Auch hier gilt  $\|c'(t)\| = 1$ . Dass diese Kreiskurve  $c$  die Kurve  $\varphi$  quadratisch optimal approximiert bei  $t = t_0$ , sieht man im folgenden Lemma.

**Lemma 2.3** Sei  $\varphi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, mit

- $\|\varphi'(t)\| = 1$  für alle  $t \in [0, \ell]$ , und
- es gibt ein  $t_0 \in (0, \ell)$  mit  $\|\varphi''(t_0)\| \neq 0$ .

Sei  $c$  definiert in (2.1). Dann folgt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - c(t)}{(t - t_0)^2} = 0.$$

**Beweis.** Für jede Komponente von  $\varphi$  und deshalb auch für  $\varphi$  selber, gilt wegen des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - T_{2,\varphi,t_0}(t)}{(t - t_0)^2} = 0 \quad (2.2)$$

mit den Taylorpolynome

$$T_{2,\varphi,t_0}(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)\varphi''(t_0).$$

Weil

$$\begin{aligned} c(t_0) &= \varphi(t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{\|\varphi''(t_0)\|^2} + 0 + \left( R \cos\left(\frac{t - t_0}{R}\right) \frac{-\varphi''(t_0)}{\|\varphi''(t_0)\|} \right)_{|t=t_0} = \varphi(t_0) \\ c'(t_0) &= 0 + \left( \cos\left(\frac{t - t_0}{R}\right) \varphi'(t_0) \right)_{|t=t_0} + 0 = \varphi'(t_0) \\ c''(t_0) &= 0 + 0 + \left( \frac{-1}{R} \cos\left(\frac{t - t_0}{R}\right) \frac{-\varphi''(t_0)}{\|\varphi''(t_0)\|} \right)_{|t=t_0} = \varphi''(t_0) \end{aligned}$$

hat  $c$  bei  $t_0$  die gleiche Taylorpolynome zweiter Ordnung als  $\varphi$  bei  $t_0$ . Es folgt also hier, dass

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - T_{2,\varphi,t_0}(t)}{(t - t_0)^2} = 0. \quad (2.3)$$

Kombiniert man (2.2) und (2.3), so folgt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - c(t)}{(t - t_0)^2} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{\varphi(t) - T_{2,\varphi,t_0}(t)}{(t - t_0)^2} - \frac{c(t) - T_{2,\varphi,t_0}(t)}{(t - t_0)^2} \right) = 0,$$

das gewünschte Ergebnis. ■

**Beispiel 2.4** Wir betrachten die Kurve  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(t) = \left( t^2 - 1, \frac{1}{3}t^3 - t \right).$$

Eine Skizze zu der Kurve steht rechts.

Man findet

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} = t^2 + 1$$

und

$$s(t) = \int_{-2}^t \|f'(t)\| dt = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{14}{3}.$$

Die Inverse<sup>1</sup>  $s^{inv}$  ist definiert von  $[0, \frac{28}{3}]$  nach  $\mathbb{R}$  und wird verwendet für die Parametrisierung auf Bogenlänge:  $\varphi : [0, \frac{28}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(\tau) = f(s^{inv}(\tau))$ . In Abbildung 2.1 sieht man die Spur von  $f$ ,  $\varphi$  und die dazugehörige Evolute  $m$ .

<sup>1</sup>Die Formel von Cardano gibt sogar eine explizite Lösung:

$$s^{inv}(\tau) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{9\tau^2 - 84\tau + 200} + 14 - 3\tau}} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{9\tau^2 - 84\tau + 200} + 14 - 3\tau}}{\sqrt[3]{2}}.$$

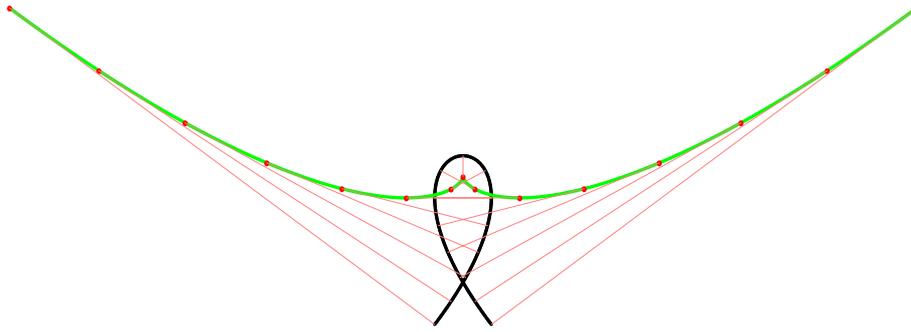


Abbildung 2.1: Vom Fisch zur Fledermaus: Die Spur zu  $f$  (und  $\varphi$ ) aus Beispiel 2.4 in schwarz mit der zugehörigen Evolute  $m$  in grün. Aus Platzgründe ist das Bild gedreht.

## 2.2 Krümmung bei beliebigen Kurven

Die Integrale, die erscheinen wenn man eine Kurve auf Bogenlänge umparametrisiert, sind selten explizit zu lösen. Deshalb möchte man die Krümmung berechnen ohne umzuparametrisieren. Das gehen wir in diesem Paragraphen an.

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte, zweimal stetig differenzierbare Kurve und  $\varphi : [0, \ell_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die auf Bogenlänge umparametrisierte. Das heißt, für

$$s(t) = \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau$$

hat man

$$f(t) = (\varphi \circ s)(t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\varphi' \circ s)(t) s'(t) \quad \text{und} \\ f''(t) &= (\varphi'' \circ s)(t) (s'(t))^2 + (\varphi' \circ s)(t) s''(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Lassen wir die Variable  $t$  weg. Man hat

$$s' = \|f'\| > 0 \quad (2.5)$$

und mit  $(s')^2 = \|f'\|^2 = f' \cdot f'$ , folgt  $2s's'' = 2f' \cdot f''$  (siehe Fußnote<sup>2</sup>) und also

$$s'' = (s')^{-1} f' \cdot f''. \quad (2.6)$$

Kombinieren wir (2.4), (2.5) und (2.6), so folgt

$$\begin{aligned} \varphi'' \circ s &= (s')^{-2} (f'' - (\varphi' \circ s) s'') = (s')^{-2} (f'' - (s')^{-1} f' s'') \\ &= \|f'\|^{-2} \left( f'' - \|f'\|^{-2} (f' \cdot f'') f' \right) = \frac{\|f'\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f'}{\|f'\|^4}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>Für zwei differenzierbare Vektorfunktionen  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt

$$(\alpha \cdot \beta)' = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right)' = \sum_{k=1}^n (\alpha'_k \beta_k + \alpha_k \beta'_k) = \alpha' \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'.$$

Mit Hilfe dieser Formel, mit der  $\varphi''$  sich durch  $f$ -abhängige Terme ersetzen lässt, können wir alle in Paragraph 2.1 definierten Größen jetzt allein mit Hilfe von  $f$  schreiben. Wir brauchen also  $\varphi$  nicht explizit zu berechnen.

- Weil man für den Zähler in (2.7) folgendes hat

$$\begin{aligned} \left\| \left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f' \right\|^2 &= \left( \left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f' \right) \cdot \left( \left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f' \right) = \\ &= \left\| f' \right\|^4 \|f''\|^2 - (f' \cdot f'')^2 \left\| f' \right\|^2, \end{aligned}$$

gilt für die Krümmung am Punkt  $\varphi(s(t)) = f(t)$ , dass

$$\kappa = \|\varphi'' \circ s\| = \frac{\left\| \left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f' \right\|}{\left\| f' \right\|^4} = \frac{\sqrt{\left\| f' \right\|^2 \|f''\|^2 - (f' \cdot f'')^2}}{\left\| f' \right\|^3} \quad (2.8)$$

- Den Hauptnormalenvektor findet man, wenn man (2.7) dividiert durch (2.8).
- Der Krümmungsradius ist immer noch  $\kappa^{-1}$  und  $\kappa$  kennen wir aus (2.8).
- Für den Krümmungsmittelpunkt bekommt man

$$m = f + \frac{\varphi'' \circ s}{\|\varphi'' \circ s\|^2} = f + \left\| f' \right\|^2 \frac{\left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f'}{\left\| f' \right\|^2 \|f''\|^2 - (f' \cdot f'')^2}.$$

Fassen wir zusammen:

**Lemma 2.5** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Kurve. Dann gilt für die Krümmung

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|f''\|^2 \|f'\|^2 - (f' \cdot f'')^2}}{\|f'\|^3}, \quad (2.9)$$

für den Hauptnormalenvektor

$$\nu = \frac{\left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f'}{\left\| \left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f' \right\|}$$

und für den Krümmungsmittelpunkt

$$m = f + \left\| f' \right\|^2 \frac{\left\| f' \right\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f'}{\left\| f' \right\|^2 \|f''\|^2 - (f' \cdot f'')^2}. \quad (2.10)$$

**Bemerkung 2.5.1** Wenn  $f'(t)$  und  $f''(t)$  unabhängig sind, dann gilt die strikte Cauchy-Schwarz Ungleichung, also

$$|f'(t) \cdot f''(t)| < \|f'(t)\| \|f''(t)\| \quad (2.11)$$

und folgt, dass der Zähler in (2.10) ungleich 0 ist. Die strenge Ungleichung in (2.11) besagt, dass die Projektion von  $f''$  auf  $f'$ , das heißt  $\frac{f' \cdot f''}{f' \cdot f'} f'$ , eine strikt kleinere Länge als  $f''$  hat:

$$\left\| \frac{f' \cdot f''}{f' \cdot f'} f' \right\| = \left| \frac{f' \cdot f''}{f' \cdot f'} \right| \|f'\| < \frac{\|f'\| \|f''\|}{f' \cdot f'} \|f'\| = \|f''\|.$$

Die Formel in (2.10) kann man übrigens auch mit Hilfe dieser Projektion schreiben:

$$m = f + \left\| f' \right\|^2 \frac{f'' - \frac{f' \cdot f''}{f' \cdot f'} f'}{\left\| f'' - \frac{f' \cdot f''}{f' \cdot f'} f' \right\|^2}. \quad (2.12)$$

**Bemerkung 2.5.2** Diese Formeln lassen sich vereinfachen für die Ebene. Die Krümmung wird

$$\kappa = \frac{\sqrt{((f_1'')^2 + (f_2'')^2) ((f_1')^2 + (f_2')^2) - (f_1' f_1'' + f_2' f_2'')^2}}{((f_1')^2 + (f_2')^2)^{3/2}} = \frac{|f_1' f_2'' - f_2' f_1''|}{((f_1')^2 + (f_2')^2)^{3/2}}.$$

Für den Hauptnormalenvektor gilt

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \frac{\text{sign}(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')}{\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}} \begin{pmatrix} -f_2' \\ f_1' \end{pmatrix},$$

und für den Krümmungsmittelpunkt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{(f_1')^2 + (f_2')^2}{(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')^2} \begin{pmatrix} f_1'' ((f_1')^2 + (f_2')^2) - f_1' (f_1' f_1'' + f_2' f_2'') \\ f_2'' ((f_1')^2 + (f_2')^2) - f_2' (f_1' f_1'' + f_2' f_2'') \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{(f_1')^2 + (f_2')^2}{(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')^2} \begin{pmatrix} f_1'' (f_2')^2 - f_1' f_2' f_2'' \\ f_2'' (f_1')^2 - f_2' f_1' f_1'' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{(f_1')^2 + (f_2')^2}{f_1' f_2'' - f_2' f_1''} \begin{pmatrix} -f_2' \\ f_1' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die sign-Funktion ist definiert durch

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} +1 & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0, \\ -1 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

**Beispiel 2.6** Wir betrachten  $f : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ . Die Spur der Kurve und deren Evolute sind in Abbildung 2.2 dargestellt.

**Bemerkung 2.6.1** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine glatte, zweimal differenzierbare Kurve. Am Punkt  $f(t)$  kann man jetzt einen Tangentialvektor und einen Hauptnormalenvektor konstruieren. Will man ein komplettes Dreibein an dieser Stelle  $f(t)$  haben, kann man einen zweiten Normalenvektor bekommen durch das **Vektorprodukt**:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \hat{e}_1 \\ u_2 & v_2 & \hat{e}_2 \\ u_3 & v_3 & \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Hier sind  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  die drei Standardeinheitsvektoren. Wenn  $\varphi$  eine Parametrisierung auf Kurvenlänge ist, dann hat man ein Dreibein  $\{\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'(t) \times \varphi''(t)\}$ . Siehe Abbildung 2.3.

Das **Vektorprodukt** in  $\mathbb{R}^3$ , auch Kreuzprodukt genannt, hat folgende Eigenschaften: Sei  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  und  $s, t \in \mathbb{R}$ .

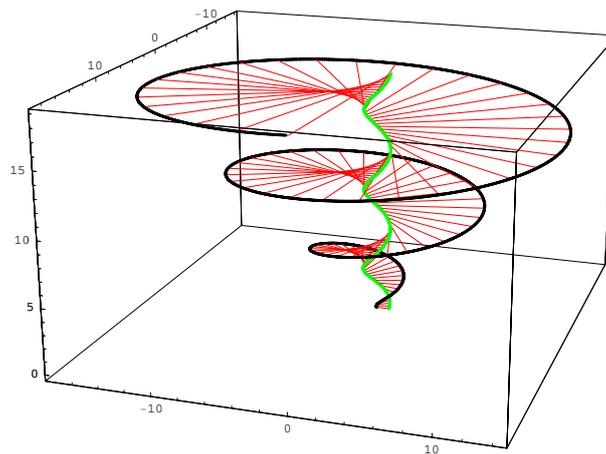
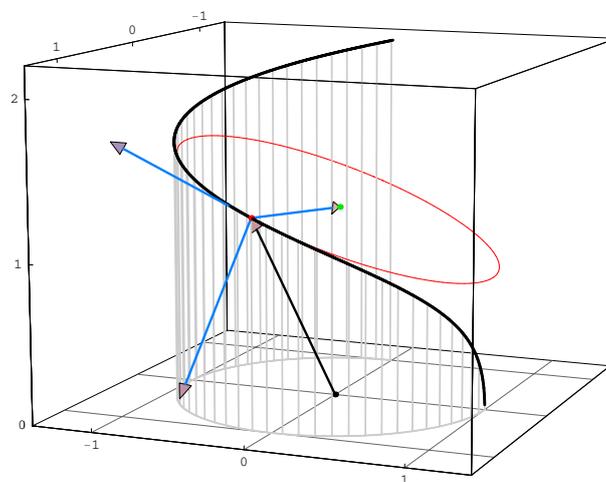


Abbildung 2.2: Spur und Evolute in 3D.

Abbildung 2.3: Die Spur einer Kurve mit Parametrisierung auf Bogenlänge  $\varphi$  und das Dreiein  $\{\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'(t) \times \varphi''(t)\}$  an der Stelle  $\varphi(t)$ .

- $u \times v = -v \times u$ , also  $u \times u = 0$ ;
- $(su + tv) \times w = s(u \times w) + t(v \times w)$ ;
- $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\angle uOv)$  ist der Flächeninhalt vom Parallelogramm mit den Ecken  $O$ ,  $u$ ,  $u + v$  und  $v$ ;
- $\{u, v, u \times v\}$  ist positiv orientiert (Rechterhandregel);
- $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ , die Graßman-Identität;
- $(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w)$  mit  $u, v, w$  als Spaltenvektoren. Wenn  $\{u, v, w\}$  positiv orientiert ist, gleicht  $\det(u, v, w)$  dem Inhalt des Parallelepipeds (wird auch Spat genannt),

$$P = \{c_1u + c_2v + c_3w; 0 \leq c_i \leq 1\}.$$

Beweise finden Sie bei der Linearen Algebra.

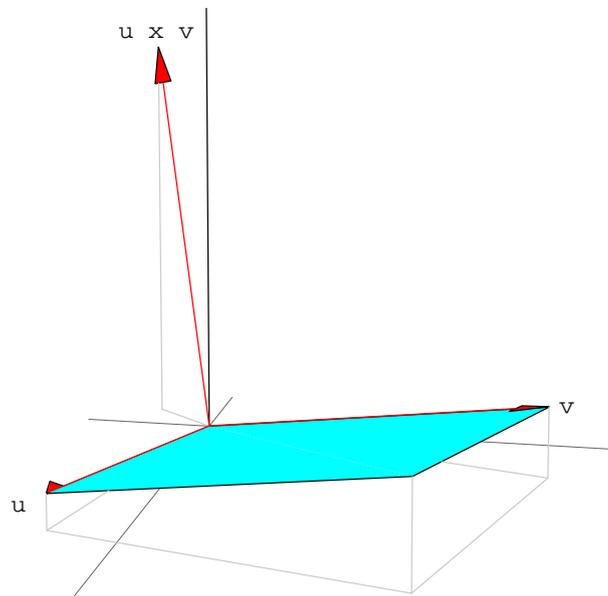


Abbildung 2.4: Darstellung vom Vektorprodukt (Kreuzprodukt) in  $\mathbb{R}^3$

# Analysis 2, Woche 3

## Differentialgleichungen I



### 3.1 Eine Einleitung

Eine Differentialgleichung beschreibt eine Beziehung zwischen Ableitungen einer Funktion oder Vektorfunktion und dieser Funktion selbst. Die Gleichung wird meistens geliefert durch ein physikalisches Modell. Das Finden des richtigen Modells oder das Modellieren ist eine Kunst an sich, ist aber keinesfalls unabhängig von den mathematischen Ergebnissen, die aus der Differentialgleichung folgen. Nur wenn diese Ergebnisse sich umsetzen lassen in vernünftige Aussagen für das physikalische Problem, kann das Modell passend sein.

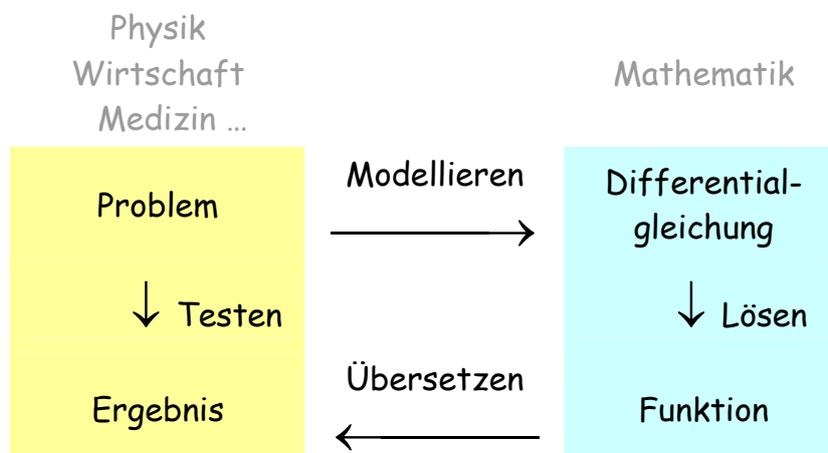


Abbildung 3.1: Das Modell ist nicht die DGI und die Lösung ist nicht das Ergebnis.

**Beispiel 3.1** *Beschränktes Wachstum liefert die logistische Differentialgleichung:*

$$d'(t) = d(t) (1 - d(t)). \quad (3.1)$$

**Beispiel 3.2** *Das idealisierte Federpendel ohne Reibung:*

$$u''(t) = g - c_{Hooke} u(t). \quad (3.2)$$

**Beispiel 3.3** *Das Pendel einer Uhr (ohne Reibung):*

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)). \quad (3.3)$$

**Beispiel 3.4** *Das Auto bei einer Vollbremsung:*

$$x''(t) = -c_{\text{Reifen}} \operatorname{sign}(x'(t)). \quad (3.4)$$

Statt selber Lösungen zu suchen, könnte man Computer-Algebra-Systeme verwenden. Für diese vier ersten Beispiele folgen die Ergebnisse von Mathematica und Maple in Abbildung 3.2 und 3.3. Ein totales Vergnügen ist es nicht.

```

> dsolve(diff(d(t), t) = d(t) * (1 - d(t)));
                                     d(t) = 1 / (1 + e^(-t) * _C1)
> dsolve(diff(d(t), t) = g - c * d(t));
                                     d(t) = sin(sqrt(c) * t) * _C2 + cos(sqrt(c) * t) * _C1 + g / c
> dsolve(diff(phi(t), t) = -g / l * sin(phi(t)));
      integral from phi(t) to phi(t) of l / (sqrt(l * (2 * g * cos(a) + _C1 * l)) * d_a - t - _C2 = 0,
      integral from phi(t) to phi(t) of -l / (sqrt(l * (2 * g * cos(a) + _C1 * l)) * d_a - t - _C2 = 0
> dsolve(diff(x(t), t) = -c * sign(diff(x(t), t)));
                                     x(t) = -1/2 * c * t^2 + _C1 * t + _C2

```

Abbildung 3.2: Die Lösungen von Maple

```

In[1]:= DSolve[d'[t] == d[t] (1 - d[t]), d[t], t]
Out[1]= {{d[t] -> e^t / (e^t - e^C[1])}}
In[2]:= DSolve[u''[t] == g - cHooke u[t], u[t], t]
Out[2]= {{u[t] -> C[2] Cos[t Sqrt[cHooke]] + C[1] Sin[t Sqrt[cHooke]] + g / cHooke}}
In[3]:= DSolve[phi''[t] == -g / l Sin[phi[t]], phi[t], t]
Solve::ifun :
Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not
be found; use Reduce for complete solution information. More...
Out[3]= {{phi[t] -> 2 JacobiAmplitude[
- (sqrt(2 g t^2 + 1 t^2 C[1] + 4 g t C[2] + 2 1 t C[1] C[2] + 2 g C[2]^2 + 1 C[1] C[2]^2) /
2 sqrt(1),
4 g / (2 g + 1 C[1])]}, {phi[t] -> 2 JacobiAmplitude[
sqrt(2 g t^2 + 1 t^2 C[1] + 4 g t C[2] + 2 1 t C[1] C[2] + 2 g C[2]^2 + 1 C[1] C[2]^2) /
2 sqrt(1),
4 g / (2 g + 1 C[1])]]}}
In[4]:= DSolve[x'[t] == -cReifen Sign[x[t]], x[t], t]
Solve::eqf : -Re[1 / (1 - x[t])] < 0 is not a well-formed equation. More...

```

Abbildung 3.3: Die Lösungen von Mathematica

### 3.1.1 Lösungsbegriff

Die Differentialgleichungen, die verwendet werden beim Modellieren von physikalischen Größen stellen immer eine Größe von etwas dar, das sich stetig verändert. Daher ist es üblich, dass man Lösungen versteht als Funktionen, die nicht nur die Differentialgleichungen erfüllen, sondern auch auf eine zusammenhängende Menge definiert sind.

**Definition 3.5** Sei  $F : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Man nennt die Funktion  $x$  eine Lösung der Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung

$$x^{(k)}(t) = F(x^{(k-1)}(t), x^{(k-2)}(t), \dots, x'(t), x(t), t), \quad (3.5)$$

wenn

1. es ein Intervall  $I$  in  $\mathbb{R}$  gibt derart, dass  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal differenzierbare Funktion ist, und
2. die Funktion  $x$  für alle  $t \in I$  die Gleichung (3.5) erfüllt.

Schauen wir uns jetzt mal an, welche Resultate diese Computer-Algebra-Systeme uns gebracht haben und vergleichen wir sie mit den möglichen Lösungen.

**Fortsetzung von Beispiel 3.1** Die Lösungen, die Mathematica und Maple gefunden haben für  $d'(t) = d(t)(1 - d(t))$ , sind als Formeln erschienen. Klar fehlt bei Maple und Mathematica die Lösung  $d(t) = 0$ . Bei Mathematica fehlt noch mehr, es sei denn, man erlaubt  $C[1] \in \mathbb{C}$ . Wenn man alle Lösungen von (3.1) betrachtet, das heißt als Funktionen  $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $I \subset \mathbb{R}$  einem Intervall, dann bekommt man:

- |      |               |  |     |                              |
|------|---------------|--|-----|------------------------------|
| I.   | für $c < 0$ , | $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$        | mit | $d(t) = \frac{e^t}{e^t - c}$ |
| II.  | für $c > 0$ , | $d : (\log c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  | mit | $d(t) = \frac{e^t}{e^t - c}$ |
| III. | für $c > 0$ , | $d : (-\infty, \log c) \rightarrow \mathbb{R}$ | mit | $d(t) = \frac{e^t}{e^t - c}$ |
| IV.  |               | $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$        | mit | $d(t) = 0$                   |
| V.   |               | $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$        | mit | $d(t) = 1$                   |

Man sieht, dass es Lösungen gibt mit (einseitig) beschränktem Definitionsgebiet und mit dem ganzen  $\mathbb{R}$  als Definitionsgebiet. Das zusammenhängende Definitionsgebiet für eine Lösung wird das **Existenzintervall** genannt. Ein Bild mit der Skizze einiger Lösungen folgt. Obwohl sich diese unterschiedlichen Lösungen dem Anschein nach berühren, sind sie in Wirklichkeit überall verschieden.

Übrigens ist diese Differentialgleichung modelliert als eine Erweiterung der Standard-Differentialgleichung mit einer linearen Relation zwischen Wachstum und Population:

$$x'(t) = c x(t). \quad (3.6)$$

Wenn man annimmt, dass die totale Population durch Platz- oder Futtermangel durch ein Maximum  $M$  beschränkt wird, dann kann man die folgende Gleichung betrachten:

$$x'(t) = c \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) x(t).$$

Für kleine Populationen, das heißt  $x(t) \ll M$  ist dies fast (3.6). Wenn  $x(t)$  nahe bei  $M$  liegt, wird die Rate  $c(1 - M^{-1}x(t))$  sehr klein. Durch Skalierung in  $x$  und in  $t$  kommt auf (3.1). Dies geht wie folgt:

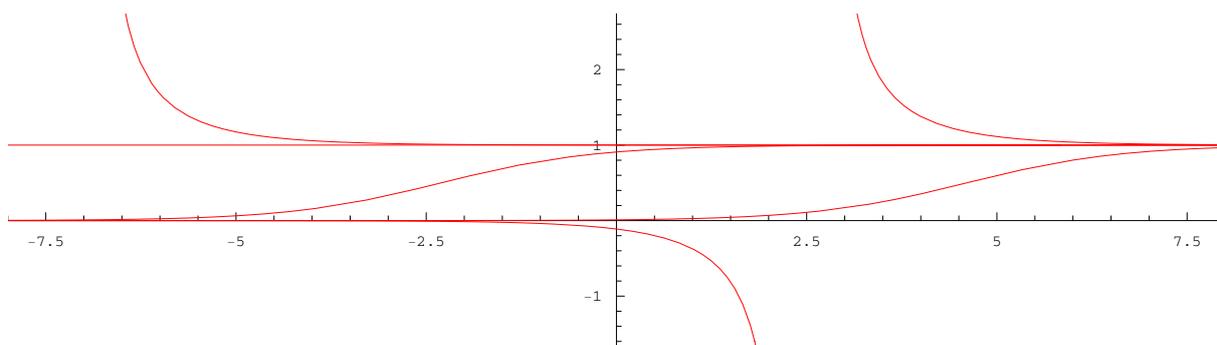
1. Schreibe  $y(t) = M^{-1}x(t)$ , so folgt

$$y'(t) = \frac{x'(t)}{M} = c \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) \frac{x(t)}{M} = c (1 - y(t)) y(t).$$

2. Ersetze  $ct = \tau$  und  $d(\tau) = d(ct) = y(t)$ , so folgt

$$c d'(\tau) = c d'(ct) = y'(t) = c (1 - y(t)) y(t) = c (1 - d(\tau)) d(\tau),$$

und man bekommt (3.1) nach Dividieren durch  $c$  und indem man  $\tau$  wieder  $t$  nennt.



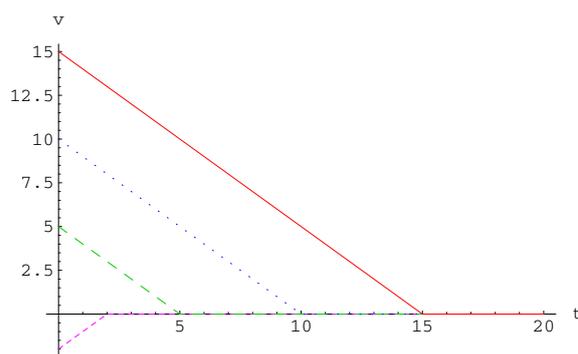
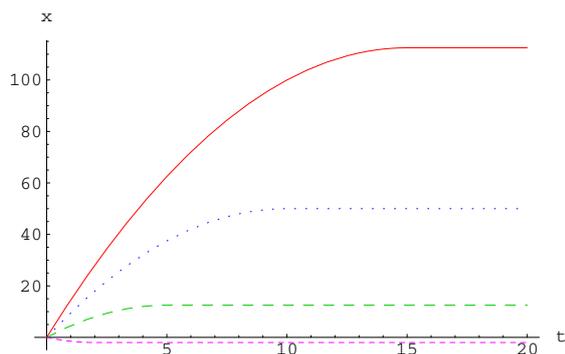
**Fortsetzung von Beispiel 3.2** Die Differentialgleichung  $u''(t) = g - c_{\text{Hooke}} u(t)$  enthält Ableitungen zweiter Ordnung und in der Lösungsformel stehen 2 Konstanten. Wenn die Differentialgleichung nicht entartet ist, gilt solches allgemein. Eine nicht-entartete Differentialgleichung, die eine Ableitung  $n$ -ter Ordnung enthält, hat  $n$  freie Konstanten in ihrer allgemeinen Lösungsformel.

**Fortsetzung von Beispiel 3.3** Diese Differentialgleichung  $\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t))$  lässt sich nicht explizit lösen mit Hilfe der üblichen Funktionen. Anscheinend kennt Mathematica eine Funktion, die Maple nicht kennt.

**Fortsetzung von Beispiel 3.4** Für dieses Beispiel gibt Mathematica eine unverständliche Antwort, die eine ganze Seite braucht (und weggelassen ist) und Maple gibt eine falsche Lösung. Man muss gestehen, dass man den Standardlösungsbegriff für diese letzte Differentialgleichung  $x''(t) = -c_{\text{Reifen}} \text{sign}(x'(t))$  erweitern muss. Die Funktionen, die man als Lösung zulassen möchte, sind nämlich nicht überall zweimal differenzierbar:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \text{sign}(v_0) c_{\text{Reifen}} t^2 & \text{für } 0 \leq t < \frac{|v_0|}{c_{\text{Reifen}}}, \\ x_0 + \frac{v_0 |v_0|}{2c_{\text{Reifen}}} & \text{für } t \geq \frac{|v_0|}{c_{\text{Reifen}}}. \end{cases}$$

Hier ist  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit. Man sieht, dass sich der Bremsweg 'quadratisch' zu  $v_0$  verhält. Ein Bild mit Skizzen von einigen Lösungen  $t \mapsto x(t)$  und die dazugehörige  $v = x'$  findet man unten. Für die Konstante  $c_{\text{Reifen}}$  ist 1 gewählt. Und wer fuhr rückwärts?



**Beispiel 3.6** Das Sprungbrett im Schwimmbad, auf dem einige Leute bewegungslos stehen:

$$u''''(x) = f(x).$$

Die Gewichtsverteilung wird durch  $f$  gegeben. Die Auslenkung wird durch die Lösung  $u$  vertreten. Die Lösungen findet man durch viermal Integrieren, und das liefert uns:

$$u(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (x-s)^3 f(s) ds + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

**Beispiel 3.7** Das Lorenz-System:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha (y(t) - x(t)) \\ y'(t) &= \beta x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \gamma z(t) \end{aligned}$$

mit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  (meistens  $\mathbb{R}^+$ ). Explizite Lösungen gibt es kaum. Für bestimmte Parameter zeigen die Lösungen (numerische Approximation) chaotisches Verhalten. Es hat viele Mathematiker dazu gebracht, derartige Systeme genauer zu studieren.

Im Allgemeinen sieht so eine gewöhnliche<sup>1</sup> Differentialgleichung aus wie

$$F(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t) = 0.$$

Die höchste Ableitung die erscheint, heißt die **Ordnung** der Differentialgleichung. Wenn man so eine Dgl. in **expliziter Form** schreiben kann:

$$x^{(n)}(t) = G(x^{(n-1)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t)$$

hat diese Dgl. Ordnung  $n$ .

**Problem 3.8** Wenn man eine Differentialgleichung vorgesetzt bekommt, hätte man am liebsten, dass es eine explizit bekannte Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{R}^n$  bei einem System von mehreren Differentialgleichungen) gibt derart, dass die Gleichung erfüllt ist. Leider passiert das recht selten. Meistens muss man sich zufrieden geben, wenn man die folgenden Fragen beantworten kann:

1. Gibt es eine Lösung?
2. Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
3. Kann man qualitative Ergebnisse für diese Lösung finden?

Obwohl für die meisten Dgl. keine explizite Lösung zu finden ist, ist es doch vernünftig, sich die Fälle, bei denen es eine explizite Lösungsmöglichkeit gibt, mal genauer anzugehen.

<sup>1</sup>Gewöhnlich wird als Gegensatz zu partiell benutzt. Eine partielle Differentialgleichung gibt eine Beziehung zwischen partiellen Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlichen. Zum Beispiel  $\frac{\partial}{\partial t}x(t, s) + \frac{\partial}{\partial s}x(t, s) = x(t, s)$ . Wir werden hier nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten.

### 3.1.2 Erste Ordnung und Systeme höherer Ordnung

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung kann man immer schreiben als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Für die Gleichung

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (3.7)$$

setzt man  $x_1(\cdot) = x(\cdot)$ ,  $x_2(\cdot) = x'(\cdot)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(\cdot) = x^{(n-1)}(\cdot)$ , oder mit Vektornotation

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Es folgt, dass

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ G(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$\vec{F}(t, \vec{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ G(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

so folgt

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)) \quad (3.10)$$

ist ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Eine Lösung ist eine differenzierbare (Vektor)Funktion  $\vec{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Auch hier soll  $I$  ein Intervall sein.

**Lemma 3.9** Seien  $F$  und  $G$  wie in (3.9) und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall.

- Wenn  $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (3.10), dann ist  $x := x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (3.7).
- Wenn  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (3.7), dann ist  $\vec{x} := (x, \dots, x^{(n-1)})^T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (3.10).

**Beweis.** Die Funktion  $\vec{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Lösung von (3.10), wenn sie differenzierbar ist und (3.10) erfüllt. Dann ist jede Komponente, also auch  $x_n$ , differenzierbar und dies bedeutet, dass  $x$   $n$ -mal differenzierbar ist. Weil wir  $F$  passend zu  $G$  definiert haben, ist  $x$  eine Lösung von (3.7).

Wenn  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung ist von (3.7), dann ist  $x$   $n$ -Mal differenzierbar. Es folgt dass  $\vec{x}$  differenzierbar ist und (3.10) erfüllt. ■

## 3.2 Lineare Gleichungen, konstante Koeffizienten

**Definition 3.10** Eine Differentialgleichung der Form

$$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t)$$

nennt man **linear**.

- Man sagt '**mit konstanten Koeffizienten**', wenn  $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$  für jede  $i = 1, \dots, n$  und  $t \in \mathbb{R}$ .
- Man nennt diese lineare Gleichung **homogen**, wenn  $f = 0$ .

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind wichtig aus zwei Gründen: 1) die Lösungen sind relativ einfach und ziemlich explizit zu konstruieren, 2) man kann lineare Differentialgleichungen verwenden, um das Benehmen von nicht-linearen Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung zu studieren.

### 3.2.1 Einfache Beispiele linearer Gleichungen

Die einfachste Differentialgleichung, die man sich vorstellen kann, ist

$$x'(t) = f(t). \quad (3.11)$$

Die Frage, die man sich stellt, heißt:

*Wenn die Funktion  $f$  gegeben ist, welche Funktion ist  $x$ ?*

**Bemerkung 3.10.1** Die erste Frage sollte eigentlich nicht lauten, welche Funktion dieses  $x$  ist, sondern ob es sie gibt und ob es die einzige ist? Weil wir diese Differentialgleichung auf eine konstruktive Art lösen können, werden all diese Fragen gleichzeitig beantwortet.

Der Hauptsatz der Integralrechnung sagt dass, wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, die Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds$$

eine differenzierbare Funktion ist und, dass sogar gilt

$$F'(t) = f(t).$$

Das heißt, eine Lösung für (3.11) haben wir gefunden, nämlich  $x = F$ . Man sieht auch sofort, dass es auch eine Lösung sein wird, wenn man eine Konstante addiert zu diesem  $F$ . Um eine eindeutige Lösung zu haben, muss man wohl  $x$  an irgendeiner Stelle  $t \in [a, b]$  festlegen.

**Lemma 3.11** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

genau eine Lösung, nämlich

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s) ds.$$

**Bemerkung 3.11.1** Eine Lösung heißt hier eine differenzierbare Funktion  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die beide Gleichungen in (3.12) erfüllt.

**Beweis.** Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass  $x(t) = x_0 + \int_a^t f(s)ds$  eine Lösung ist. Diese Funktion ist die einzige Lösung. Wenn sowohl  $x$  als auch  $\tilde{x}$  eine Lösung ist, dann gilt für  $y := x - \tilde{x}$ , dass

$$y' = x' - \tilde{x}' = f - f = 0.$$

Dann findet man, als eine Folge des Mittelwertsatzes, dass  $y$  konstant ist. Also gilt

$$y(t) = y(a) = x(a) - \tilde{x}(a) = x_0 - x_0 = 0$$

und es folgt  $x = \tilde{x}$ . ■

**Die zweit-einfachste Differentialgleichung**, die man sich vorstellen kann, ist

$$x'(t) = x(t). \quad (3.13)$$

Aus der Kindheit kann man sich vielleicht noch daran erinnern, dass

$$x(t) = e^t$$

eine Lösung ist und dass man sogar mehrere Lösungen hat. Sei  $c \in \mathbb{R}$ , dann ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x(t) = ce^t$  eine Lösung von (3.13). Wenn  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $x(0) = x_0$  gegeben ist, findet man  $x(t) = e^t x_0$ .

Dass man auf diese Weise alle Lösungen bekommt sieht man, indem man  $x(t)$  ersetzt durch  $y(t) = e^{-t}x(t)$ . Dann folgt  $x(t) = e^t y(t)$  und (3.13) ändert sich in

$$e^t y(t) + e^t y'(t) = e^t y(t).$$

Das heißt,  $y'(t) = 0$  und  $y(t) = y(0) = e^0 x(0) = x_0$  ist die einzige Möglichkeit. Also ist auch  $x(t) = e^t y(t) = e^t x_0$  die einzige Lösung.

Ebenso findet man für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \text{ für } t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

als einzige Lösung die Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat mit

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0.$$

**Die dritt-einfachste Differentialgleichung**, die man sich vorstellen kann<sup>2</sup>, ist die Kombination von beiden vorhergehenden

$$x'(t) = x(t) + f(t). \quad (3.15)$$

Substituieren wir wie vorhin  $x(t) = e^t y(t)$ , dann folgt

$$e^t y(t) + e^t y'(t) = e^t y(t) + f(t).$$

Das lässt sich vereinfachen zu  $y'(t) = e^{-t} f(t)$  und formal können wir diese Differentialgleichung lösen:

$$y(t) = \int_0^t e^{-s} f(s) ds + c.$$

Für  $x$  finden wir

$$x(t) = e^t x_0 + e^t \int_0^t e^{-s} f(s) ds.$$

---

<sup>2</sup>Es soll schon mehr originelle Texte gegeben haben ...

**Lemma 3.12** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

genau eine Lösung, nämlich

$$x(t) = e^{\lambda(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds. \quad (3.17)$$

Wenn man die vorhin erklärten Schritte verfolgt, kann man sofort einen Beweis bekommen. Normalerweise lernt man die Formel in (3.17) nicht auswendig, sondern man wendet den folgenden Trick an. Man nennt diesen Trick: Variation der Konstante.

**Algorithmus 3.1** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Man sucht eine Lösung  $x$  von

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t). \quad (3.18)$$

1. Das Lösen des homogenen Problems  $x'(t) = \lambda x(t)$  liefert  $x(t) = e^{\lambda t}c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .
2. Man sucht die Lösungen von (3.18) durch Substitution  $x(t) = e^{\lambda t}c(t)$ .

**Beispiel 3.13** Gefragt sind die Lösungen von  $x'(t) = 4x(t) + 2 \sinh(4t)$ .

Die homogene Gleichung  $x'(t) = 4x(t)$  hat  $x(t) = e^{4t}c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  als Lösungen.

Die Substitution  $x(t) = e^{4t}c(t)$  liefert

$$4e^{4t}c(t) + e^{4t}c'(t) = 4e^{4t}c(t) + 2 \sinh(4t) = 4e^{4t}c(t) + e^{4t} - e^{-4t}.$$

Das heißt  $c'(t) = 1 - e^{-8t}$  und

$$c(t) = c_1 + \int_0^t (1 - e^{-8s}) ds = c_1 + t + \frac{1}{8}(e^{-8t} - 1)$$

liefert

$$x(t) = \tilde{c}_1 e^{4t} + t e^{4t} + \frac{1}{8} e^{-4t}.$$

Die Funktion  $x$  ist wohldefiniert auf  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 3.14** Gefragt sind die Lösungen von  $x'(t) = -x(t) + \log(t)$ .

Die homogene Gleichung  $x'(t) = -x(t)$  hat  $x(t) = e^{-t}c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  als Lösungen.

Die Substitution  $x(t) = e^{-t}c(t)$  liefert

$$-e^{-t}c(t) + e^{-t}c'(t) = -e^{-t}c(t) + \log(t).$$

Das heißt  $c'(t) = e^t \log(t)$  und

$$c(t) = c_1 + \int_1^t e^s \log(s) ds$$

liefert

$$x(t) = c_1 e^{-t} + \int_1^t e^{s-t} \log(s) ds.$$

Die Funktion  $x$  ist wohldefiniert auf  $(0, \infty)$ .

### 3.3 Lineare Systeme, konstante Koeffizienten

Mit dieser Überschrift werden folgende Probleme gemeint. Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  gegeben und man versucht  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu finden derart, dass das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) + f_1(t), \\ x'_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \cdots + a_{2n} x_n(t) + f_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t) + f_n(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Das homogene Problem** hat folgende Form:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) \\ x'_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \cdots + a_{2n} x_n(t) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

oder, wenn wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

verwenden, kürzt sich (3.20) auf

$$x'(t) = A x(t), \quad (3.21)$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gesucht wird.

Diese Gleichung in (3.21) sieht sehr ähnlich aus wie (3.14).

*Kann man die exp-Funktion verwenden?*

Wir erinnern noch mal daran, dass die Exponentialfunktion als eine Potenzreihe definiert ist:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (3.22)$$

und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius  $\infty$  hat. Außerdem gilt innerhalb des Konvergenzradius, dass

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z^k}{k!} \right)'$$

Statt in (3.22)  $z \in \mathbb{C}$ , könnte man auch  $z \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  nehmen;  $M^{n \times n}(\mathbb{R})$  sind die  $n \times n$  Matrizen mit reellen Koeffizienten.

**Definition 3.15** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ . Man definiert

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

**Bemerkung 3.15.1** Statt  $\exp(A)$  schreibt man auch  $e^A$ .

**Lemma 3.16** Für alle  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  konvergiert  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k$  in  $M^{n \times n}(\mathbb{C})$ . Oder anders gesagt:  $\exp(A)$  ist wohldefiniert.

**Beweis.** Wir müssen zeigen, dass jede Komponente  $\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k\right)_{i,j}$  konvergiert für  $\ell \rightarrow \infty$ . Setzen wir

$$m = \max\{|A_{ij}|; 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Dann gilt für den  $i, j$ -Eintrag von  $\frac{1}{k!} A^k$ , dass

$$\left|\left(\frac{1}{k!} A^k\right)_{i,j}\right| \leq \left(\frac{1}{k!} \begin{pmatrix} m & m & \cdots & m \\ m & m & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \cdots & m \end{pmatrix}^k\right)_{i,j} = \frac{m^k n^{k-1}}{k!}.$$

Weil die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k n^{k-1}}{k!}$$

konvergiert, nämlich nach  $\frac{1}{n} e^{mn}$ , ergibt das Majorantenkriterium, dass auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} A^k\right)_{i,j}$$

konvergiert. ■

**Lemma 3.17** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

genau eine Lösung, nämlich die Funktion  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$x(t) = \exp(At) x_0.$$

**Beweis.** Durch Lemma 3.16 wissen wir, dass jede Komponente von  $\exp(At)$  Konvergenzradius  $\infty$  hat. Auch wissen wir, dass man innerhalb des Konvergenzradius die Folge von Summe und Ableitung ändern darf, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Das heißt:

$$\begin{aligned} (\exp(At) x_0)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k x_0\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} (At)^k x_0\right)' = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1} x_0 = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell} t^{\ell} x_0 = A \exp(At) x_0. \end{aligned}$$

Weil<sup>3</sup>

$$(\exp(At) x_0)_{t=0} = e^O x_0 = I x_0 = x_0$$

<sup>3</sup>Hier ist  $I \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  die Identitätsmatrix und  $O \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  die Nullmatrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

gilt, ist  $x(t) := e^{At}x_0$  eine Lösung von (3.23).

Ist es die einzige Lösung? Nehmen wir an, es gibt mindestens zwei Lösungen  $x$  und  $\tilde{x}$ . Dann erfüllt  $\hat{x} = x - \tilde{x}$  das Anfangswertproblem (3.23) mit  $\hat{x}(0) = 0$ . Wir betrachten  $y(t) := e^{-At}\hat{x}(t)$ . Es folgt, dass

$$y(0) = e^0 \hat{x}(0) = I 0 = 0$$

und, weil wie oben  $(e^{-At})' = -Ae^{-At}$ , gilt auch

$$\begin{aligned} y'(t) &= (e^{-At}\hat{x}(t))' = -Ae^{-At}\hat{x}(t) + e^{-At}\hat{x}'(t) = \\ &= e^{-At}(\hat{x}'(t) - A\hat{x}(t)) = e^{-At} 0 = 0, \end{aligned}$$

und wir finden  $y'_i(t) = 0$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Das heißt, jede Komponente, also auch  $y$  ist konstant und wegen des Anfangswertes sogar 0. Weil<sup>4</sup>

$$e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$$

gilt auch

$$\hat{x}(t) = e^{At}e^{-At}\hat{x}(t) = e^{At}y(t) = e^{At}0 = 0.$$

Weil wir angenommen haben, dass  $x$  und  $\tilde{x}$  unterschiedlich sind, haben wir einen Widerspruch erzeugt. ■

**Das allgemeine Problem** in (3.19), bei dem man auch eine rechte Seite  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zulässt, das heißt

$$x'(t) = A x(t) + f(t),$$

bei dem wiederum  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gesucht wird, kann man genau so lösen wie in Lemma 3.12.

**Theorem 3.19** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion,  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

genau eine Lösung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nämlich

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.25)$$

---

<sup>4</sup>Wir haben hier folgendes Ergebnis benutzt:

**Lemma 3.18** Seien  $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  (oder  $M^{n \times n}(\mathbb{C})$ ). Dann sind äquivalent:

1.  $e^{tA}e^{sB} = e^{tA+sB}$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ ,
2.  $AB = BA$ .

Aus  $e^{tA}e^{sB} = e^{A+B} = e^B e^A$  folgt jedoch nicht, dass  $AB = BA$ . Setzt man  $\lambda = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ , so bekommt man ein Gegenbeispiel für eine solche Behauptung durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi\lambda \\ -2\pi/\lambda & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi/\lambda \\ -2\pi\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 3.19.1** Das Integral über einer Vektorfunktion ist definiert als Vektor von den Integralen der einzelnen Komponenten. Also für  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit integrierbaren Komponenten  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\int_a^b g(s) ds = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s) ds \\ \int_a^b g_2(s) ds \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s) ds \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite von (3.25) steht so ein Integral.

**Bemerkung 3.19.2** Das Definitionsgebiet  $[a, b]$  von  $f$  wird als Definitionsgebiet für  $x$  übernommen. Wenn  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, dann findet man für die Differentialgleichung  $x'(t) = Ax(t) + f(t)$  die Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.26)$$

Dabei ist  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig zu wählen. Die Tatsache, dass das Definitionsgebiet übernommen wird, trifft nur zu bei linearen Gleichungen.



# Analysis 2, Woche 4

## Differentialgleichungen II



### 4.1 Die Lineare Algebra zum Matrixexponenten

Wir haben gesehen, dass man das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = Ax(t)$$

mit  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  lösen kann durch

$$x(t) = \exp(tA)x_0 \text{ mit } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie man so einen Matrixexponenten berechnen kann. Direkt die Potenzreihe ausschreiben scheint nicht besonders angenehm zu sein.

**Beispiel 4.1** *Direktes Ausschreiben für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  führt zu*

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^0 + t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^1 + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{7}{2}t^2 + \frac{37}{3}t^3 + \dots & 2t + 5t^2 + 18t^3 + \dots \\ 3t + \frac{15}{2}t^2 + 27t^3 + \dots & 1 + 4t + 11t^2 + \frac{118}{3}t^3 + \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn man Maple fragt, bekommt man ziemlich schnell, dass

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{11+\sqrt{33}}{22}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11-\sqrt{33}}{22}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} & \frac{2\sqrt{33}}{33}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{2\sqrt{33}}{33}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} \\ \frac{\sqrt{33}}{11}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{\sqrt{33}}{11}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} & \frac{11-\sqrt{33}}{22}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11+\sqrt{33}}{22}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Wie schafft Maple oder Mathematica dies? Verlässt man sich auf solchen Programme oder soll man als (zukünftiger) Mathematiker vielleicht doch wissen, wie man es berechnen kann, beziehungsweise wieso der Rechner das so einfach hinkriegt. Wir geben einige Ergebnisse, die man verwenden kann.

**Lemma 4.2** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  und  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Für eine Ähnlichkeitstransformation  $T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  mit  $T$  invertierbar gilt:

$$\exp(tTAT^{-1}) = T \exp(tA) T^{-1}.$$

2. Für eine Blockmatrix  $A$  mit  $B \in M^{k \times k}(\mathbb{C})$  und  $C \in M^{(n-k) \times (n-k)}(\mathbb{C})$  gilt:

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}.$$

Mit  $O$  ist die passende Matrix mit ausschließlich 0-Einträgen gemeint. Durch wiederholte Anwendung folgt insbesondere für eine Diagonalmatrix  $A$ :

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

3. Für einen Jordanblock  $A$  gilt:

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ \vdots & & \ddots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

**Beweis.**

1. Man findet sofort

$$\exp(tTAT^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tTAT^{-1})^k = T \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \right) T^{-1} = T \exp(tA) T^{-1}.$$

2. Auch hier

$$\begin{aligned} \exp \left( t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t^k B^k & O \\ O & t^k C^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Wir schreiben

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und finden so  $A = \lambda I + E$ . Weil  $\lambda I E = \lambda E = E \lambda I$ , das heißt,  $\lambda I$  und  $E$  kommutieren, folgt mit Lemma 3.18, dass

$$\exp(tA) = \exp(t\lambda I + tE) = \exp(t\lambda I) \exp(tE) = e^{t\lambda} \exp(tE). \quad (4.2)$$

Weil  $E$  nilpotent ist (die Diagonale mit 1 schiebt sich jedesmal nach rechts in  $E^2$ ,  $E^3$  usw.) und weil  $E^n = O$ , gilt

$$\begin{aligned} \exp(tE) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tE)^k = I + tE + \frac{t^2}{2} E^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} E^{n-1} + O = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kombiniert man mit (4.2), folgt so das gewünschte Ergebnis.  $\blacksquare$

Ohne Beweis werden wir ein Ergebnis aus der Linearen Algebra verwenden, nämlich dass jede Matrix einer Jordan-Matrix ähnlich ist. Vorher wird Jordan-Matrix definiert:

**Definition 4.3** Eine Matrix  $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  ist eine Jordan-Matrix, wenn sie wie folgt aus Blöcken zusammengesetzt ist:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \dots & \dots & O \\ O & B_2 & O & & & \vdots \\ O & O & B_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & B_{k-1} & O \\ O & \dots & \dots & \dots & O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Die Aussage "jede Matrix ist ähnlich einer Jordan-Matrix" bedeutet:

**Theorem 4.4** Für jede Matrix  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  gibt es eine invertierbare Matrix  $T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  und eine Jordan-Matrix  $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass

$$A = T J T^{-1}.$$

Einen Beweis sollte man in der Vorlesung Lineare Algebra bekommen.

**Bemerkung 4.4.1** Die Skalare  $\lambda_i$ , die in  $J$  erscheinen, sind die Eigenwerte von  $A$  und für die gilt das Folgende:

- Die algebraische Vielfachheit von  $\lambda_i$ , das heißt die Vielfachheit von  $\lambda_i$  als Nullstelle vom Polynom  $\det(A - \lambda I)$ , liest man ab in  $J$  als die Anzahl der  $\lambda_i$  auf der Diagonalen von  $J$ .
- Die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$  ist die Dimension vom Eigenraum

$$\dim \{ \phi \in \mathbb{C}^n; A\phi = \lambda_i \phi \},$$

und diese Zahl findet man zurück als die Anzahl der Jordan-Blöcke  $B_j$  mit  $\lambda_i$  auf der Diagonalen.

- Wenn die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$  echt kleiner ist als die algebraische, dann gibt es mindestens einen generalisierten Eigenvektor der ersten Ordnung:

◇  $\phi \in \mathbb{C}^n$  ist ein generalisierter Eigenvektor der  $k$ -ten Ordnung für  $A$  beim Eigenwert  $\lambda_i$ , wenn

$$(A - \lambda_i I)^{k+1} \phi = 0 \text{ und } (A - \lambda_i I)^k \phi \neq 0.$$

◇ wenn  $\phi \in \mathbb{C}^n$  ein generalisierter Eigenvektor der  $k$ -ten Ordnung beim Eigenwert  $\lambda_i$  ist, dann ist  $(A - \lambda_i I)\phi$  ein generalisierter Eigenvektor der  $(k-1)$ -ten Ordnung beim Eigenwert  $\lambda_i$ . Eigenvektoren soll man auffassen als generalisierter Eigenvektor der 0-ten Ordnung.

◇ wenn  $\phi \in \mathbb{C}^n$  ein generalisierter Eigenvektor der  $k$ -ten Ordnung ( $k \geq 1$ ) beim Eigenwert  $\lambda_i$  ist, und man  $\psi := (A - \lambda_i I)\phi$  und  $\phi$  als nachfolgende Basisvektoren nimmt, folgt, weil  $A\phi = \psi + \lambda_i\phi$ , genau 1 auf der zugehörigen Stelle in der Nebendiagonale.

- Jede Matrix hat eine Basis aus Eigenvektoren und generalisierten Eigenvektoren.

Wenn man eine Zerlegung der Form  $A = TJT^{-1}$  gefunden hat, dann kann man mit Hilfe von Lemma 4.2  $\exp(tA) = T \exp(tJ)T^{-1}$  berechnen.

**Beispiel 4.5** Für die Matrix, die wir vorhin benutzt haben, hat man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} & \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}-11}{22} & -\frac{2\sqrt{33}}{33} \\ \frac{11-\sqrt{33}}{22} & \frac{2\sqrt{33}}{33} \end{pmatrix}$$

und es folgt das Ergebnis in Beispiel 4.1.

**Beispiel 4.6** Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  findet man durch  $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ , das heißt

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1 - i$  und  $\lambda_2 = 1 + i$ . Zwei dazugehörige Eigenvektoren sind:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

und

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Die Spur der Lösung

Nachdem wir gesehen haben, wie man die Lösung bei einem homogenen System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten explizit berechnen kann, möchten wir näher eingehen auf die qualitativen Eigenschaften solcher Lösungen. Dazu betrachten wir zunächst die Spur der Lösungen einiger solcher Systeme.

**Beispiel 4.7** *Das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

hat als Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t + 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t + 2e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Bemerke, dass eine Lösungskurve an der Stelle  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  sich bewegt in Richtung

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

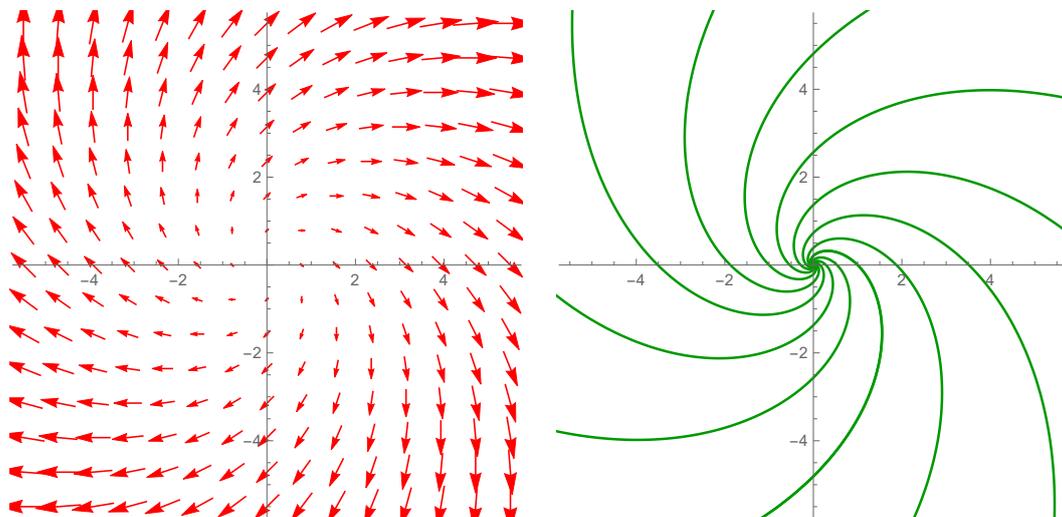


Abbildung 4.1: Links eine Darstellung des Vektorfeldes für Beispiel 4.7. Rechts die Spur einiger Lösungen dieses Beispiels. In welcher Richtung diese Spuren durchlaufen werden sieht man an den Richtungen der Vektoren.

**Bemerkung 4.7.1** *Für eine Lösung von*

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

gilt, dass die sich an der Stelle „ $\vec{x}$ “ in der Richtung „ $\vec{v} = A\vec{x}$ “ bewegt. Anders gesagt, die Lösungskurven folgen dem Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definiert durch  $F(x) = Ax$ . Dieses Vektorfeld hilft also, eine Idee zu bekommen, wie die Lösungen sich benehmen.

**Bemerkung 4.7.2** Weil  $x \mapsto Ax$  eine lineare Abbildung ist, gilt  $A\lambda x = \lambda Ax$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und daraus folgt, dass das Vektorfeld

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

die folgenden Eigenschaften hat. Das Bild ist invariant beim Ein- oder Auszoomen mit  $O$  als Zentrum und auch bei der Punktspiegelung in  $O$ .

**Beispiel 4.8** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix findet man aus

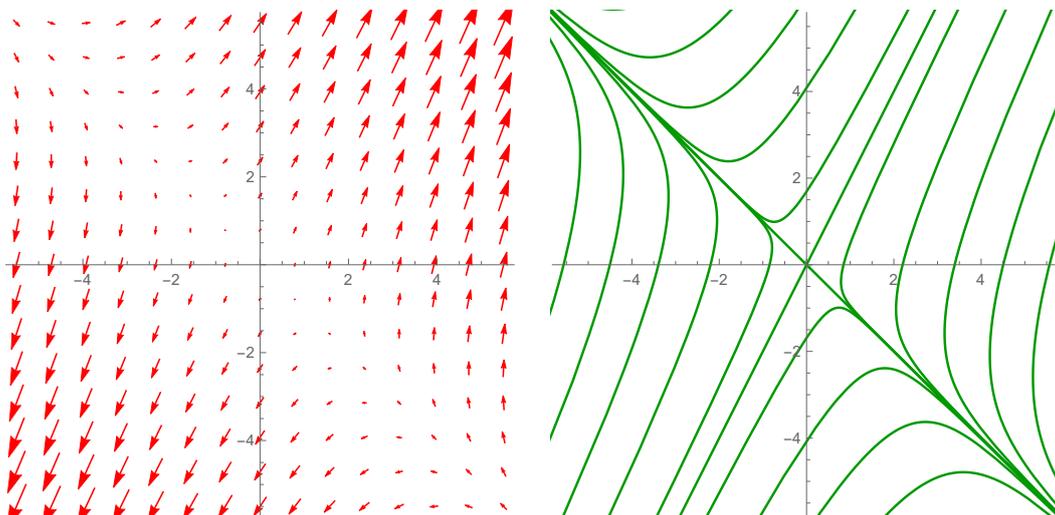


Abbildung 4.2: Links eine Darstellung des Vektorfeldes für Beispiel 4.8. Rechts die Spur einiger Lösungen dieses Beispiels. In welcher Richtung diese Spuren durchlaufen werden sieht man auch hier an den Richtungen der Vektoren.

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0,$$

nämlich  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 5$ . Dazugehörige Eigenvektoren sind  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Man kann den formellen Weg gehen:

$$\begin{aligned} \exp \left( t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Man kann sich auch überlegen, dass  $x(0) = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2$  und deshalb

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{\lambda_1 t}\varphi_1 + \frac{2}{3}e^{\lambda_2 t}\varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 4.9** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1 - 2i$  und  $\lambda_3 = -1 + 2i$ , und dazugehörige Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann den Exponenten berechnen oder direkt den Anfangswert bezüglich einer Basis von Eigenvektoren zerlegen und bekommt schlussendlich die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}e^t + \frac{1}{10}e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{10}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{20}e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{20}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Eine Abbildung der Spur findet man in Abbildung 4.3.

## 4.3 Lineare Stabilität

Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Wir betrachten wiederum ein homogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = Ax(t). \quad (4.3)$$

**Definition 4.10** Das homogene lineare System in (4.3) heißt

- **stabil**, wenn es für jede Lösung  $x$  ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass

$$\|x(t)\| \leq M \text{ für alle } t \geq 0;$$

- **instabil**, wenn es eine Lösung  $x$  gibt derart, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty;$$

- **asymptotisch stabil**, wenn für alle Lösungen  $x$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0;$$

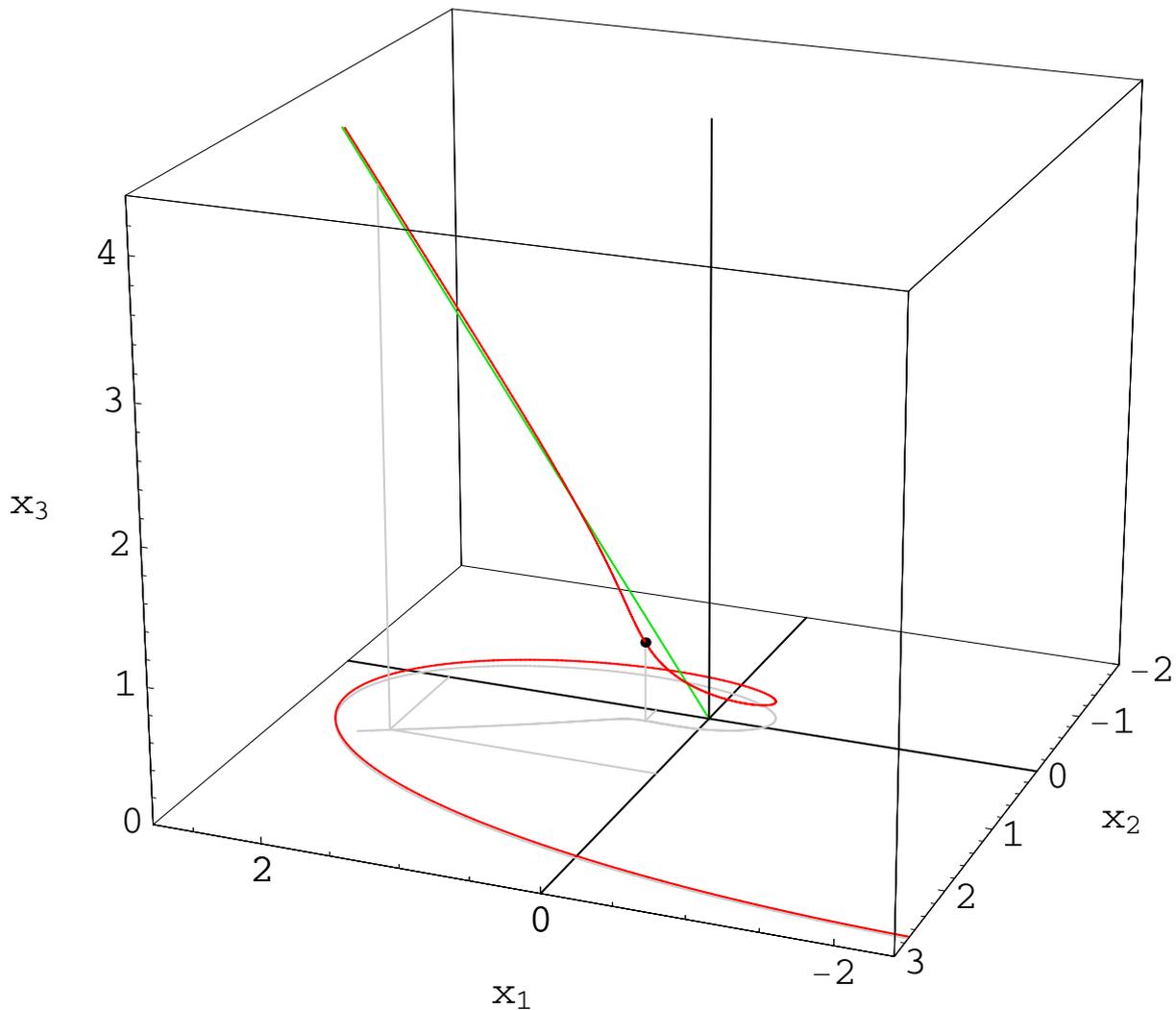


Abbildung 4.3: Die Spur der Lösung vom Beispiel 4.9. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spur durchlaufen wird. Und was bedeutet die grüne Linie aus  $(0,0,0)$  hinauf?

- **neutral stabil**, wenn das System stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

**Bemerkung 4.10.1** Diese Klassifizierung gilt nur für lineare Systeme. Bei homogenen linearen Systemen ist 0 immer eine Gleichgewichtsstelle (= konstante Lösung). Bei Gleichgewichtsstellen für nichtlineare Differentialgleichungen werden diese globalen Bedingungen ersetzt durch lokale Bedingungen für eine Umgebung der Gleichgewichtsstelle.

In dem letzten Paragraphen haben wir gesehen, dass das globale Verhalten bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten eigentlich nur von den Eigenwerten abhängt. Wir bekommen dann auch das folgende Ergebnis.

**Lemma 4.11** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und sei  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  die Menge der unterschiedlichen Eigenwerte von  $A$ . Sei  $a_i$  die algebraische und  $m_i$  die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$ . Dann gilt für (4.3):

1.  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\} \implies$  asymptotisch stabil;
2.  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, k\} \implies$  instabil;

3.  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $a_j = m_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0 \implies$  stabil;
4.  $\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $a_j > m_j$  für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0 \implies$  instabil.

**Beweis.** Die Lösungsterme die erscheinen, sind  $t^{m-1}e^{\lambda_i t}$  mit  $m \leq m_i$ .

1. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m-1}e^{\lambda_i t} = 0$ .
2. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_i t}| = \infty$ .
3. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , dann gilt  $|e^{\lambda_i t}| = 1$  und wenn die algebraische Vielfachheit  $m_i$  gleich für solche  $\lambda_i$ , dann kommt  $t^k e^{\lambda_i t}$  mit  $k > 0$  nicht vor.
4. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$  und die algebraische Vielfachheit gleich nicht  $m_i$  für ein solches  $\lambda_i$ , dann gibt es  $t e^{\lambda_i t}$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} |t e^{\lambda_i t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$ .

■

**Bemerkung 4.11.1** Wenn also gefragt wird, ob alle Lösungen von  $x'(t) = Ax(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  nach 0 konvergieren, braucht man nur die Eigenwerte und gegebenenfalls die Vielfachheiten zu berechnen.

**Beispiel 4.12** Das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

ist asymptotisch stabil, denn  $\lambda_1 = -1 - 3i$  und  $\lambda_2 = -1 + 3i$  und  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .

**Beispiel 4.13** Das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} x(t)$$

ist instabil, denn es gibt einen Eigenwert<sup>1</sup>  $\lambda \approx 4.45087$  und  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .

---

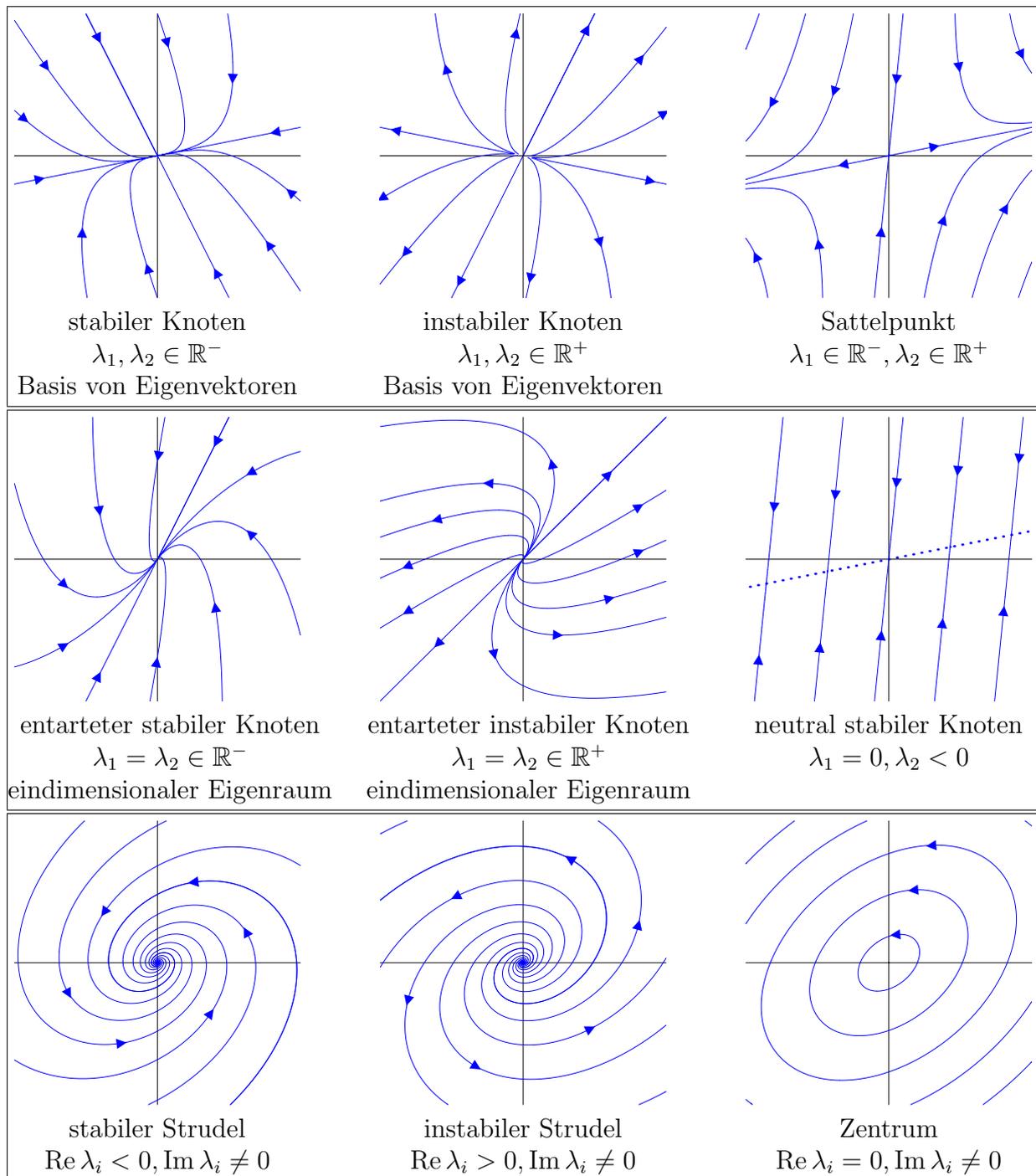
<sup>1</sup>Dieser Eigenwert ist numerisch approximiert. Statt numerisch vorzugehen, kann man auch das Polynom  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  näher untersuchen. Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen von  $p$  und für diese Matrix  $A$  gilt

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \dots = \lambda^4 + 10\lambda^3 - 200\lambda - 384.$$

Weil  $p(100) > 0$  und  $p(0) = -384 < 0$ , sagt der Zwischenwertsatz, dass  $p(\lambda)$  eine positive Nullstelle besitzt.

### 4.3.1 Klassifizierung in zwei Dimensionen

In zwei Dimensionen sind die Möglichkeiten ziemlich übersichtlich. So übersichtlich, dass man sogar individuelle Namen für die auftretenden Fälle<sup>2</sup> hat.



### 4.3.2 Geometrische Zusammenhänge

Das Gleichungssystem

$$x'(t) = A x(t) \quad (4.4)$$

<sup>2</sup>Für diese Bilder sind folgende Matrizen verwendet worden:

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 49 & 98 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 49 & 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -75 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & -25 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -29 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -103 \\ 55 & 110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & -503 \\ 49 & 490 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & -16 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & -50 \\ 49 & 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -75 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 156 & -20 \\ 55 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 101 & -1 \\ 35 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -29 \\ 1 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

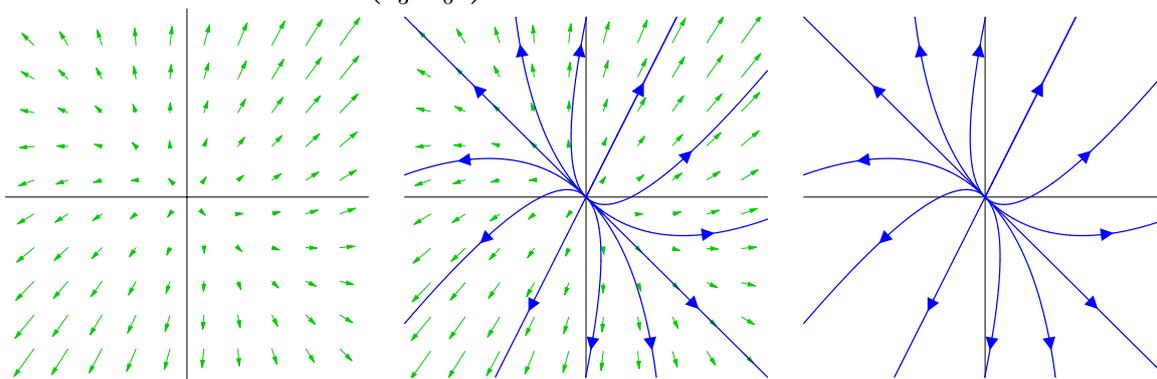
mit  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  gibt eine Beziehung zwischen Position und Richtung einer Lösungskurve. Für  $n = 2$  gilt:

Eine Lösung von (4.4) hat an der Stelle  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  die Richtung  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Das erlaubt es uns Lösungen zu skizzieren, ohne das System explizit zu lösen, indem wir den Vektoren im Vektorfeld  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  'folgen'.

Formal gesprochen ist ein zweidimensionales Vektorfeld eine Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Es lässt sich darstellen, indem man mehrere Punkte in der Ebene nimmt und in jedem Punkt einen Pfeil einzeichnet mit der durch das Vektorfeld angegebenen Größe und Richtung. Man denke an die Wettervorhersage für den Wind.

**Beispiel 4.14** Für  $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x(t)$  hat man:



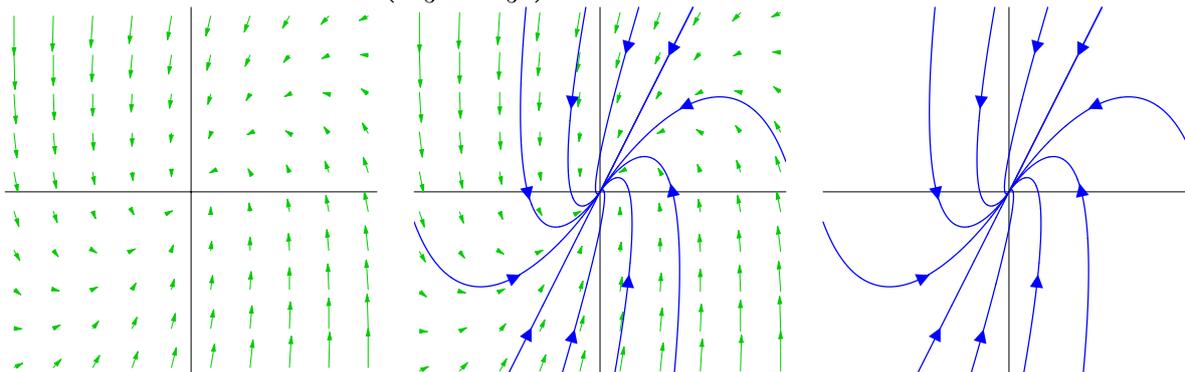
Die Eigenwerte sind  $1$  und  $\frac{1}{2}$  und mit den zugehörigen Eigenvektoren findet man die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}.$$

Nach Anfangswert  $x(0)$  gelöst wird die Lösung:

$$x(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \\ \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} x(0).$$

**Beispiel 4.15** Für  $x'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} x(t)$  hat man:



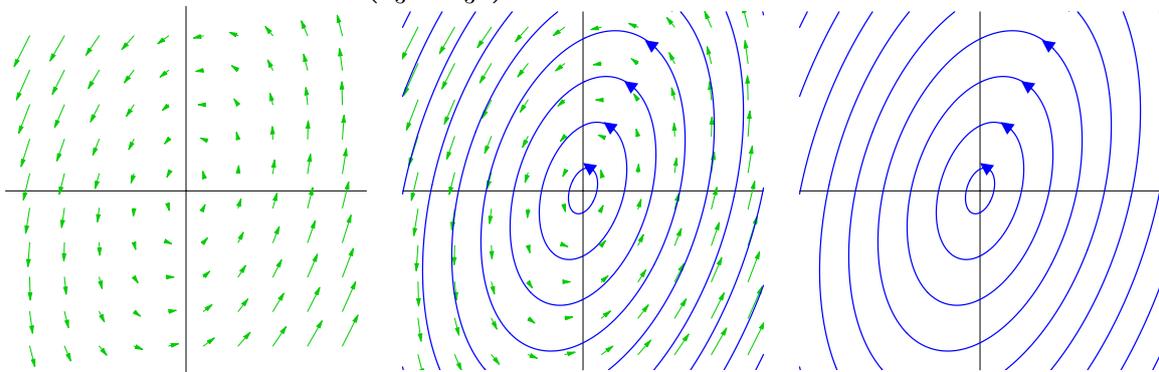
Es gibt hier nur einen Eigenwert:  $\lambda = -1$ . Verwendet man den Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und einen generalisierten Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ , wird die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Anfangswert  $x(0)$  gelöst wird die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3} t e^{-t} & -\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{2}{3} t \left(\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{3}{4t} e^{-t}\right) \\ \frac{4}{3} t e^{-t} & -\frac{4}{3} t \left(\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{3}{4t} e^{-t}\right) \end{pmatrix} x(0). \end{aligned}$$

**Beispiel 4.16** Für  $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$  hat man:



Die Lösungen des Systems sind:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{3} \sin t & -\frac{2}{3} \sin t \\ \frac{5}{3} \sin t & \cos t - \frac{1}{3} \sin t \end{pmatrix} x(0).$$

Auch hier kann man die Lösungen mit Eigenvektoren schreiben, aber die sind dann in komplexer Form:

$$x(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{C}.$$

So eine Lösung ist reell genau dann, wenn  $c_1 = \overline{c_2}$ . Setzt man  $c_1 = a + ib$  und  $c_2 = a - ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , findet man die reellen Lösungen und es erscheinen Terme mit  $\cos t$  und  $\sin t$ . Man erinnere sich, dass  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**Bemerkung 4.16.1** In diesen Bildern erkennt man auch die lineare Eigenschaft dieser Systeme. Wenn  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung ist, dann ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  auch  $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tilde{x}(t) = cx(t)$  eine Lösung. Für das zugehörige Vektorfeld bedeutet das, dass die Vektoren, die auf einer geraden Linie durch den Ursprung liegen parallel sind. Genauer gesagt: an der gleichen Seite zeigen sie in die gleiche Richtung; gegenüberliegend in die entgegengesetzte Richtung.

## 4.4 Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man auch auf diese Art angehen. Sei  $f \in C(\mathbb{R})$  und betrachte

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t). \quad (4.5)$$

Dann setzt man  $y_i(t) = x^{(i-1)}(t)$  für  $i = 1, \dots, n$  und findet

$$y'(t) = Ay(t) + g(t) \quad (4.6)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt  $\det(A - \lambda I) = 0$  und das wird jetzt bei der Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile zu

$$(a_1 - \lambda) \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

andern gesagt:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (4.8)$$

**Definition 4.17** Man nennt (4.8) die charakteristische Gleichung für (4.5).

**Lemma 4.18** Sei  $a_i \in \mathbb{C}$  und sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  wie in (4.7). Jeder Eigenwert von  $A$  hat geometrische Vielfachheit gleich 1.

**Beweis.** Wenn  $\lambda$  ein Eigenwert ist, dann gilt für dazugehörige Eigenvektoren  $\varphi$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass

$$\varphi_n = \lambda \varphi_{n-1} = \lambda^2 \varphi_{n-2} = \cdots = \lambda^{n-1} \varphi_1,$$

also höchstens ein unabhängiger Eigenvektor. ■

**Theorem 4.19** Sei  $a_i \in \mathbb{C}$  und sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  wie in (4.7). Nehme an,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  sind die Eigenwerte von  $A$  mit algebraischen Vielfachheiten  $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ .

- Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) \quad (4.9)$$

wie folgt:

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.10)$$

- Kennt man eine Lösung  $\tilde{x}$  von (4.5), dann ist die allgemeine Lösung von (4.5) wie folgt:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.11)$$

**Bemerkung 4.19.1** Um es nochmals genau zu sagen: die Aussagen bedeuten, dass man jede Lösung  $x$  schreiben kann, wie es auf der rechten Seite steht und umgekehrt; jede Funktion, die man schreiben kann wie so eine rechte Seite, ist eine Lösung.

**Bemerkung 4.19.2** Die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleicht  $n$ . Die Anzahl der Konstanten in (4.10) gleicht auch der Summe der algebraischen Vielfachheiten. Weil die Funktionen  $t^m e^{\lambda_i t}$  (linear) unabhängig sind, bilden die Funktionen in (4.10) einen  $n$ -dimensionalen Lösungsraum.

Geht man zurück zum System (4.6) mit  $A$  und  $g$  wie in (4.7), dann findet man für jeden Anfangswert  $y_0$  genau eine Lösung. Die Übersetzung für (4.5) lautet: für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  hat man genau eine Lösung  $x$  vom folgenden Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t) \\ x(0) = y_0, \quad x'(0) = y_1, \quad x''(0) = y_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = y_n. \end{cases}$$

**Beweis.** Die Lösungen  $y$  vom System (4.6) mit  $A$  und  $g$  wie in (4.7) folgen aus Satz 3.19. Nach Lemma 4.2 enthalten die expliziten Lösungen der homogenen Gleichung nur Terme  $c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}$  mit  $m \leq m_i - 1$ . Das heißt, jede Lösung der homogenen Gleichung kann man schreiben wie auf der rechten Seite von (4.10). Weil man eindeutig hin- und herwechseln kann zwischen der Gleichung  $n$ -ter Ordnung für  $y$  und dem System erster Ordnung für  $x$ , muss auch die Lösung für  $x$  in (4.9)  $n$ -dimensional sein. Weil die rechte Seite von (4.10) genau  $n$  frei zu wählende Konstanten hat, ist jede Funktion auf dieser rechten Seite eine Lösung.

Die Behauptung für die inhomogene Gleichung folgt mit der Bemerkung, dass wenn  $\tilde{x}$  und  $\hat{x}$  die Gleichung (4.5) erfüllen, die Funktion  $x = \tilde{x} - \hat{x}$  eine Lösung von (4.9) ist. ■

**Beispiel 4.20** Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^{2t} + t^3. \quad (4.12)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung ist  $x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = 0$  und die Eigenwerte findet man durch

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Also  $\lambda = 1$  und  $\lambda = -1$  sind die Eigenwerte und beide haben algebraische Vielfachheit 2 (und geometrische Vielfachheit 1). Das liefert

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Eine spezielle Lösung für (4.12) findet man durch  $x = y_1$  mit

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} (t-s) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + e^{2s} \end{pmatrix} ds.$$

Die explizite Berechnung ist ohne C.A.S. sehr intensiv. Man kann auch versuchen zu raten! Wenn man  $\tilde{x}_a(t) = e^{2t}$  versucht, findet man  $\tilde{x}_a''''(t) - 2\tilde{x}_a''(t) + \tilde{x}_a(t) = (16 - 8 + 1)e^{2t}$  und das passt nicht. Die Funktion  $x_a(t) = \frac{1}{9}e^{2t}$  geht schon besser:

$$x_a''''(t) - 2x_a''(t) + x_a(t) = e^{2t}$$

Mit ein paar Polynomversuchen findet man für  $x_b(t) = t^3 + 12t$ , dass  $x_b''''(t) - 2x_b''(t) + x_b(t) = t^3$ . Die schöne Linearitätseigenschaft liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{hom}}(t) + x_a(t) + x_b(t) = \\ &= x_a(t) + x_b(t) + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

als allgemeine Lösung für (4.12).

**Beispiel 4.21** Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^t. \quad (4.13)$$

Alles verläuft fast so wie vorher. Bloß für eine spezielle Lösung der Form  $ce^t$  besteht keine Hoffnung, weil  $e^t$  schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Sogar  $te^t$  liefert 0 an der rechten Seite. Man hat dann aber Erfolg beim Versuch mit  $ct^2e^t$ :

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = c(t^2 + 8t + 12)e^t - 2c(t^2 + 4t + 2)e^t + ct^2e^t = 9ce^t.$$

Man nehme  $c = \frac{1}{9}$ . Die allgemeine Lösung ist  $x(t) = \frac{1}{9}t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t}$  mit  $c_i \in \mathbb{R}$ .

**Algorithmus 4.1** Raten statt Rechnen für eine spezielle Lösung von

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = f(t).$$

Wenn  $f$  keine Lösung der homogenen Gleichung ist:

Sei $f = \dots$ , dann versuche man für $x = \dots$	
$t^m$	$\sum_{k=0}^m c_k t^k$
$e^{\gamma t}$	$ce^{\gamma t}$
$\sin(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$\cos(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$t^m e^{\gamma t}$	$\sum_{k=0}^m c_k t^k e^{\gamma t}$
$\vdots$	$\vdots$

Wenn  $f$  eine Lösung der homogenen Gleichung ist, versuche man  $t^{m_1}\tilde{x}(t)$ , bei dem man jetzt  $\tilde{x}$  aus der rechten Seite der Tabelle nimmt und  $m_1$  geschickt wählt.



# Analysis 2, Woche 5

## Differentialgleichungen III



### 5.1 Linear, erste Ordnung, variable Koeffizienten

Gemeint sind Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = g(t)x(t) + f(t). \quad (5.1)$$

Wir nehmen an  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig.

Substituiert man  $y(t) = e^{-G(t)}x(t)$ , wo  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  ist, dann folgt

$$y'(t) = e^{-G(t)}x'(t) - g(t)e^{-G(t)}x(t),$$

und aus der ursprünglichen Differentialgleichung wird

$$y'(t) = e^{-G(t)}f(t). \quad (5.2)$$

Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass man jede Lösung von (5.2) findet durch  $y = y_0 + c$  mit  $y_0$  eine Stammfunktion der rechten Seite von (5.2) und  $c \in \mathbb{R}$ . Er liefert uns folgendes Ergebnis:

**Lemma 5.1** Sei  $I \in \mathbb{R}$  ein Intervall und seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen.

- Es existieren Lösungen  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  von (5.1).
- Wenn  $x_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (5.1) ist und  $x_h : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-triviale Lösung vom dazugehörigen homogenen Problem  $x'_h(t) = g(t)x_h(t)$ , dann ist  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x(t) = x_0(t) + cx_h(t) \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung von (5.1).

**Bemerkung 5.1.1** Man nennt eine Klasse von Funktionen 'die allgemeine Lösung', wenn alle solche Funktionen die Differentialgleichung lösen, und wenn jede Lösung in dieser Klasse vorkommt.

Wir beschreiben nochmals ausgiebiger den Algorithmus, wie man eine mehr oder weniger explizite Lösung von (5.1) konstruieren kann.

**Algorithmus 5.1** Gegeben sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und man sucht eine Lösung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von

$$x'(t) = g(t)x(t) + f(t).$$

1. Schreibe das homogene Problem:

$$x'_h(t) = g(t)x_h(t),$$

und löse das homogene Problem:

$$x_h(t) = e^{\int_a^t g(s)ds} c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

2. Benutze die folgende Substitution für das eigentliche Problem:

$$x(t) = e^{\int_a^t g(s)ds} c(t), \quad (5.3)$$

(Variation der Konstante) und schreibe die neue Dgl. für  $c$ :

$$e^{\int_a^t g(s)ds} c'(t) = f(t).$$

Löse die Dgl. für  $c$ .

3. Kombiniere  $c(t)$  und (5.3) zu einer Lösung<sup>1</sup> für das eigentliche Problem.

**Bemerkung 5.1.2** Man könnte in Lemma 5.1 auch schreiben: die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = ce^{\int_a^t g(s)ds} + \int_a^t e^{\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Es ist aber nicht jedermanns Sache, diese Formel für einen längeren Zeitraum einwandfrei zu speichern. Die Struktur, die hinter diesem Algorithmus steckt, kann man sich aber merken.

**Beispiel 5.2** Wir betrachten

$$u'(x) = -2xu(x) + 1.$$

Die homogene Gleichung ist  $u'_h(x) = -2xu_h(x)$  und wir finden

$$u_h(x) = e^{-x^2} c.$$

Durch Variation der Konstante, das heißt, durch Verwendung der Substitution  $u(x) = e^{-x^2} c(x)$ , vereinfacht sich die Differentialgleichung via

$$-2xe^{-x^2} c(x) + e^{-x^2} c'(x) = -2xe^{-x^2} c(x) + 1$$

---

<sup>1</sup>Man hat für  $c$

$$c(t) = c_0 + \int_a^t e^{-\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau$$

und damit bekommt man für die Lösungen des eigentlichen Problems:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_a^t g(s)ds} c(t) = e^{\int_a^t g(s)ds} \left( c_0 + \int_a^t e^{-\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau \right) = \\ &= c_0 e^{\int_a^t g(s)ds} + \int_a^t e^{\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Diese Formeln soll man nicht auswendig lernen. Sie illustrieren den Lösungsweg und diesen Weg soll man kennen.

zu der Gleichung

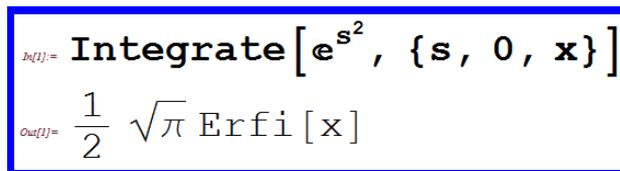
$$c'(x) = e^{x^2}.$$

Man findet  $c(x) = c_1 + \int_0^x e^{s^2} ds$  und bekommt als Lösungen:

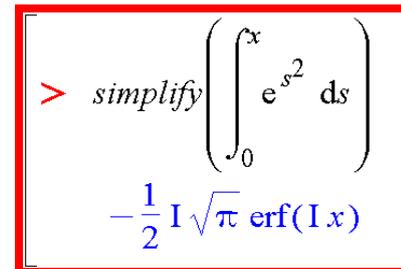
$$u(x) = e^{-x^2} \left( c_1 + \int_0^x e^{s^2} ds \right),$$

wobei man beliebige  $c_1 \in \mathbb{R}$  nehmen darf.

Kann man  $\int_0^x e^{s^2} ds$  schreiben ohne Integral, das heißt, gibt es eine explizite Formel für die Stammfunktion mithilfe bekannter Funktionen? Wenn wir Mathematica oder Maple fragen bekommt man:



In[1]:= Integrate[e^{s^2}, {s, 0, x}]  
Out[1]:=  $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{Erfi}[x]$



> simplify  $\left( \int_0^x e^{s^2} ds \right)$   
 $-\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(x)$

Anscheint es nur mit zusätzlich definierten Funktionen.

## 5.2 Nicht-linear, konstruktiv lösbar, erster Ordnung

Außer lineare Differentialgleichungen lassen sich nur wenige explizit lösen. Ein paar berühmte Typen wollen wir hier vorstellen.

### 5.2.1 Trennbare Differentialgleichungen

Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

**Definition 5.3** Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(x(t)) g(t), \quad (5.4)$$

heißt **trennbar**.

Wir schauen uns das Anfangswertproblem an:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

und wir nehmen an, dass  $f$  und  $g$  stetig sind.

Wenn  $f(x_0) = 0$  gilt, dann ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x(t) = x_0$  eine Lösung.

Wenn  $f(x_0) \neq 0$  gilt, dann gilt wegen der Stetigkeit von  $f$  und von  $x$ , dass  $f(x(t)) \neq 0$  für  $t$  nahe bei  $t_0$ . Weil  $f(x(t)) \neq 0$ , kann man schreiben

$$\frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t). \quad (5.5)$$

Kennen wir Stammfunktionen sowohl für  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  als auch für  $t \mapsto g(t)$ , und nennen wir sie  $H$  und  $G$ , dann kann man (5.5) schreiben als

$$(H(x(t)))' = G'(t).$$

Denn es gilt  $(H(x(t)))' = H'(x(t)) x'(t) = \frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t) = G'(t)$ . Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt

$$H(x(t)) = G(t) + c \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

Wenn wir außerdem  $H$  invertieren können<sup>2</sup>, folgt

$$x(t) = H^{\text{inv}}(G(t) + c).$$

Die Konstante  $c$  ist so zu wählen, dass  $x(t_0) = H^{\text{inv}}(G(t_0) + c) = x_0$ .

**Beispiel 5.4** Die logistische Gleichung  $u'(t) = u(t)(1 - u(t))$ . Neben beiden konstanten Lösungen  $u(t) = 0$  und  $u(t) = 1$  liefert die Trennung, dass

$$\frac{u'(t)}{u(t)(1 - u(t))} = 1.$$

Weil

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} \right) du = \ln|u| - \ln|u-1| + c_1 = \ln \left| \frac{u}{u-1} \right| + c_1$$

und  $\int 1 dt = t + c_2$ ,

finden wir ( $c = c_2 - c_1$  ohne Verlust der Allgemeinheit)

$$\ln \left| \frac{u(t)}{u(t)-1} \right| = t + c.$$

Dann gilt

$$\frac{u(t)}{u(t)-1} = \pm e^{t+c} = \pm e^c e^t = \tilde{c} e^t \text{ mit } \tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Via  $u(t) = \tilde{c} e^t (u(t) - 1)$  folgt  $(1 - \tilde{c} e^t) u(t) = -\tilde{c} e^t$  und

$$u(t) = \frac{\tilde{c} e^t}{\tilde{c} e^t - 1} = \frac{e^t}{e^t - \frac{1}{\tilde{c}}},$$

oder noch anders geschrieben:

$$u(t) = \frac{e^t}{e^t - \hat{c}} \text{ mit } \hat{c} \in \mathbb{R}.$$

Wir dürfen  $\hat{c} = 0$  zulassen, weil  $u(t) = 1$  auch eine Lösung ist. Zu dieser Vorschrift kann man sich das Existenzintervall ausdenken und mit  $u(t) = 0$  hat man genau die Lösungen aus Beispiel 3.1.

<sup>2</sup>Man kann zum Beispiel  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H(x) = x + e^x$  invertieren, weil  $H$  monoton und surjektiv ist. Wir kennen aber keine explizite Formel für  $H^{\text{invers}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit unseren Standardfunktionen.

Die Funktion  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H(x) = x^2$  dagegen lässt sich nur invertieren, wenn man sie einschränkt auf  $\mathbb{R}_0^+$  oder  $\mathbb{R}_0^-$ . Dann müssten wir, statt  $H^{\text{invers}}$ , die Funktionen  $(H|_{[0,\infty)})^{\text{invers}}$  und  $(H|_{(-\infty,0]})^{\text{invers}}$  getrennt betrachten:

$$(H|_{[0,\infty)})^{\text{invers}}(y) = \sqrt{y} \text{ und } (H|_{(-\infty,0]})^{\text{invers}}(y) = \sqrt{-y}.$$

**Beispiel 5.5** Wir betrachten

$$x'(t) = -t\sqrt[3]{x(t)} \quad (5.6)$$

und finden nach der Trennung, angenommen  $x(t) \neq 0$ , dass

$$\frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)}} = -t.$$

Weil für  $x > 0$  gilt

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c_1,$$

und für  $x < 0$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = - \int (-x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{2}{3}} + c_2,$$

findet man

$$\frac{3}{2}|x(t)|^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}t^2 + \tilde{c} \text{ mit } \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Das heißt, mit  $c = \frac{2}{3}\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$  finden wir

$$x(t) = \pm \left(c - \frac{1}{3}t^2\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.7)$$

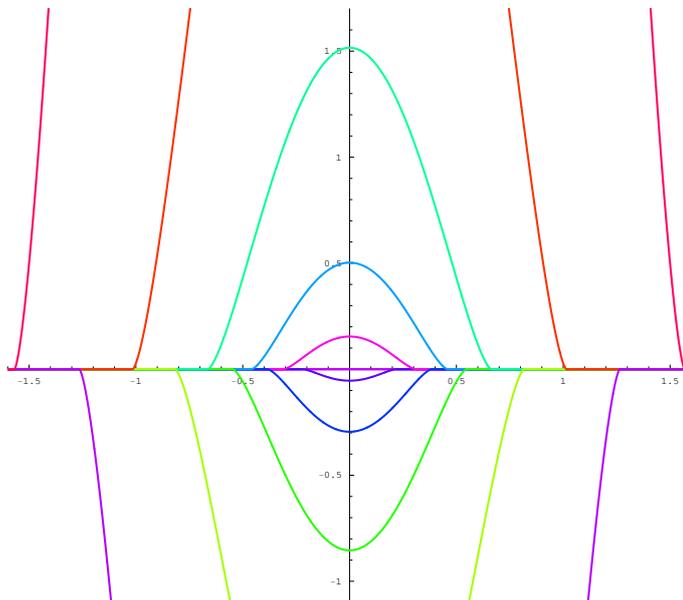
Dieser Ausdruck ist aber nur definiert für  $t \in \left[-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}\right]$ . Wenn man die Funktionen  $x : \left[-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}\right]$  mit  $x(t)$  wie in (5.7) durch 0 fortsetzt außerhalb dieses Intervalls, bekommt man für jedes  $c \in [0, \infty)$  zwei Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x(t) = \begin{cases} (c - 3t^2)^{\frac{3}{2}} & \text{für } t \in \left[-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}\right], \\ 0 & \text{für } t \notin \left[-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}\right], \end{cases}$$

und

$$x(t) = \begin{cases} -(c - 3t^2)^{\frac{3}{2}} & \text{für } t \in \left[-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}\right], \\ 0 & \text{für } t \notin \left[-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}\right]. \end{cases}$$

Man sieht, dass mehrere Lösungen durch den gleichen Punkt gehen. In der Vorlesung 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' wird man sehen, dass solches nur geschehen kann, wenn die rechte Seite von (5.6) als Funktion von  $x$ , also  $x \mapsto -t\sqrt[3]{x}$ , nicht differenzierbar ist.



## 5.2.2 Homogene Differentialgleichungen

bedeuten jetzt leider etwas anderes als vorher bei den linearen Gleichungen. Gemeint ist hier folgendes:

**Definition 5.6** *Homogene Differentialgleichungen haben die Form*

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right). \quad (5.8)$$

Die Substitution  $x(t) = y(t)/t$  führt zurück zu einer trennbaren Differentialgleichung. Weil  $y(t) = tx(t)$  hat man  $y'(t) = x(t) + tx'(t)$ , die Differentialgleichung wird

$$x(t) + tx'(t) = f(x(t))$$

und sie lässt sich auch schreiben als

$$x'(t) = (f(x(t)) - x(t)) \frac{1}{t}.$$

Diese letzte Differentialgleichung ist trennbar.

**Beispiel 5.7** *Betrachten wir*

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x + u(x)}.$$

Weil man diese Differentialgleichung auch schreiben kann als

$$u'(x) = \frac{\frac{u(x)}{x}}{1 + \frac{u(x)}{x}},$$

ist sie homogen. Man substituiert  $y(x) = u(x)/x$  und findet

$$xy'(x) + y(x) = \frac{y(x)}{1 + y(x)}.$$

Umschreiben und Trennen liefert, wenn  $y \neq 0$ ,

$$\frac{y'(x)}{\frac{y(x)}{1+y(x)} - y(x)} = \frac{1}{x}$$

oder vereinfacht

$$\frac{1 + y(x)}{(y(x))^2} y'(x) = \frac{-1}{x}. \quad (5.9)$$

Um diese Differentialgleichung weiter lösen zu können, braucht man eine Stammfunktion für

$$f : y \mapsto \frac{1 + y}{y^2}.$$

So eine Stammfunktion ist  $F(y) = \frac{-1}{y} + \log(y)$ . Die Lösungen von (5.9) erfüllen also

$$\frac{-1}{y(x)} + \log |y(x)| = -\log |x| + c.$$

Geht man zurück zu  $u(x)$ , folgt  $\frac{-x}{u(x)} + \log |u(x)| = c$  und das heißt

$$x = u(x) (\log |u(x)| - c). \quad (5.10)$$

Man hat zwar keine explizite Formel für die Lösungen bekommen, aber eine für die Inversen. Übrigens haben wir unterwegs  $y = 0$  rauswerfen müssen. Man kontrolliert leicht, dass das dazugehörige  $u$ , nämlich  $u(x) = 0$  eine Lösung ist, die nicht in (5.10) vorkommt.

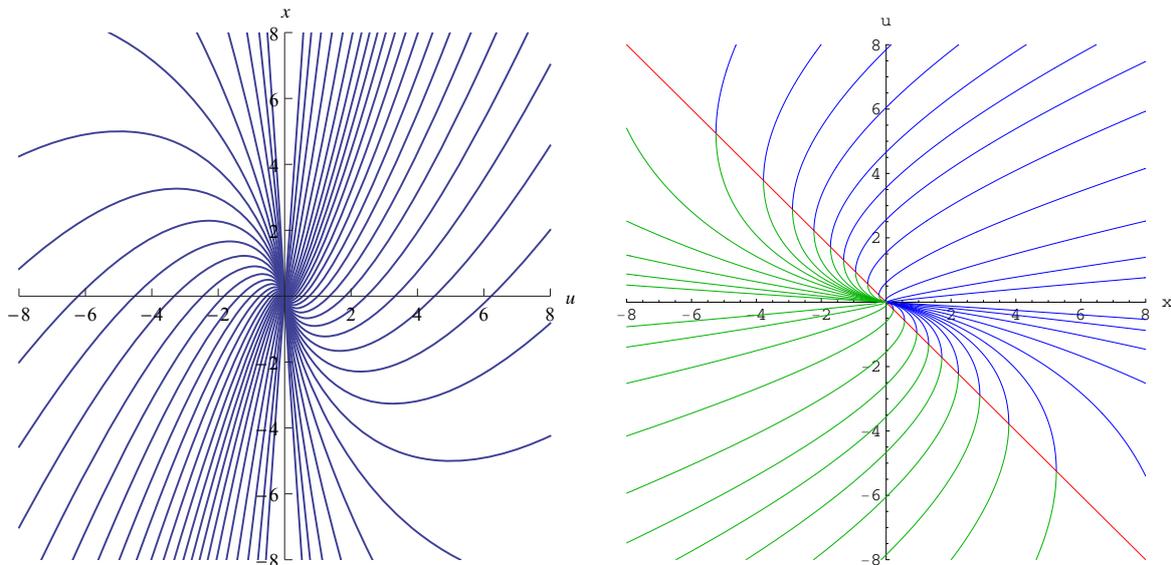


Abbildung 5.1: Diese Bilder der Lösungen zu Beispiel 5.7 sind gemacht worden mithilfe der Inversen von  $u$ . Man soll bemerken, dass für  $u + x = 0$  nicht nur keine Differentialgleichung definiert ist, sondern genau da die Existenzintervalle der Lösungen aufhören. Links stehen die Funktionen  $u \mapsto x$ , das heißt  $x = f_c(u)$  mit  $f_c(u) = u(\log(|u|) - c)$ ; rechts die Lösungen  $x \mapsto u_c(x)$ . Auf der Linie  $u = -x$  treffen zwei verschiedene Lösungen zusammen, die in der Skizze auch unterschiedlich eingefärbt sind.

### 5.2.3 Differentialgleichungen von Bernoulli und Riccati

**Definition 5.8** Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\gamma \quad (5.11)$$

mit  $\gamma \notin \{0, 1\}$  heißt **Bernoulli-Gleichung**.

Für  $\gamma \in \{0, 1\}$  ist sie linear. Wenn man die Substitution  $y(t) = (x(t))^p$  versucht, hat man  $y'(t) = p(x(t))^{p-1}x'(t)$  und findet

$$p(x(t))^{p-1}x'(t) = a(t)(x(t))^p + b(t)(x(t))^{p\gamma}$$

und das lässt sich schreiben als

$$x'(t) = \frac{1}{p}a(t)x(t) + \frac{1}{p}b(t)(x(t))^{p(\gamma-1)+1}.$$

Wenn  $p(\gamma - 1) + 1 = 0$ , das heißt  $p = \frac{1}{1-\gamma}$ , wird die Gleichung

$$x'(t) = (1 - \gamma)a(t)x(t) + (1 - \gamma)b(t)$$

und die ist linear.

**Definition 5.9** Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^2 + f(t) \quad (5.12)$$

heißt **Riccati-Gleichung**.

Einen konstruktiven Lösungsalgorithmus gibt es hier nicht. Nur wenn man zufälligerweise eine Lösung hat, kann man alle anderen finden. Das läuft wie folgt.

Sei  $\tilde{y}$  eine Lösung. Dann verwendet man die Substitution  $y(t) = \tilde{y}(t) + x(t)$  und findet

$$\tilde{y}'(t) + x'(t) = a(t)(\tilde{y}(t) + x(t)) + b(t)(\tilde{y}(t) + x(t))^2 + f(t).$$

Weil  $\tilde{y}'(t) = a(t)\tilde{y}(t) + b(t)(\tilde{y}(t))^2 + f(t)$  gilt, kann man diese Differentialgleichung vereinfachen zu einer vom Bernoulli-Typ:

$$x'(t) = (a(t) + 2b(t)\tilde{y}(t))x(t) + b(t)(x(t))^2.$$

## 5.2.4 Exakte Differentialgleichungen

machen auf den ersten Blick einen etwas perversen Eindruck. Schauen wir uns als Beispiel die Kreise mit  $(0, 0)$  als Mittelpunkt an:

$$K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Die halben Bögen lassen sich beschreiben mit Funktionen  $y : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  oder  $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ . Für beide Möglichkeiten gilt

$$x^2 + (y(x))^2 = R^2.$$

Wenn man differenziert, folgt die Differentialgleichung

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Jetzt vergessen wir die Ableitung und fragen nach den Lösungen der Differentialgleichung

$$x + y(x)y'(x) = 0.$$

Um diese zu lösen muss man 'rückwärts' denken.

**Definition 5.10** Eine Differentialgleichung heißt **exakt**, wenn es eine Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gibt derart, dass diese Differentialgleichung aussieht wie

$$\left(F(x, y(x))\right)' = 0. \quad (5.13)$$

Später werden wir zeigen, wie man so eine exakte Differentialgleichung erkennen kann. Wenn man sie erkannt hat, hat man eine implizite Gleichung für die Lösungen:

$$F(x, y(x)) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

## 5.3 Eine geometrische Anwendung

**Beispiel 5.11** Die Ellipsen mit dem Zentrum  $(0, 0)$  und Ratio  $x$ -Achse zu  $y$ -Achse  $\sqrt{2}$  werden beschrieben durch  $\{E_c\}_{c \in \mathbb{R}^+}$  mit  $E_c = \{(x, y); 2x^2 + y^2 = c\}$ . Welche Kurven schneiden diese Ellipsen orthogonal?

Wenn man die halben Bögen dieser Ellipsen durch Funktionen  $y = y(x)$  darstellen lässt, also

$$y(x) = \pm\sqrt{c - 2x^2},$$

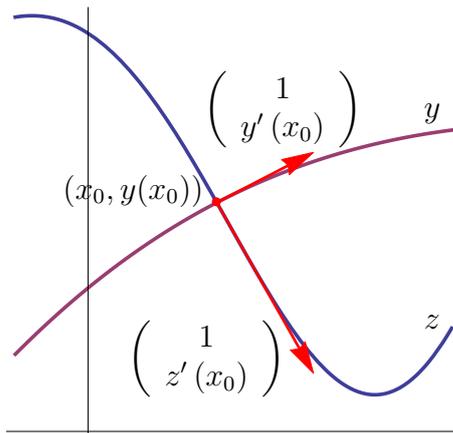
findet man

$$2x^2 + y(x)^2 = c.$$

Das heißt, sie erfüllen die exakte Differentialgleichung

$$0 = (2x^2 + y(x)^2)' = 4x + 2y(x)y'(x). \quad (5.14)$$

**Intermezzo.** Schauen wir uns mal kurz an, was passiert, wenn zwei differenzierbare Funktionen  $x \mapsto y(x)$  und  $x \mapsto z(x)$  sich orthogonal schneiden. Dann gilt an der Schnittstelle folgendes:



$$\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z'(x_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Orthogonal schneiden an der Stelle  $x_0$  bedeutet also, dass

$$\begin{cases} y(x_0) = z(x_0) \text{ und} \\ y'(x_0)z'(x_0) = -1. \end{cases} \quad (5.15)$$

Bei unseren Ellipsen finden wir durch Kombination von (5.14) und (5.15) die Differentialgleichung

$$4x_0 + 2z(x_0) \frac{-1}{z'(x_0)} = 0$$

Eine Funktion, die überall die obigen Ellipsen orthogonal schneidet, erfüllt so die folgende Differentialgleichung:

$$4x + 2z(x) \frac{-1}{z'(x)} = 0. \quad (5.16)$$

Das heißt,

$$z'(x) = \frac{1}{2x} z(x)$$

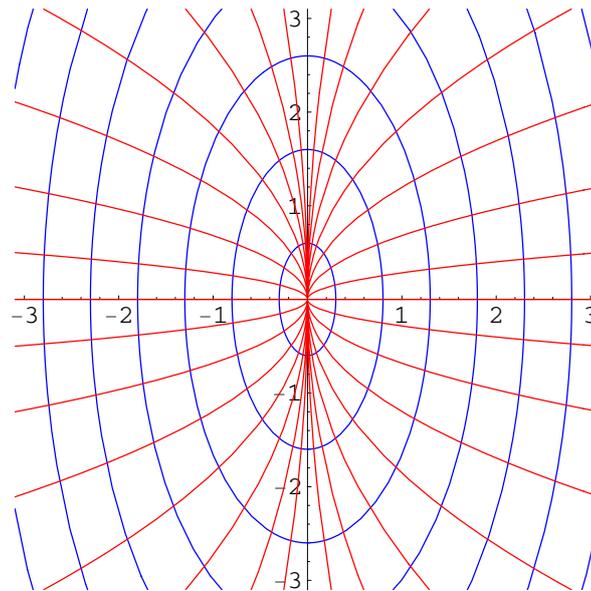
und diese Differentialgleichung hat genau die Lösungen

$$z(x) = ce^{\frac{1}{2} \ln|x|} = c\sqrt{|x|} \text{ für } c \in \mathbb{R},$$

präziser gesagt: für  $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z &: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } z(x) = c\sqrt{x}, \\ z &: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } z(x) = c\sqrt{-x}. \end{aligned}$$

Auf diese Art haben wir nur Funktionen  $z = z(x)$  bekommen, deren Spuren die Ellipsen orthogonal schneiden. Selbstverständlich kann man andere Parametrisierungen verwenden, die ähnliche Spuren haben. Eine Spur fehlt trotzdem: Weil wir Funktionen  $z = z(x)$  gesucht haben, fehlt  $x = 0$ .



**Definition 5.12** Seien  $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar nach  $x$  und nach  $y$ , und derart, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\alpha(x, y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\alpha(x, y)\right)^2 \neq 0 \text{ und } \left(\frac{d}{dx}\beta(x, y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\beta(x, y)\right)^2 \neq 0 \quad (5.17)$$

Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{A_c\}_{c \in I} & \text{mit } A_c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha(x, y) = c\} \text{ und} \\ \mathcal{B} &:= \{B_c\}_{c \in J} & \text{mit } B_c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \beta(x, y) = c\} \end{aligned}$$

heißen orthogonale Familien von Trajektorien in  $\mathbb{R}^2$ , wenn folgendes gilt:

1. Sowohl  $\{A_c\}_{c \in I}$ , als auch  $\{B_c\}_{c \in J}$ , fllt  $\mathbb{R}^2$  eindeutig.
2. Wenn sich eine Trajektorie  $A_{c_1}$  und eine Trajektorie  $B_{c_2}$  schneiden in  $(x_0, y_0)$ , dann gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\alpha(x_0, y_0) \\ \frac{d}{dy}\alpha(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\beta(x_0, y_0) \\ \frac{d}{dy}\beta(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.18)$$

Oft lässt man isolierte Stellen zu als Ausnahme bei (5.17) und bei Bedingung 1.

Die Gleichung in (5.18) bedeutet, dass Kurven für  $\mathcal{A}$  und Kurven für  $\mathcal{B}$  sich orthogonal schneiden. Das sieht man wie folgt, wenn  $x \mapsto y_1(x)$  und  $x \mapsto y_2(x)$  differenzierbare Funktionen sind, die lokal  $A_{c_1}$  und  $B_{c_2}$  beschreiben. Die Funktion  $x \mapsto y_1(x)$  beschreibt  $A_{c_1}$  lokal, wenn

$$\alpha(x, y_1(x)) = c_1.$$

Angenommen, sie schneiden sich in  $(x_0, y_0)$ , dann gilt  $y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0)$  und außerdem

$$0 = \left(\frac{d}{dx}\alpha(x, y_1(x))\right)_{|x=x_0} = \frac{d}{dx}\alpha(x_0, y_0) + y_1'(x_0) \frac{d}{dy}\alpha(x_0, y_0) \quad (5.19)$$

und

$$0 = \left(\frac{d}{dx}\beta(x, y_2(x))\right)_{|x=x_0} = \frac{d}{dx}\beta(x_0, y_0) + y_2'(x_0) \frac{d}{dy}\beta(x_0, y_0). \quad (5.20)$$

Die Graphiken der Funktionen  $x \mapsto y_1(x)$  und  $x \mapsto y_2(x)$  schneiden sich senkrecht in  $x_0$ , wenn

$$1 + y_1'(x_0) y_2'(x_0) = 0. \quad (5.21)$$

Mit (5.19) und (5.20) folgt

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dx} \alpha(x_0, y_0) \right) \left( \frac{d}{dx} \beta(x_0, y_0) \right) + \left( \frac{d}{dy} \alpha(x_0, y_0) \right) \left( \frac{d}{dy} \beta(x_0, y_0) \right) \\ &= \left( \frac{d}{dy} \alpha(x_0, y_0) \right) \left( \frac{d}{dy} \beta(x_0, y_0) \right) (1 + y_1'(x_0) y_2'(x_0)) \end{aligned}$$

und (5.21) impliziert (5.18). Umgekehrt, wenn (5.18) gilt, dann folgt aus (5.17) und (5.19), dass  $\frac{d}{dy} \alpha(x_0, y_0) \neq 0$  und wegen (5.17) und (5.20), dass  $\frac{d}{dy} \beta(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann folgt aus (5.18), dass (5.21) gilt.

Man kann Ähnliches auch zeigen für allgemeine glatte Kurven  $t \mapsto k_1(t)$  und  $t \mapsto k_2(t)$ , die  $A_{c_1}$  und  $B_{c_2}$  beschreiben.

**Beispiel 5.13**  $\{A_c\}_{c \in (-2, \infty)}$  mit

$$A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 + 2 \cos x = c\}$$

und  $\{B_c\}_{c \in \mathbb{R}} \cup \{x = (1 + 2k)\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  mit

$$B_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = c \cot(\frac{1}{2}x)\}$$

sind orthogonale Familien von Trajektorien in  $\mathbb{R}^2$ .

Die Differentialgleichung zu  $A_c$  für Funktionen  $x \mapsto y(x)$  ist

$$2y(x)y'(x) - 2 \sin x = 0.$$

Die Differentialgleichung zu  $B_c$  für Funktionen  $x \mapsto z(x)$  bekommt man wie folgt:

$$z(x) = c \cot(\frac{1}{2}x) \Leftrightarrow z(x) \tan(\frac{1}{2}x) = c.$$

Differenziert man diesen letzten Ausdruck, so findet man

$$z'(x) \tan(\frac{1}{2}x) + z(x) \frac{1}{2 \cos(\frac{1}{2}x)^2} = 0.$$

Man kann die beiden Differentialgleichungen vereinfachen zu

$$y'(x) = \frac{\sin x}{y(x)}$$

und, wenn man  $2 \sin(\frac{1}{2}x) \cos(\frac{1}{2}x) = \sin(x)$  benutzt, zu

$$z'(x) = \frac{-z(x)}{\sin x}.$$

Wenn Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen sich schneiden, das heißt  $y(x) = z(x)$ , sieht man, dass  $y'(x)z'(x) = -1$  gilt.

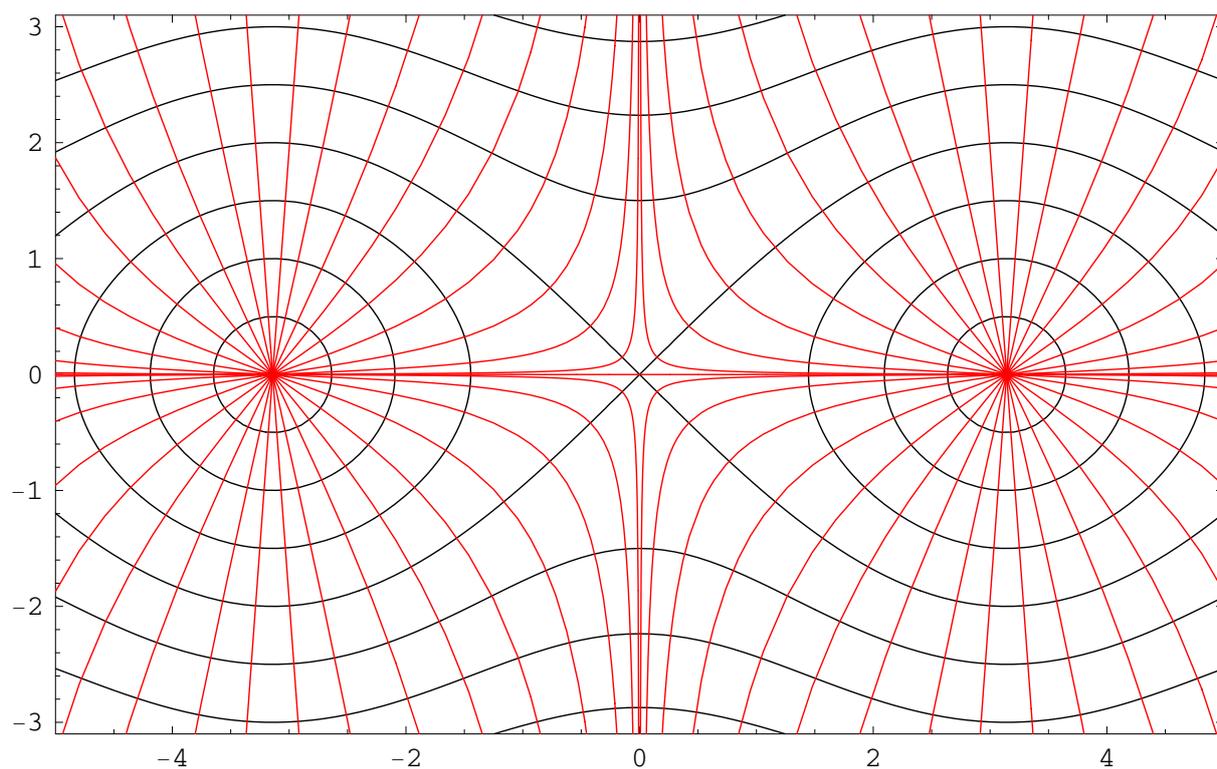


Abbildung 5.2: Die  $A_c$  und  $B_c$  aus Beispiel 5.13 kann man mit Graphen von Funktionen darstellen. Für  $B_c$  findet man  $y = c \cot\left(\frac{1}{2}x\right)$  (rot dargestellt) und für  $A_c$  die Vorschriften  $y = \pm\sqrt{c - 2 \cos x}$  (in schwarz).

# Analysis 2, Woche 6

# A2

## Grundbegriffe I

### 6.1 Topologische Begriffe

Wenn man offene Teilmengen von  $\mathbb{R}$  betrachtet, landet man meistens bald bei Intervallen. Das Intervall  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$  haben wir offen genannt. Ein Intervall  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$  nannten wir abgeschlossen und dann gab es noch  $(a, b]$  und  $[a, b)$ .

In mehreren Dimensionen kann man sich ‘wildere’ Mengen vorstellen und man möchte genau definierte Begriffe haben. Das einfachste Analogon in höheren Dimensionen für ein offenes Intervall ist die **offene Kugel**  $B_r(a)$ :

**Notation 6.1** Für  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  setzt man

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}.$$

Die Kugel  $B_r(a)$  hat Radius  $r$  und Mittelpunkt  $a$ .

Man verwendet diese Kugeln, um ‘offen’ allgemeiner zu definieren.

**Definition 6.2** Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  nennt man **offen**, wenn es für jedes  $a \in A$  eine offene Kugel  $B_r(a)$  gibt derart, dass  $B_r(a) \subset A$ .

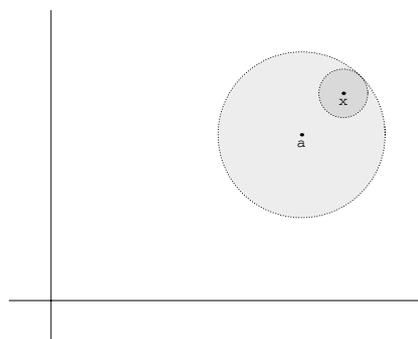
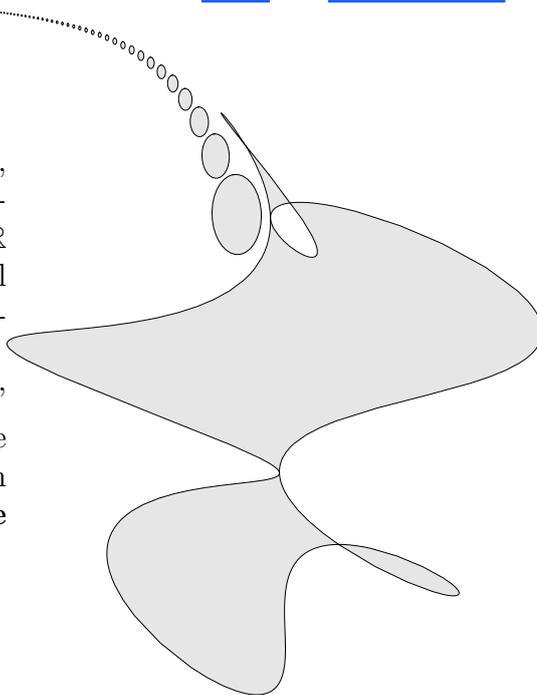
**Definition 6.3** Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  nennt man **abgeschlossen**, wenn  $\mathbb{R}^n \setminus K$  offen ist.

**Bemerkung 6.3.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Menge  $A \subset U$  nennt man **relativ offen** bezüglich  $U$ , wenn es für jedes  $a \in A$  ein  $r > 0$  gibt mit  $\{x \in U; \|x - a\| < r\} \subset A$ . Eine Menge  $K \subset U$  nennt man **relativ abgeschlossen** bezüglich  $U$ , wenn  $U \setminus K$  relativ offen bezüglich  $U$  ist.

Statt  $\mathbb{R}^n \setminus K$  schreibt man auch  $K^c$ , wobei  $c$  vom Englischen ‘complement’ kommt.

Die erste Frage, die man sich stellen sollte, ist, ob die offene Kugel auch offen ist. ‘Offene Kugel’ ist ja bereits vor ‘offen’ definiert worden. Erfreulicherweise ist die offene Kugel tatsächlich offen, denn wenn man  $x \in B_r(a)$  nimmt, gilt  $B_s(x) \subset B_r(a)$  für

$$s = r - \|x - a\| > 0.$$



Die Definition besagt, dass die leere Menge  $\emptyset$  und ganz  $\mathbb{R}^n$  offene Mengen sind. Weil  $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$  gilt, sind  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  auch abgeschlossene Mengen. Es sind die einzigen Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

**Lemma 6.4** *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

*Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

**Beweis.** • Seien  $A_i$  mit  $i \in I$  offene Mengen und  $x \in A := \bigcup_{i \in I} A_i$ . Dann gibt es ein  $i_1 \in I$  mit  $x \in A_{i_1}$  und für irgendein  $r > 0$  gilt  $B_r(x) \subset A_{i_1}$ . Wegen  $A_{i_1} \subset A$  gilt auch  $B_r(x) \subset A$ .

• Wenn  $\tilde{A} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$  und  $x \in \tilde{A}$ , dann gilt  $x \in A_i$  für  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Weil  $A_i$  offen ist, gibt es  $r_i > 0$  derart, dass  $B_{r_i}(x) \subset A_i$ . Für  $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  gilt  $r > 0$  und  $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset A_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  also auch  $B_r(x) \subset \tilde{A}$ . ■

Wenn man verwendet, dass

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c,$$

folgt sofort:

**Korollar 6.5** *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

*Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

**Definition 6.6** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine *Umgebung* von  $a$ , wenn es eine offene Kugel  $B_r(a)$  gibt derart, dass  $B_r(a) \subset U$ .

**Definition 6.7** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ .

- $a$  heißt ein **innerer Punkt** von  $A$ , wenn es mindestens eine Umgebung  $U$  von  $a$  gibt mit  $U \subset A$ . Man schreibt  $A^\circ$  für die **Menge der inneren Punkte** von  $A$ .
- $a$  heißt ein **äußerer Punkt** von  $A$ , wenn es mindestens eine Umgebung  $U$  von  $a$  gibt mit  $U \subset A^c$ .
- $a$  heißt ein **Randpunkt** von  $A$ , wenn jede Umgebung  $U$  von  $a$  einen Punkt von  $A$  und einen Punkt von  $A^c$  enthält. Man schreibt  $\partial A$  für die **Menge der Randpunkte** von  $A$ .

**Definition 6.8** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Die **abgeschlossene Hülle**  $\bar{A}$  von  $A$  wird definiert durch  $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$ .

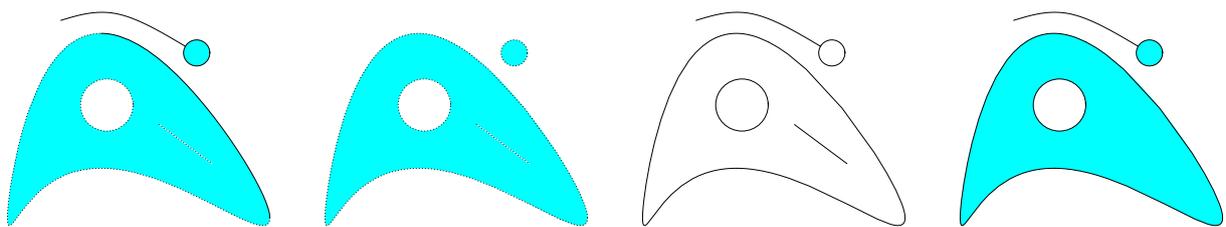


Abbildung 6.1: Skizzen zu  $A$ ,  $A^\circ$ ,  $\partial A$  und  $\bar{A}$ .

**Bemerkung 6.8.1** Die drei Typen von Punkten in Definition 6.7 schließen sich gegenseitig aus und füllen ganz  $\mathbb{R}^n$  aus. Genauer gesagt mit  $A^{\text{co}} := (A^c)^\circ$ , der Menge der äußeren Punkte hat man:

$$A^\circ \cap \partial A = \emptyset, \quad A^{\text{co}} \cap \partial A = \emptyset \quad \text{und} \quad A^\circ \cap A^{\text{co}} = \emptyset, \quad (6.1)$$

$$A^\circ \cup \partial A \cup A^{\text{co}} = \mathbb{R}^n. \quad (6.2)$$

Wenn  $A$  offen ist, dann ist jedes  $a \in A$  ein innerer Punkt und es gilt  $A^\circ = A$ .

**Lemma 6.9** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

1.  $A^\circ$  ist offen;
2.  $\partial A = \partial(A^c)$  ist abgeschlossen;
3.  $\bar{A} = (A^{\text{co}})^c$  ist abgeschlossen.

**Bemerkung 6.9.1** Wenn  $A$  abgeschlossen ist, ist  $A^c$  offen und es folgt

$$A = (A^c)^c = (A^{\text{co}})^c = \bar{A}.$$

**Beweis.** 1. Für jedes  $a \in A^\circ$  gibt es mindestens eine Umgebung  $U$  von  $a$  mit  $U \subset A$  und so auch ein  $r > 0$  derart, dass  $B_r(a) \subset U \subset A$ .

2.  $\partial A = \partial(A^c)$  folgt aus der Symmetrie der Definition bezüglich  $A$  und  $A^c$ . Weil  $\partial A = (A^\circ \cup A^{\text{co}})^c$  gilt, und  $A^\circ$  und  $A^{\text{co}}$  offen sind, ist  $\partial A$  abgeschlossen.

3. Mit (6.2) und (6.1) folgt  $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = (A^{\text{co}})^c$ . ■

Mit Definition 6.7 folgt, dass  $A^\circ \subset A$  und  $A^{\text{co}} \subset A^c$ . Schaut man die Komplemente an, dann folgt  $\bar{A} = A^{\text{coc}} \supset A^{\text{cc}} = A$ . Man hat:

$$A^\circ \subset A \subset \bar{A} \quad \text{und} \quad A \setminus A^\circ, \bar{A} \setminus A \subset \partial A.$$

Es gibt noch zwei Sorten Punkte, die wir brauchen werden.

**Definition 6.10** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ .

- $a$  heißt ein **Häufungspunkt** von  $A$ , wenn jede Umgebung  $U$  von  $a$  unendlich viele Punkte aus  $A$  enthält.
- $a$  heißt ein **isolierter Punkt** von  $A$ , wenn  $a \in A$  gilt und es mindestens eine Umgebung  $U$  von  $a$  gibt mit  $U \setminus \{a\} \subset A^c$ .

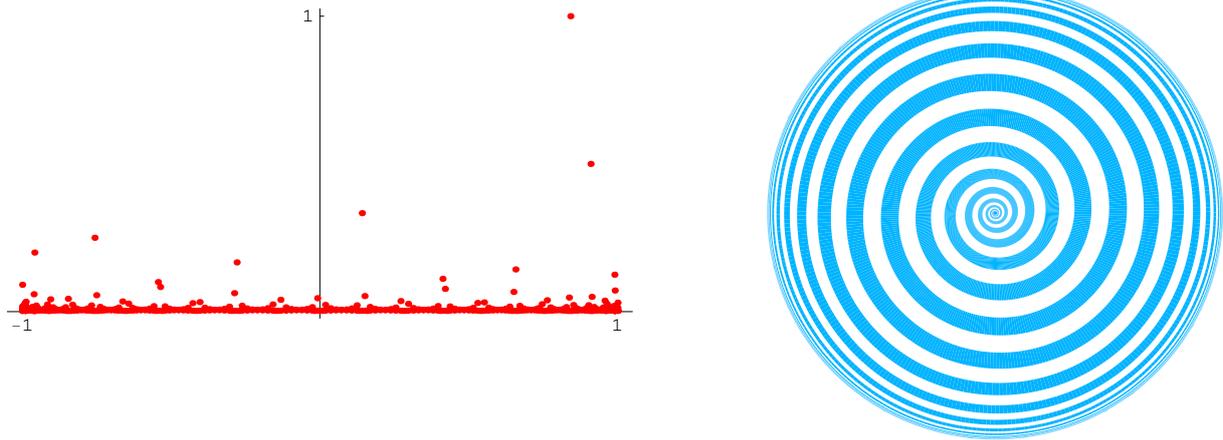
Es gibt kaum eine Standardschreibweise für die zugehörigen Mengen. Wir schreiben  $A^{\text{HP}}$  für die Menge der Häufungspunkte von  $A$  und  $A^{\text{IP}}$  für die Menge der isolierten Punkte von  $A$ .

**Beispiel 6.11** Sei  $P = \left\{ \left( \sin n, \frac{1}{n} \right); n \in \mathbb{N}^+ \right\} \subset \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$P^\circ = \emptyset \quad \text{und} \quad \partial P = \bar{P} = P \cup \{(t, 0); -1 \leq t \leq 1\},$$

$$P^{\text{HP}} = \{(t, 0); -1 \leq t \leq 1\} \quad \text{und} \quad P^{\text{IP}} = P.$$

Der Beweis für  $P^{\text{HP}} = \{(t, 0); -1 \leq t \leq 1\}$  ist nicht einfach und wir werden ihm hier nicht nachgehen.

Abbildung 6.2: Bilder zu  $P$  und  $S$  aus Beispiel 6.11 und 6.12.

**Beispiel 6.12** Wir betrachten das spiralförmige Gebiet

$$S = \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; \frac{e^\varphi}{e^\varphi + 1} \leq r \leq \frac{e^{\varphi+\pi}}{e^{\varphi+\pi} + 1} \text{ und } r, \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann gilt:

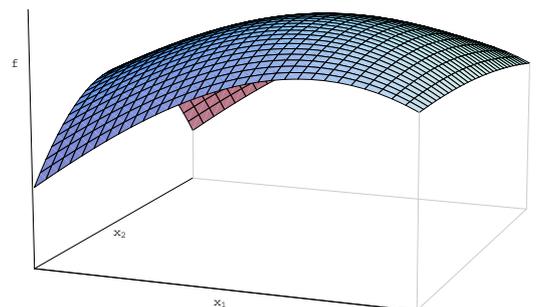
$$\begin{aligned} S^\circ &= \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; \frac{e^\varphi}{e^\varphi + 1} < r < \frac{e^{\varphi+\pi}}{e^{\varphi+\pi} + 1} \text{ und } r, \varphi \in \mathbb{R} \right\}, \\ \partial S &= \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; r = \frac{e^\varphi}{e^\varphi + 1} \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; r = \frac{e^{\varphi+\pi}}{e^{\varphi+\pi} + 1} \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ (\cos \varphi, \sin \varphi) ; \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \cup \{(0, 0)\}, \\ S^{\text{HP}} &= \bar{S} = S \cup \partial S \quad \text{und} \quad S^{\text{IP}} = \emptyset. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.13** Für  $A = \mathbb{Q}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  gilt  $A^\circ = \emptyset$ ,  $\partial A = \bar{A} = A^{\text{HP}} = \mathbb{R}^n$  und  $A^{\text{IP}} = \emptyset$ . Man beweist dies mit der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 6.14** Für  $B = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  gilt  $B^\circ = \emptyset$ ,  $\partial B = \bar{B} = B^{\text{HP}} = \mathbb{R}^n$  und  $B^{\text{IP}} = \emptyset$ .

## 6.2 Darstellung Funktionen mehrerer Veränderlichen

Eine Funktion  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich darstellen mit Hilfe einer Skizze des zugehörigen Graphen  $\{(x, f(x)) ; x \in I\}$ . Nur für  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man eine Skizze vom Graphen einigermaßen, das heißt als Projektion, darstellen: man braucht drei Dimensionen für respektive  $x_1$ ,  $x_2$  und  $f(x_1, x_2)$ . Für höhere Dimensionen fehlt dem Menschen die Bildverarbeitungssoftware. Das mathematische Wesen soll sich dadurch nicht einschränken lassen.



## 6.3 Mehrere Veränderliche, Konvergenz, Stetigkeit

Die Definition vom Limes, sowohl für eine Folge als auch für eine Funktion, ist wie vorher. Wir fangen an mit der Definition für eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ .

### 6.3.1 Der Limes bei Folgen

**Definition 6.15** Sei  $\{x^m\}_{m=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ . Man sagt  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ , wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass

$$m > M_\varepsilon \Rightarrow \|x^m - a\| < \varepsilon.$$

**Lemma 6.16** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $a$  ein Häufungspunkt von  $A$  genau dann, wenn es eine Folge  $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Sei  $a \in A^{\text{HP}}$ . Dann gibt es für jedes  $m \in \mathbb{N}^+$  ein  $x^m \in A \setminus \{a\}$  mit  $x^m \in B_{1/m}(a)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $m > M_\varepsilon := \varepsilon^{-1}$  gilt  $\|x^m - a\| < \varepsilon$ . Also  $\{x^m\}_{m=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$  konvergiert gegen  $a$ .

( $\Leftarrow$ ) Wenn es eine Folge  $\{x^m\}_{m=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert, dann dürfen wir eine derartige Teilfolge  $\{x^{m_k}\}_{k=1}^\infty$  nehmen, so dass  $\|x^{m_k} - a\|$  streng fallend ist. Weil diese Teilfolge auch gegen  $a$  konvergiert, gibt es für jedes  $r > 0$  ein  $M_r$  derart, dass für  $k > M_r$  gilt  $\|x^{m_k} - a\| < r$ . Streng fallend impliziert, dass alle  $x^{m_k}$  verschieden sind und wir finden für jede Umgebung  $B_r(a)$  unendlich viele  $x^{m_k} \in A \cap B_r(a)$ . Das heißt  $a \in A^{\text{HP}}$ . ■

Wir erinnern hier nochmals an den Satz von Bolzano-Weierstrass: jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  hat eine konvergente Teilfolge. Dieser Satz gilt auch in  $\mathbb{R}^n$ . Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt beschränkt, wenn es  $R$  gibt derart, dass für alle  $x \in A$  gilt  $\|x\| \leq R$ . Wenn  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist, dann ist  $\{x_1^k\}_{k=0}^\infty$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  und hat wegen Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge  $\{x_1^{k_m}\}_{m=0}^\infty$ . Dann ist  $\{x_2^{k_m}\}_{m=0}^\infty$  wieder eine beschränkte Teilfolge in  $\mathbb{R}$  und hat eine Teilfolge  $\{x_2^{k_{m_\nu}}\}_{\nu=0}^\infty$ . Die Folge  $\{x_1^{k_{m_\nu}}\}_{\nu=0}^\infty$  konvergiert als Teilfolge einer konvergenten Folge. Man wiederholt diesen Vorgang für die dritten Koordinaten usw. Wenn alle Komponenten in  $\mathbb{R}$  konvergieren, konvergiert auch die Teilfolge in  $\mathbb{R}^n$ .

**Theorem 6.17 (Bolzano<sup>1</sup>-Weierstrass<sup>2</sup>)** Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  hat eine konvergente Teilfolge.

Anders gesagt: jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  hat entweder nur endlich viele unterschiedliche Terme oder einen Häufungspunkt.

**Lemma 6.18** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

1.  $A^{\text{HP}}$  ist abgeschlossen;
2.  $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} = \bar{A}$  und  $A^{\text{HP}} \cap A^{\text{IP}} = \emptyset$ .

**Beweis.**

<sup>1</sup>Bernard Bolzano, 1781-1848 Prag, Priester, Philosoph und Mathematiker

<sup>2</sup>Karl Weierstraß, 1815-1897 Berlin, Turnlehrer und Mathematiker

1. Wir wollen zeigen, dass  $(A^{\text{HP}})^c$  offen ist. Sei  $a \in (A^{\text{HP}})^c$ . Dann gibt es  $r > 0$  derart, dass  $B_r(a)$  höchstens endlich viele Punkte in  $A$  enthält. Weil  $B_r(a)$  eine Umgebung ist für jeden seiner Punkte  $x$  und nur endlich viele Punkte aus  $A$  enthält, gilt  $x \in (A^{\text{HP}})^c$  und somit auch  $U \subset (A^{\text{HP}})^c$ . Also gilt:  $(A^{\text{HP}})^c$  ist offen.

2a. Wir zeigen getrennt  $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} \subset \bar{A}$  und  $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} \supset \bar{A}$ .

$\subset$  Weil  $A^{\text{IP}} \subset A \subset \bar{A}$  gilt, reicht es, wenn wir zeigen, dass  $A^{\text{HP}} \subset \bar{A}$ . Durch Widerspruch finden wir: wenn  $x \notin \bar{A}$ , dann gilt  $x \in A^{\text{co}}$ , also  $B_r(x) \subset A^{\text{co}}$  für  $r$  genügend klein und  $x \notin A^{\text{HP}}$ .

$\supset$  Wir nehmen an,  $x \in \bar{A}$  und  $x \notin A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}}$ . Weil  $x \notin A^{\text{HP}}$  gibt es  $r_0 > 0$  derart, dass  $B_{r_0}(x) \setminus \{x\}$  höchstens endlich viele Punkte  $\{a^1, \dots, a^k\}$  aus  $A$  enthält. Schreibe  $r_i = \|a^i - x\|$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $r = \min\{r_i; 0 \leq i \leq k\}$ . Es gilt  $B_r(x) \setminus \{x\} \subset A^c$ . Entweder bekommt man  $x \in A^{\text{co}}$  oder  $x \in A^{\text{IP}}$ . Beide Möglichkeiten ergeben einen Widerspruch.

2b.  $A^{\text{HP}} \cap A^{\text{IP}} = \emptyset$  folgt sofort aus der Definition. ■

Eine Folge des letzten Lemmas wollen wir betonen:

**Korollar 6.19** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Wenn  $a \in \bar{A}$ , dann gilt  $a$  ist ein Häufungspunkt von  $A$  oder  $a \in A$ .

**Beweis.** Das Ergebnis folgt aus Lemma 6.18  $\bar{A} = A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}}$  und  $A^{\text{IP}} \subset A$ . ■

### 6.3.2 Der Limes bei Funktionen

**Definition 6.20** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion,  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\ell \in \mathbb{R}^m$ . Man sagt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$  gibt derart, dass

$$0 < \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

Statt  $\|x - a\| < \delta$  kann man selbstverständlich auch schreiben  $x \in B_\delta(a)$ .

Die Definition des Grenzwertes lässt sich erweitern für Funktionen, die nur auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert sind. Um einen Limes bei einem Punkt zu definieren, muss man sich diesem Punkt ‘annähern’ können. Das heißt, der Limes kann nur bei einem Häufungspunkt betrachtet werden.

**Definition 6.21** Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion,  $a$  ein Häufungspunkt von  $A$  und  $\ell \in \mathbb{R}^m$ . Man sagt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$  gibt derart, dass

$$x \in (B_{\delta_\varepsilon}(a) \setminus \{a\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell). \quad (6.3)$$

**Bemerkung 6.21.1** Wenn man explizit das Definitionsgebiet angeben möchte, wird auch  $\lim_{A \ni x \rightarrow a} f(x)$  statt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  geschrieben. Man kann (6.3) auch schreiben als

$$x \in A \text{ und } 0 < \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

### 6.3.3 Stetigkeit

**Definition 6.22** Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion.

Man sagt  $f$  ist stetig in  $a$ , wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$  gibt derart, dass

$$x \in A \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon. \quad (6.4)$$

Man sagt  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig, wenn  $f$  stetig ist in jedem Punkt  $a \in A$ .

**Bemerkung 6.22.1** Wenn  $a \in A^{\text{IP}}$ , dann ist (6.4) eine leere Bedingung. Dann gibt es nämlich  $r > 0$  derart, dass  $x = a$  der einzige Punkt in  $B_r(a) \cap A$  ist und setzt man  $\delta_\varepsilon = r$ , dann ist (6.4) erfüllt für jede  $\varepsilon > 0$ .

**Beispiel 6.23** Die Euklidische Norm  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. Das sieht man wie folgt. Weil

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

gilt, folgt  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$  und durch Symmetrie auch  $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ . Kombiniert man diese Ungleichungen, so folgt

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  und nehme  $\delta_\varepsilon = \varepsilon$  und es folgt für jedes  $a \in \mathbb{R}^n$ :

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \| \|x\| - \|a\| \| < \varepsilon.$$

**Lemma 6.24** Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  ist stetig auf  $A$  genau dann, wenn alle Komponenten  $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind auf  $A$ .

**Beweis.** Wir haben  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  und

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + \dots + (f_n(x))^2}.$$

1.  $f$  stetig  $\Rightarrow f_i$  stetig für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

Es gilt  $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \|f(x) - f(y)\|$  und damit sieht man, dass für jede  $\varepsilon > 0$  das  $\delta_\varepsilon$  für  $f$  auch passt für  $f_i$ :

$$x \in A \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

2.  $f_i$  stetig für  $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow f$  stetig:

Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $\delta_{\frac{1}{n}\varepsilon, i} > 0$  derart, dass

$$\|x - a\| < \delta_{\frac{1}{n}\varepsilon, i} \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{1}{n}\varepsilon.$$

Setzen wir  $\delta_\varepsilon = \min \left\{ \delta_{\frac{1}{n}\varepsilon, i}; 1 \leq i \leq n \right\}$ , dann gilt für  $\|x - a\| \leq \delta_\varepsilon$ , dass

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |f_i(x) - f_i(a)|^2} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{n}\varepsilon\right)^2} = n^{-1/2}\varepsilon < \varepsilon,$$

und  $f$  ist stetig in  $a$ . ■

Dieses Lemma sagt uns, dass es zum Nachweis der Stetigkeit von  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  reicht, die einzelnen Komponenten  $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  anzuschauen.

**Bemerkung 6.24.1** Das ist jedoch ganz etwas anderes, als nur die Stetigkeit in den einzelnen Variablen anzuschauen: Stetigkeit von  $x_i \mapsto f(\dots, x_i, \dots)$  für alle  $i$  ist nicht ausreichend für die Stetigkeit von  $x \mapsto f(x)$ . Man betrachte zum Beispiel die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(0,0) = 0$  und

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0). \quad (6.5)$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $y \mapsto f(x, y)$  stetig und ebenso ist auch  $x \mapsto f(x, y)$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist jedoch nicht stetig in  $(0, 0)$ . Denn

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0).$$

**Beispiel 6.25** Auf einem Teilgebiet kann die Funktion in (6.5) jedoch schon einen Limes in  $(0, 0)$  haben. Nimmt man zum Beispiel  $A := \{(x, y); |y| < x^2\}$ , so folgt

$$\lim_{A \ni (x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$$

denn für  $(x, y) \in A$  gilt

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x| \frac{|y|}{x^2 + y^2} \leq |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x|.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  und setze  $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ . Dann folgt für  $|(x, y)| < \delta_\varepsilon$ , dass  $|x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$  und  $|f(x, y)| < \varepsilon$ .

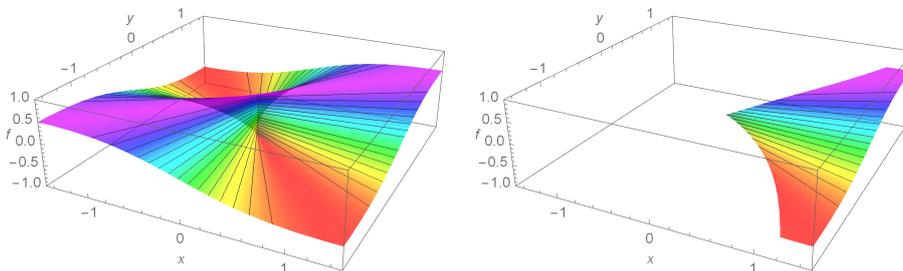


Abbildung 6.3: Links eine Skizze der Funktion aus (6.5) auf  $\mathbb{R}^2$ , die nicht stetig ist in  $(0, 0)$ . Schränkt man sie jedoch ein auf  $A$  aus Beispiel 6.25, dann bleibt sie im grünen Bereich und ist sie sogar stetig auf  $A$ .

Die bekannten Standardergebnisse in einer Dimension haben ein Analogon:

**Lemma 6.26** Sei  $A \subset \mathbb{R}^m$  mit  $a \in A$  und seien  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen.

1. Wenn  $f$  und  $g$  stetig sind in  $a$ , dann sind auch<sup>3</sup>  $f + g$  und  $f \cdot g$  stetig in  $a$ .
2. Wenn  $f$  und  $g$  stetig sind in  $a$  und  $g(a) \neq 0$ , dann ist auch  $f/g$  stetig in  $a$ .

**Lemma 6.27** Seien  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Wenn  $f$  stetig ist in  $a$  und  $g$  stetig ist in  $f(a)$ , dann ist auch  $g \circ f$ , mit  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , stetig in  $a$ .

<sup>3</sup>Die Zusammensetzungen sind wie folgt definiert:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{und} \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

**Bemerkung 6.27.1** Man kann ein ähnliches Lemma auch formulieren für Funktionen  $f$  und  $g$ , die auf Teilmengen definiert sind; die Teilmengen müssen jedoch „passen“.

Einige Beispiele stetiger Funktionen von  $\mathbb{R}^m$  nach  $\mathbb{R}$  sind:

- Polynome:  $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$  mit  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ , wobei  $\alpha$  ein Multiindex ist; das heißt

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \text{ und } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}.\end{aligned}$$

Wenn  $a_\alpha \neq 0$  für ein  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| = k$ , dann sagt man  $p$  hat Grad  $k$ .

- Rationale Funktionen:  $q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ , wobei  $p_1, p_2$  auf  $\mathbb{R}^m$  definierte Polynome sind. Das Definitionsgebiet von  $q$  ist

$$D = \{x \in \mathbb{R}^m; p_2(x) \neq 0\}.$$

**Lemma 6.28** Jedes Polynom  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

Jede rationale Funktion  $q: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig auf ihrem Definitionsgebiet  $D$ .

Meistens, aber nicht immer gilt für  $a \in D^c$ , dass

$$\lim_{D \ni x \rightarrow a} q(x) = \pm\infty.$$

**Beispiel 6.29** Rechts steht eine Skizze zu der rationalen Funktion

$$q(x, y) = \frac{xy + 1}{x + y^3}.$$

Sie ist definiert auf

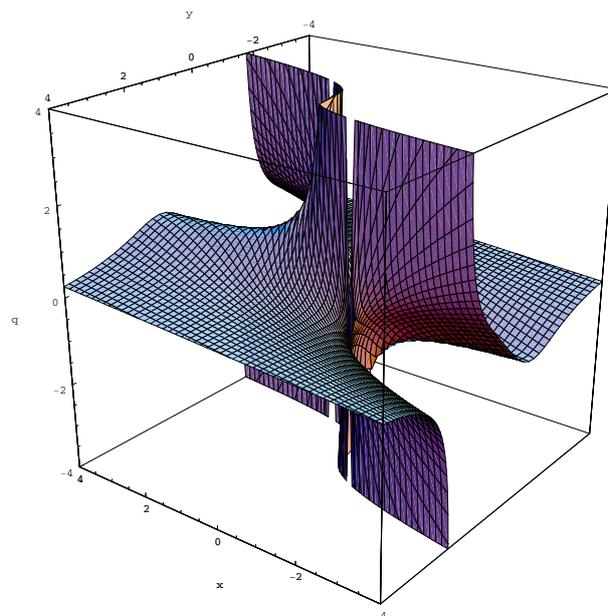
$$D = \{(x, y); x \neq -y^3\}$$

und dort stetig.

Inzwischen hat man so viele Formeln und abstrakte Sachen vorgesetzt bekommen, dass man schon versucht, eine Abkürzung zu finden. In einer Dimension wanderte man für Stetigkeit einmal von links und einmal von rechts zu der kritischen Stelle  $a$  und wenn es beide Male  $f(a)$  gab, dann war  $f$  stetig in  $a$ . Da könnte man doch leicht vermuten, dass man für Stetigkeit von  $f$  in  $a \in \mathbb{R}^2$  statt von links und rechts, auch nochmal von oben und unten und vielleicht sogar noch einige Diagonalen anschaut. Wenn man auf diesen Wegen nach  $a$  wandert, und jedesmal  $f(a)$  findet, wird  $f$  doch wohl stetig sein in  $a$ , oder? Leider hat man sich so selber auf den Holzweg gebracht. So ein Vorgehen, wie hier beschrieben ist, reicht nicht aus. Dazu ein Beispiel.

**Beispiel 6.30** Wir betrachten  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$



Wenn wir über die Achsen zu  $(0, 0)$  laufen, finden wir:

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \downarrow 0} 0 = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{y \downarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0 + y^4} = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{y \uparrow 0} f(0, y) = \lim_{y \uparrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0 + y^4} = 0 = f(0, 0),$$

und sogar auf diagonalem Wege  $y = cx$  findet man

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{c^2 x^3}{x^2 + c^4 x^4} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{c^2 x}{1 + c^4 x^2} = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{c^2 x^3}{x^2 + c^4 x^4} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{c^2 x}{1 + c^4 x^2} = 0 = f(0, 0).$$

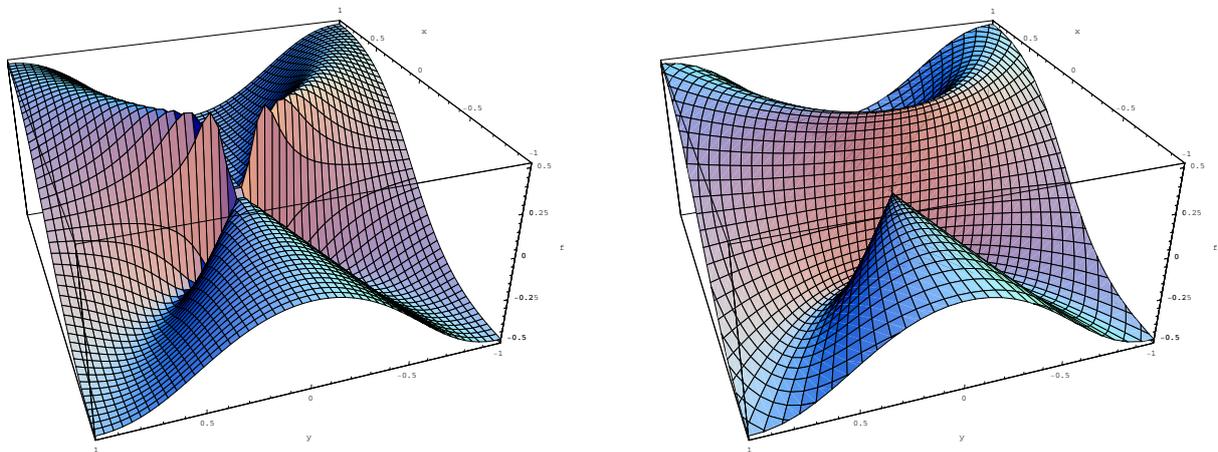


Abbildung 6.4: Die zwei Bilder zu Beispiel 6.30. Geradeaus ‘Plotten’ gibt das linke Bild, wobei man sich noch fragen soll, was das wirre Benehmen bei  $(0, 0)$  bedeuten soll. Das rechte Bild gibt den gleichen Graphen, hat aber jetzt zum Skizzieren ein maßgeschneideretes Parametersystem benutzt. Bei  $(0, 0)$  ist  $f$  anscheinend nicht stetig!

Mit den Bildern scheint all die Arbeit, um Grenzwerte von  $f$  aus bestimmten Richtungen zu bekommen, umsonst, denn gegen die Erwartungen, die man möglicherweise jetzt hätte, ist  $f$  nicht stetig in  $(0, 0)$ . Liest man die Funktion genau, dann betrachtet man nämlich auch die Folge  $\left\{ \left( \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ . Für diese Folge gilt, dass

$$\left( \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

und auch, dass

$$f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0, 0) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Das heißt, für  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  existiert kein  $\delta > 0$  derart, dass  $f(B_\delta(0, 0)) \subset B_\varepsilon(0)$ .

Wie findet man nun heraus, ob eine Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist oder nicht? Oder wie findet man heraus, ob  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert?

**Algorithmus 6.1** Um Existenz oder Nicht-Existenz von  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  zu klären.

1. Kann man  $f$  als Zusammensetzung von stetigen Funktionen schreiben, so benutze man Lemma 6.26.
2. Wenn nicht, betrachte man ein paar geschickt gewählte Folgen<sup>4</sup>

$$\{x^k\}_{k=0}^{\infty}, \{y^k\}_{k=0}^{\infty}, \{z^k\}_{k=0}^{\infty}, \dots \text{ in } A$$

mit  $x^k \rightarrow a$ ,  $y^k \rightarrow a$ ,  $z^k \rightarrow a$ , ... für  $k \rightarrow \infty$  und berechne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k), \lim_{k \rightarrow \infty} f(y^k), \lim_{k \rightarrow \infty} f(z^k), \dots$$

3a. Wenn es eine solche Folge gibt, wobei  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$  nicht existiert, dann existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  nicht.

3b. Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \ell_1$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y^k) = \ell_2 \neq \ell_1$ , dann existiert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  nicht.

3c. Wenn all diese Folgen den gleichen Grenzwert  $\ell$  liefern, kann man vermuten, dass  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ . Dann beweise man eine Abschätzung

$$\|f(x) - \ell\| \leq \dots \leq \rho(\|x - a\|),$$

wobei  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine Funktion ist mit  $\lim_{t \downarrow 0} \rho(t) = 0$ .

Wenn so eine Abschätzung existiert, dann gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

4. Gelingt so eine Abschätzung nicht, dann zurück zu 2, aber vielleicht erst nachdem Maple oder Mathematica eine Skizze angefertigt hat um zu sehen, was da los ist.

**Bemerkung 6.30.1** Zu 3a und 3b. In Analysis 1 ist bewiesen worden, dass Folgenlimes und Limes für Funktionen  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  äquivalent sind. Das gilt auch für Funktionen  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . In 3a und 3b hat man gefunden: der Folgenlimes existiert nicht.

Zu 3c. Sei  $\varepsilon > 0$  und nehme  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass  $\rho(t) < \varepsilon$  für  $0 < t < \delta_\varepsilon$ . Es folgt für  $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ , dass  $\|f(x) - \ell\| \leq \rho(\|x - a\|) < \varepsilon$ . Das heißt, der Limes existiert.

**Beispiel 6.31** Existiert  $\lim_{x \rightarrow (0,0)} \frac{x_1 x_2}{\|x\|}$ ? Wenn man einige Folgen  $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$  mit  $x^k \rightarrow (0,0)$  für  $k \rightarrow \infty$  betrachtet, findet man nur einen Kandidaten für den Grenzwert, nämlich  $\ell = 0$ . Da folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{x_1 x_2}{\|x\|} - \ell \right| = \frac{|x_1| |x_2|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| \|x\|}{\|x\|} = \|x\| = \|x - (0,0)\|,$$

hat man  $\lim_{x \rightarrow (0,0)} \frac{x_1 x_2}{\|x\|} = 0$ .

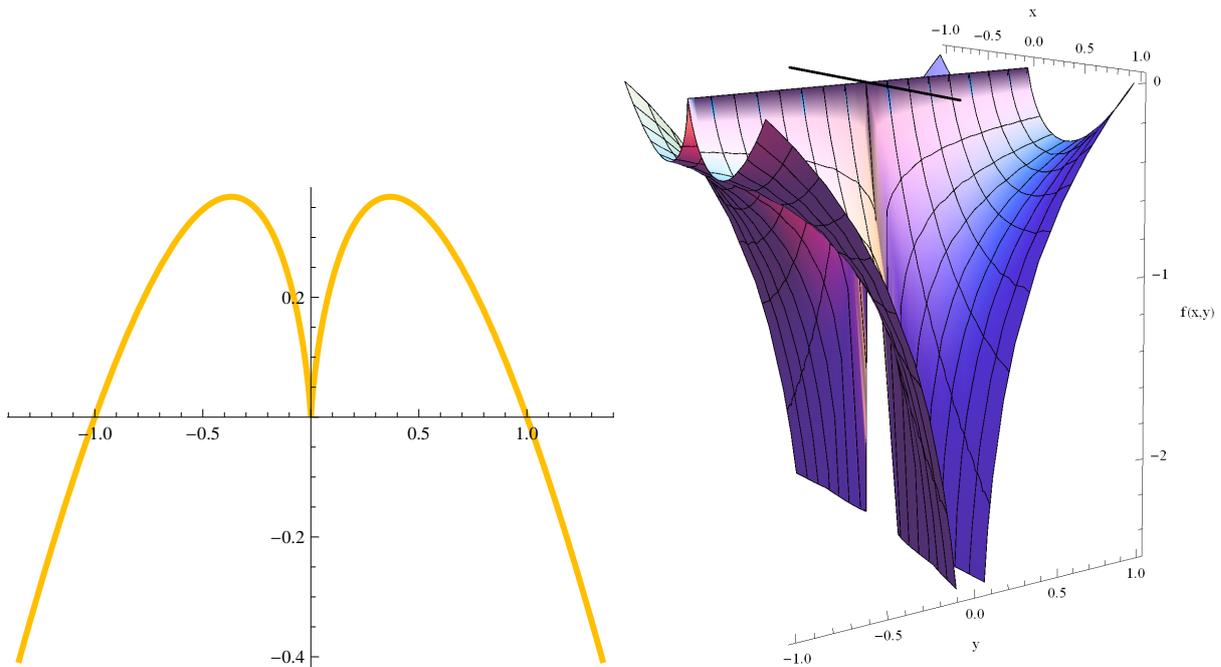


Abbildung 6.5: Eine McDonalds-Funktion  $x \mapsto -|x| \ln(|x|)$  und  $f$  aus Beispiel 6.32.

**Beispiel 6.32** Betrachte  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} |x| \ln(|xy|) & \text{wenn } xy \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } xy = 0. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist  $f$  stetig? Die zu betrachtende Stelle nennen wir  $(x_0, y_0)$ .

Wir unterscheiden vier verschiedene Fälle.

1.  $x_0 y_0 \neq 0$ . Dann ist  $f$  eine Kombination stetiger Funktionen, nämlich i)  $(x, y) \mapsto xy$ , und ii)  $z \mapsto |z|$ , und iii)  $z \mapsto \ln(z)$  für  $z > 0$ , und iv)  $(a, b) \mapsto ab$ . Die Funktion ist stetig als Komposition stetiger Funktionen.

2.  $x_0 \neq 0$  und  $y_0 = 0$ . Weil  $\lim_{y \rightarrow 0} |x_0| \ln(|x_0 y|) = \infty$ , ist  $f$  unstetig in  $(x_0, 0)$ , wenn  $x_0 \neq 0$ .

3.  $x_0 = 0$  und  $y_0 \neq 0$ . Weil  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \ln(|x y_0|) = 0$  gilt, vermutet man Stetigkeit. Das trifft auch zu, denn für  $x \neq 0$  und  $y$  nahe  $y_0$  (also auch  $y \neq 0$ ) findet man

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = ||x| \ln(|xy|) - 0| = -|x| \ln(|xy|) = -|x| \ln(|x|) - |x| \ln(|y|)$$

und für  $x = 0$  gilt  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |0 - 0| = 0 = 0 - |x| \ln(|y|)$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \ln(|x|) = 0$  und der Stetigkeit von  $(x, y) \mapsto |x| \ln(|y|)$  in  $(0, y_0)$  folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = \\ & = - \lim_{x \rightarrow 0} |x| \ln(|x|) - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} |x| \ln(|y|) = 0 - |0| \ln(|y_0|) = 0. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Statt Folgen kann man ein paar geschickt gewählte Kurven

$$\{x(t); t \in (0, 1)\}, \{y(t); t \in (0, 1)\}, \{z(t); t \in (0, 1)\}, \dots \text{ in } A$$

nehmen mit  $x(t) \rightarrow a$ ,  $y(t) \rightarrow a$ ,  $z(t) \rightarrow a$  für  $t \downarrow 0$ .

4.  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Hier treffen die beiden letzten Fälle aufeinander. Wenn wir die Kurve  $(t, e^{-1/t})$  für  $t$  von oben gegen 0 betrachten, dann finden wir  $\lim_{t \rightarrow 0} (t, e^{-1/t}) = (0, 0)$ , und auch

$$\lim_{t \downarrow 0} f(t, e^{-1/t}) = \lim_{t \downarrow 0} t (\ln(t) + \ln(e^{-1/t})) = \lim_{t \downarrow 0} t (\ln(t) - 1/t) = -1 \neq 0.$$

Die Funktion ist nicht stetig in  $(0, 0)$ .



# Analysis 2, Woche 7

## Grundbegriffe II



### 7.1 Noch mehr Dimensionen

In  $\mathbb{R}^n$  haben wir, inspiriert durch die Euklidische Länge in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (7.1)$$

als Norm verwendet. Es gibt auch andere Möglichkeiten. Auch

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad \text{und} \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

sind Normen für  $\mathbb{R}^n$ . Für  $p \in [1, \infty)$  wird allgemein definiert

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}.$$

Statt  $\|x\|$  ist  $\|x\|_2$  dann wohl die bessere Notation für (7.1). Mit Hilfe dieser 2-Norm haben wir die offenen Kugeln und darauffolgend ‘offen’ definiert. Weil

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

folgt, dass für die zugehörigen Kugeln  $B_r^p(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_p < r\}$  folgendes gilt:

$$B_r^\infty(0) \supset B_r^2(0) \supset B_r^1(0) \supset B_{r/n}^\infty(0).$$

Das heißt, wenn es eine 2-Kugel um  $x$  in der Menge  $A$  gibt, dann gibt es auch eine 1-Kugel oder  $\infty$ -Kugel um  $x$  innerhalb  $A$ . Also ist der Begriff ‘offen’ identisch für diese Normen in  $\mathbb{R}^n$ . Mit etwas Mühe läßt sich sogar beweisen, dass für jede  $p$ -Norm auf  $\mathbb{R}^n$  der Begriff ‘offen’ identisch ist in  $\mathbb{R}^n$ .

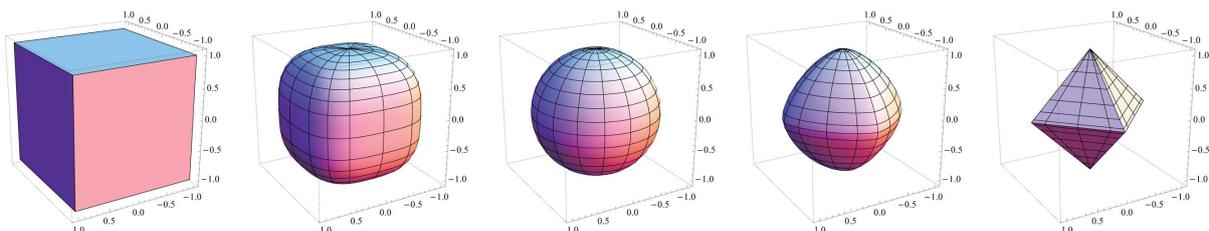


Abbildung 7.1: Die Einheitskugeln für  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_3$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_{\frac{3}{2}}$  und  $\|\cdot\|_1$  in  $\mathbb{R}^3$ .

### 7.1.1 Mehr als endlich dimensional

Was passiert, wenn wir  $n$  in  $\mathbb{R}^n$  nach unendlich gehen lassen? Man könnte die Elemente von  $\mathbb{R}^\infty$  betrachten als Vektoren  $(x_1, x_2, \dots)$  von abzählbar unendlicher Länge, anders gesagt als Folgen in  $\mathbb{R}$ . Wenn man dafür wie in  $\mathbb{R}^n$  verfahren möchte, braucht man eine Norm mit Eigenschaften wie in Definition 1.2. Wenn wir die Euklidische Norm verallgemeinern, finden wir

$$\|(x_1, x_2, \dots)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^2}. \quad (7.2)$$

Dann sieht man gleich, dass es Vektoren (Folgen) gibt mit endlichen Koordinaten, die trotzdem unendlich groß sind: zum Beispiel  $\|(1, 1, 1, 1, \dots)\| = \infty$ . Das heißt, entweder ist (7.2) keine wohldefinierte Norm, oder wir beschränken uns auf Vektoren (Folgen), für die (7.2) endlich ist. Diese zweite Lösung liefert die Vektoren in der Menge

$$\ell_2 = \left\{ (x_1, x_2, \dots); \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \text{ existiert} \right\}.$$

**Lemma 7.1**  $(\ell_2, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_2)$  mit  $\|\cdot\|_2$  wie in (7.2) ist ein normierter Vektorraum.

Es wird dem Leser überlassen zu kontrollieren, dass die Bedingungen in Definitionen 1.1 und 1.2 erfüllt sind.

Wenn wir alle "Vektoren  $x \in \mathbb{R}^\infty$ " mit beschränkten Koordinaten zulassen wollen, kann man

$$\|(x_1, x_2, \dots)\|_\infty = \sup \{ |x_i|; i \in \mathbb{N}^+ \} \quad (7.3)$$

verwenden und man definiert

$$\ell_\infty = \{ (x_1, x_2, \dots); \text{es gibt } M_x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x_i| \leq M_x \}$$

**Lemma 7.2**  $(\ell_\infty, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  wie in (7.3) ist ein normierter Vektorraum.

Auch hier wird der Beweis dem Leser überlassen.

**Bemerkung 7.2.1** Statt  $(\ell_2, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_2)$  und  $(\ell_\infty, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  wird meistens bloß auch nur  $\ell_2$  und  $\ell_\infty$  geschrieben.

Es gibt andere Möglichkeiten. Für  $p \in [1, \infty)$  wird ähnlich wie oben  $\ell_p$  definiert durch:

$$\ell_p = \left\{ (x_1, x_2, \dots); \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^p \text{ existiert} \right\}.$$

Der Grund, dass wir hier auch unendlich dimensionale Vektorräume betrachten wollen, ist um zu verdeutlichen, dass einige Ergebnisse in diesem Paragraphen nicht nur in  $\mathbb{R}^n$  gültig sind und andere Ergebnisse nur in endlichen Dimensionen gelten. Dazu soll man aber mindestens einen unendlich dimensional Vektorraum gesehen haben.

**Lemma 7.3** Es gilt  $\ell_1 \subsetneq \ell_2 \subsetneq \ell_\infty$  und insbesondere:

1.  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$  für alle  $x \in \ell_1$ ,
2.  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$  für alle  $x \in \ell_2$ ,
3. es gibt kein  $c \in \mathbb{R}^+$  derart, dass für alle  $x \in \ell_1$  gilt  $\|x\|_1 \leq c \|x\|_2$ ,

4. es gibt kein  $c \in \mathbb{R}^+$  derart, dass für alle  $x \in \ell_2$  gilt  $\|x\|_2 \leq c \|x\|_\infty$ .

**Bemerkung 7.3.1**  $A \subsetneq B$  bedeutet  $A \subset B$  und  $A \neq B$ .

**Ein Beweis in 4 Schritte.**

**1 und  $\ell_1 \subset \ell_2$ :** Direkt findet man

$$\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^k |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} |x_i| |x_j| = \left( \sum_{i=1}^k |x_i| \right)^2 \quad (7.4)$$

für beliebige  $k$  und  $x_i \in \mathbb{R}$ , und es folgt, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|$  existiert, dass auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^2$  existiert, denn die Folge  $\left\{ \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right\}_{k=1}^\infty$  ist monoton wachsend und beschränkt. Das bedeutet  $x \in \ell_1$  impliziert  $x \in \ell_2$ . Aus (7.4) folgt auch

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{für alle } x \in \ell_1.$$

**2 und  $\ell_2 \subset \ell_\infty$ :** Weil

$$\left( \sup_{i \in \mathbb{N}^+} |x_i| \right)^2 = \sup_{i \in \mathbb{N}^+} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 \quad (7.5)$$

gilt, folgt aus  $x \in \ell_2$ , dass  $x \in \ell_\infty$ . Aus (7.5) folgt auch

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \ell_2.$$

**3 & 4:** Betrachte für  $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{x} = (\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots),$$

das heißt  $\tilde{x}_k = 1$  für  $k \leq n$  und  $\tilde{x}_k = 0$  für  $k > n$ . Es gilt  $\tilde{x} \in \ell_\infty \cap \ell_2 \cap \ell_1$  und

$$\|\tilde{x}\|_\infty = 1, \quad \|\tilde{x}\|_2 = \sqrt{n} \quad \text{und} \quad \|\tilde{x}\|_1 = n.$$

Wenn es  $c \in \mathbb{R}^+$  wie im Lemma gibt, dann findet man einen Widerspruch, wenn man  $n$  genügend groß wählt.

**Und  $\ell_1 \neq \ell_2 \neq \ell_\infty$ :** Um zu zeigen, dass  $\ell_2 \neq \ell_\infty$  verwenden wir  $x = (1, 1, 1, 1, \dots)$ . Für  $\ell_1 \neq \ell_2$  betrachte man den Vektor  $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ . ■

Wir haben nun gesehen, dass die Norm bestimmt, welche Vektoren man bekommt und nicht nur das. Betrachtet man  $\mathcal{V}_1 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_1)$ ,  $\mathcal{V}_2 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_2)$  und  $\mathcal{V}_3 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  als Vektorräume, das heißt gleiche Vektoren aber unterschiedliche Normen, dann findet man, dass die offenen Mengen jedesmal wesentlich anders sind.

**Bemerkung 7.3.2** Wenn wir Folgen in  $\ell_2$  oder  $\ell_\infty$  betrachten, dann gibt es ein kleines Notationsproblem. Weil so eine Folge an sich eine Folge von Folgen ist, brauchen wir zwei Indizes. Für die einzelnen Koordinaten hat man den Index rechts unten und üblicherweise wird dann der Index für das  $k$ -te Element der Folge rechts oben platziert. Dieser Index bedeutet dann keine Potenz. Also schreibt man  $\{x^k\}_{k=1}^\infty$  für eine Folge in  $\ell_2$  oder  $\ell_\infty$ , dann ist  $x_i^k$  die  $i$ -te Koordinate des  $k$ -ten Elements dieser Folge:

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, \dots).$$

Als Alternativ kann man auch doppelte Indizes benutzen:

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}, \dots).$$

**Beispiel 7.4** Um  $\mathcal{V}_2$  mit  $\mathcal{V}_3$  zu vergleichen, betrachten wir  $B_r^\infty(0) = \{x \in \ell_1; \|x\|_\infty < r\}$  und  $B_s^2(0) = \{x \in \ell_1; \|x\|_2 < s\}$ . Es gilt, weil  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ , dass  $B_s^2(0) \subset B_r^\infty(0)$  für  $s \leq r$ . Es gibt aber kein  $r, s > 0$  derart, dass  $B_r^\infty(0) \subset B_s^2(0)$ . Das sieht man wie folgt. Es reicht, wenn wir zeigen können, dass  $B_1^\infty(0) \not\subset B_s^2(0)$  für alle  $s > 0$ . Betrachte die Folge

$$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \dots\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots,$$

das heißt,  $\{x^k\}_{k=1}^\infty$  ist definiert durch

$$x_i^k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i \leq k, \\ 0 & \text{für } i > k. \end{cases}$$

Dann gilt  $\|x^k\|_\infty = \frac{1}{2}$  und  $x^k \in B_1^\infty(0)$ . Es gilt aber auch  $\|x^k\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{k}$ . Für jedes  $s > 0$  nehme man  $k > 4s^2$  und es folgt  $x^k \notin B_s^2(0)$ .

**Beispiel 7.5** In unendlichen Dimensionen gibt es keinen Satz von Bolzano-Weierstraß. Man nehme die Folge

$$\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} := \{(1, 0, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, 0, \dots), \dots\}.$$

Diese Folge ist beschränkt in sowohl  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  als  $\ell_\infty$ , hat aber keine konvergente Teilfolge. Beschränkt ist sie, weil

$$\|x^k\|_1 = 1 = \|x^k\|_2 = \|x^k\|_\infty.$$

Wenn sie eine konvergente Teilfolge hätte und  $x^\infty$  der Limes wäre, dann folgt, weil

$$|x_i^\infty - x_i^k| \leq \|x^\infty - x^k\|_{1,2 \text{ oder } \infty}$$

gilt, dass  $x_i^k \rightarrow x_i^\infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Weil jedoch für jedes  $i$  gilt, dass  $x_i^k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , folgt es dass  $x_i^\infty = 0$  und daher auch, dass  $x^\infty = (0, 0, 0, \dots)$ . Weil  $\|x^\infty - x^k\| = \|x^k\| = 1$ , folgt der Widerspruch zu  $\|x^\infty - x^k\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

## 7.1.2 Äquivalente Normen bei endlichen Dimensionen

So etwas kann nur in unendlichen Dimensionen geschehen. Für  $\mathbb{R}^n$  sahen wir, dass

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Definition 7.6** Sei  $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, dann nennt man die Norm  $\|\cdot\|_*$  zu  $\|\cdot\|$  äquivalent, wenn es  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$  gibt derart, dass

$$C_1 \|v\| \leq \|v\|_* \leq C_2 \|v\| \text{ für alle } v \in V.$$

**Theorem 7.7** In  $\mathbb{R}^n$  sind alle Normen äquivalent.

**Beweis.** Es reicht, wenn wir zeigen, dass  $\|\cdot\|_*$  äquivalent ist zu  $\|\cdot\|_2$ . Sei  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  die Standardbasis auf  $\mathbb{R}^n$  und setzen wir  $C = \max \|e_i\|_*$ . Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung für  $\|\cdot\|_*$  und wegen Cauchy-Schwarz für  $\|\cdot\|_2$ , dass

$$\begin{aligned} \|x\|_* &\leq |x_1| \|e_1\|_* + |x_2| \|e_2\|_* + \dots + |x_n| \|e_n\|_* \leq C (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \leq \\ &\leq C\sqrt{n} \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = C\sqrt{n} \|x\|_2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist so bewiesen für  $C_2 = C\sqrt{n}$ .

Für die linke Seite verwendet man einen Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, es gibt keine derartige Konstante  $C_1 > 0$ , das heißt, es gibt eine Folge  $\{x^k\}_{k=1}^\infty$  so, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^k\|_2}{\|x^k\|_*} = \infty.$$

Dann gibt es eine Teilfolge  $\{x^{k_m}\}_{m=1}^\infty$  mit  $\|x^{k_m}\|_2 > m \|x^{k_m}\|_*$ . Wir betrachten die Folge  $y^m := x^{k_m} / \|x^{k_m}\|_2$ . Dann gilt

$$\|y^m\|_2 = \left\| \frac{x^{k_m}}{\|x^{k_m}\|_2} \right\|_2 = \frac{1}{\|x^{k_m}\|_2} \|x^{k_m}\|_2 = 1 \text{ und} \quad (7.6)$$

$$\|y^m\|_* = \left\| \frac{x^{k_m}}{\|x^{k_m}\|_2} \right\|_* = \frac{1}{\|x^{k_m}\|_2} \|x^{k_m}\|_* < \frac{1}{m}. \quad (7.7)$$

Weil (7.6) gilt, ist die Folge  $\{y^m\}_{m=1}^\infty$  beschränkt und Bolzano-Weierstrass sagt uns, dass es eine  $\|\cdot\|_2$ -konvergente Teilfolge  $\{y^{m_k}\}_{k=1}^\infty$  gibt. Nennen wir den  $\|\cdot\|_2$ -Limes  $a$ . Weil  $\|x - y\|_* \leq C_2 \|x - y\|_2$  gilt, konvergiert diese Folge auch nach  $a$  für den  $\|\cdot\|_*$ -Limes.

Wegen der Dreiecksungleichung für  $\|\cdot\|_2$  findet man

$$\| \|y^{m_k}\|_2 - \|a\|_2 \| \leq \|y^{m_k} - a\|_2 \rightarrow 0,$$

und es folgt, dass  $\|y^{m_k}\|_2 \rightarrow \|a\|_2$ . Weil  $\|y^{m_k}\|_2 = 1$ , finden wir, dass  $\|a\|_2 = 1$  und deshalb auch  $a \neq 0$ .

Ebenso liefert die Dreiecksungleichung für  $\|\cdot\|_*$ , dass

$$\| \|y^{m_k}\|_* - \|a\|_* \| \leq \|y^{m_k} - a\|_* \rightarrow 0,$$

und es folgt auch hier, dass  $\|y^{m_k}\|_* \rightarrow \|a\|_*$ . Wegen (7.7) folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{m_k}\|_* = 0$  und  $\|a\|_* = 0$ . Weil  $\|\cdot\|_*$  eine Norm ist, folgt  $a = 0$  und der Widerspruch. ■

Weil alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, ist der Begriff offen, obwohl definiert durch Kugeln  $\{x; \|x - a\| < r\}$ , in  $\mathbb{R}^n$  nicht abhängig von der Norm.

### 7.1.3 Limes bei unendlichen Dimensionen

Auch bei normierten Vektorräumen mit unendlich vielen Dimensionen wird offen, abgeschlossen, Häufungspunkte, isolierte Punkte, Cauchy-Folgen, konvergente Folgen, Limes und Stetigkeit ähnlich wie vorher definiert: man ersetzt  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  durch den normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$ . All diese Definitionen sind nur abhängig von der dazugehörigen Norm.

**Definition 7.8** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum und  $A \subset V$ .  $A$  heißt offen, wenn es für jedes  $a \in A$  ein  $r > 0$  gibt mit

$$B_r(a) := \{x \in V; \|x - a\|_V < r\} \subset A.$$

**Definition 7.9** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum und sei  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $V$  und sei  $x \in V$ .

- Man nennt  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  eine Cauchyfolge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \forall k, m \in \mathbb{N} : k, m > K_\varepsilon \Rightarrow \|x_k - x_m\|_V < \varepsilon.$$

- Man nennt  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine konvergente Folge und sagt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \forall k \in \mathbb{N} : k > K_\varepsilon \Rightarrow \|x_k - x\|_V < \varepsilon.$$

**Definition 7.10** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  zwei normierte Vektorräume und sei  $f : D \subset V \rightarrow W$  eine Funktion,  $a \in D^{\text{HP}}$  und  $\ell \in W$ .

- Man sagt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x : (0 < \|x - a\|_V < \delta_\varepsilon \text{ und } x \in D) \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_W < \varepsilon.$$

- Man sagt  $f$  ist stetig in  $a$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x : (\|x - a\|_V < \delta_\varepsilon \text{ und } x \in D) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_W < \varepsilon.$$

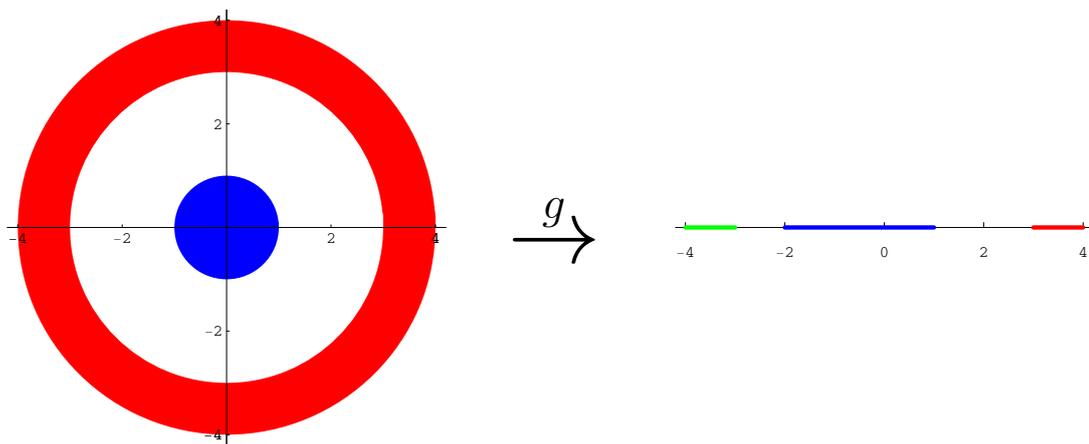
### 7.1.4 Alternativ bei Stetigkeit

Es gibt eine Verbindung zwischen Stetigkeit und offen. Um diese Verbindung zu beschreiben brauchen wir den Begriff 'Urbild'.

**Definition 7.11** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  zwei normierte Vektorräume und sei  $f : D \subset V \rightarrow W$  eine Funktion. Man definiert das **Urbild** von  $A \subset W$  bezüglich  $f$  durch:

$$f^{-1}(A) = \{x \in D; f(x) \in A\}.$$

Man bemerke, dass  $f^{-1}$  nicht die inverse Abbildung zu  $f$  sein muss und übrigens auch nicht  $1/f$  ist. Definition 7.11 macht sogar Sinn, wenn  $f$  nicht invertierbar ist. Zum Beispiel gilt für  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = \|x\|$ , dass  $g^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^2; a < \|x\| < b\}$ . Eine Skizze mit einigen Urbildern folgt:  $g^{-1}(3, 4)$  in rot,  $g^{-1}(-2, 1)$  in blau. Das Urbild  $g^{-1}(-4, -3)$  findet man nicht.



Man sieht, dass wenn  $A$  kein Bild  $f(x)$  enthält,  $f^{-1}(A)$  leer ist.

**Definition 7.12** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein Vektorraum und sei  $D \subset V$ . Die Menge  $O \subset D$  heißt relativ offen in  $D$ , wenn es eine offene Menge  $\tilde{O} \subset V$  gibt mit  $\tilde{O} \cap D = O$ .

**Bemerkung 7.12.1** Die Menge  $O \subset D$  ist genau dann relativ offen in  $D$ , wenn für jedes  $a \in O$  ein  $r \in \mathbb{R}^+$  existiert mit

$$B_r(a) \cap D \subset O.$$

Hier nimmt man  $B_r(a) = \{x \in V; \|x - a\|_V < r\}$ .

**Theorem 7.13** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Vektorräume und sei  $f : D \subset V \rightarrow W$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge  $A \subset W$  das Urbild  $f^{-1}(A)$  von  $A$  relativ offen in  $D \subset V$  ist.

**Bemerkung 7.13.1** Wenn  $f$  auf ganz  $V$  definiert ist, vereinfacht sich diese Aussage zu:  
 $f$  ist stetig auf  $V \Leftrightarrow$  das Urbild  $f^{-1}(A)$  jeder offenen Menge  $A \subset W$  ist offen.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Sei  $f$  stetig und  $A \subset W$  offen. Wenn  $f^{-1}(A)$  leer ist, sind wir fertig. Wenn  $f^{-1}(A)$  nicht leer ist, sollen wir zeigen, dass es für jedes  $x \in f^{-1}(A)$  ein  $r > 0$  gibt mit  $B_r(x) \cap D \subset f^{-1}(A)$ . Für ein solches  $x$  gilt  $f(x) \in A$  und weil  $A$  offen ist, gibt es  $B_\varepsilon(f(x)) \subset A$ . Weil  $f$  stetig ist, gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass für alle  $y \in B_{\delta_\varepsilon}(x) \cap D$  gilt  $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset A$ . Das heißt  $y \in f^{-1}(A)$  und  $B_{\delta_\varepsilon}(x) \cap D \subset f^{-1}(A)$ .

( $\Leftarrow$ ) Wir nehmen an, ' $A \subset \mathbb{R}^m$  ist offen' impliziert ' $f^{-1}(A)$  relativ offen in  $D$ '. Sei  $a \in D \subset V$  und  $\varepsilon > 0$ . Weil  $B_\varepsilon(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  offen ist, ist wegen der Annahme die Menge  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$  relativ offen in  $D \subset V$ . Weil  $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$  und weil  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$  relativ offen ist bezüglich  $D$  durch die Annahme, gibt es  $\delta > 0$  derart, dass  $B_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ . So findet man

$$f(B_\delta(a) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

oder nochmals anders gesagt: für  $x \in D$  mit  $\|x - a\|_V < \delta$  gilt  $\|f(x) - f(a)\|_W < \varepsilon$ . ■

## 7.2 Extremum

In einer Dimension ist man den verschiedenen Typen von Extremwerten schon begegnet. Wir formulieren sie noch mal allgemein.

**Definition 7.14** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum und sei  $f : D \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- Sie hat ein globales Minimum in  $a \in D$ , wenn  $f(x) \geq f(a)$  für alle  $x \in D$ .
- Sie hat ein strenges globales Minimum in  $a \in D$ , wenn  $f(x) > f(a)$  für alle  $x \in D \setminus \{a\}$ .
- Sie hat ein lokales Minimum in  $a \in D$ , wenn es  $r > 0$  gibt mit  $f(x) \geq f(a)$  für alle  $x \in D$  mit  $\|x - a\|_V < r$ .
- Sie hat ein strenges lokales Minimum in  $a \in D$ , wenn es  $r > 0$  gibt mit  $f(x) > f(a)$  für alle  $x \in D \setminus \{a\}$  mit  $\|x - a\|_V < r$ .

Auf ähnliche Art definiert man die verschiedenen Sorten vom Maximum.

**Bemerkung 7.14.1** Ein globales Minimum ist ein lokales Minimum, wenn wir „ist“ verstehen wie in: ein Mini ist ein Auto. Wenn man klar darstellen möchte, dass ein Minimum kein globales Minimum ist, kann man es ein nicht-globales Minimum nennen.

## 7.3 Kompaktheit

Eine wichtige Frage ist, ob eine Funktion ihr Minimum annimmt. In Analysis 1 haben wir gesehen, dass ein Maximum angenommen wird im Fall, dass die drei folgenden Sachen erfüllt sind: 1)  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, 2)  $D$  ist abgeschlossen, und 3)  $D$  ist beschränkt. So etwas gilt auch für  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wenn man zu unendlich dimensionalen Vektorräumen übergeht, reicht abgeschlossen und beschränkt nicht mehr. Wir werden einen Ersatz definieren, der sowohl in endlich als auch in unendlich dimensionalen Vektorräumen funktioniert.

In diesem Paragraphen sind  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Vektorräume. Man kann sie jederzeit durch  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  und  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  ersetzen.

**Definition 7.15** Sei  $A \subset V$  und  $\{U_i\}_{i \in I}$  derart, dass

1.  $U_i \subset V$  offen ist für jede  $i \in I$ , und
2.  $\bigcup_{i \in I} U_i \supset A$  ( $\{U_i\}_{i \in I}$  überdeckt  $A$ ),

dann heißt  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine **offene Überdeckung** von  $A$ .

**Definition 7.16**  $A \subset V$  heißt **kompakt**, wenn es für jede offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $A$  endlich viele  $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$  gibt, die  $A$  überdecken.

In der Analysis ist es oft bequemer, ‘kompakt’ zu ersetzen durch ‘folgenkompakt’.

**Definition 7.17**  $A \subset V$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset A$  eine konvergente Teilfolge  $\{x_{k_n}\}_{n=0}^\infty$  hat mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} \in A$ .

**Theorem 7.18** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $A$  ist kompakt;
2.  $A$  ist folgenkompakt;
3.  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen.

**Bemerkung 7.18.1** Kompaktheit liefert direkt Beschränktheit. Die offene Mengen  $\{B_n(0); n \in \mathbb{N}\}$  überdecken  $\mathbb{R}^n$ , also auch eine kompakte Menge  $A$ . Wegen der Definition gibt es schon endlich viele Kugeln  $B_n(0)$ , die  $A$  überdecken. Für die größte dieser Kugeln, sagen wir  $B_{n^*}(0)$ , gilt  $A \subset B_{n^*}(0)$ . Das heißt,  $A$  ist beschränkt.

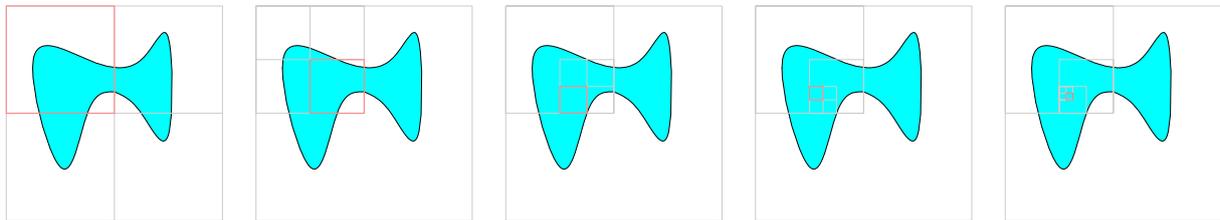
**Beweis.** Für  $A = \emptyset$  sind die drei Aussagen wahr. Wir dürfen also annehmen, dass  $A$  nicht leer ist.

$1 \Rightarrow 2$ . Nehmen wir an,  $A$  ist kompakt, aber nicht folgenkompakt. Das heißt, es gibt eine Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset A$  ohne eine in  $A$  konvergente Teilfolge. Wegen Bemerkung 7.18.1 wissen wir, dass  $A$  beschränkt ist. Dann liefert der Satz von Bolzano-Weierstrass uns zu dieser Folge einen Häufungspunkt  $a \in \mathbb{R}^n$ , das heißt, eine Teilfolge  $\{x_{k_m}\}_{m=0}^\infty$  mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_m} = a \notin A$ . Wir definieren die Mengen  $U_i = \left(\overline{B_{1/i}(a)}\right)^c$  für  $i \in \mathbb{N}^+$ . Jede  $U_i$  ist offen und weil  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} U_i = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \supset A$  gilt, überdeckt  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  die Menge  $A$ . Wegen der Kompaktheit von  $A$  kann man endlich viele  $U_i$  wählen, die  $A$  schon überdecken. Das bedeutet  $A \subset \left(\overline{B_{1/i_0}(a)}\right)^c$  für ein  $i_0 \in \mathbb{N}^+$  und weil dann  $\|x_{k_m} - a\| \geq 1/i_0$  gilt, haben wir einen Widerspruch.

2  $\Rightarrow$  3. Wenn  $A$  nicht beschränkt ist, dann gibt es eine Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset A$  mit  $\|x_k\| > k$ . Diese Folge hat keine konvergente Teilfolge.

Wenn  $A$  nicht abgeschlossen ist, gibt es einen Häufungspunkt  $a$  von  $A$  außerhalb  $A$ . Wegen Lemma 6.16 gibt es eine Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ . Jede Teilfolge hat den gleichen Grenzwert  $a$  außerhalb  $A$ , also ist  $A$  nicht folgenkompakt.

3  $\Rightarrow$  1. Auch hier geben wir einen Beweis durch Widerspruch. Sei  $A$  beschränkt und abgeschlossen und sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , aus dem man keine endliche Überdeckung von  $A$  wählen kann. Weil  $A$  beschränkt ist, gibt es  $M \in \mathbb{R}^+$  mit  $A \subset [-M, M]^n$ . Den Hyperkubus  $K_0 = [-M, M]^n$  teilen wir in  $2^n$  Würfel halber Länge. Es gibt mindestens einen Teilhyperkubus  $K_1$  derart, dass man zur Überdeckung von  $A \cap K_1$  mindestens unendlich viel  $U_i$  braucht. Teilen wir  $K_1$  wieder auf in  $2^n$  Würfel halber Länge, dann gibt es mindestens einen Teilhyperkubus  $K_2$  derart, dass man zur Überdeckung von  $A \cap K_2$  mindestens unendlich viel  $U_i$  braucht, usw.



In jede Menge  $A \cap K_i$  können wir  $x^i$  wählen und  $\{x^i\}_{i=1}^\infty$  ist eine konvergente Folge. Weil  $A$  abgeschlossen ist, gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = a \in A$ . Sei  $U_j$  derart, dass  $a \in U_j$ . Weil  $U_j$  offen ist, gibt es  $r > 0$  derart, dass  $B_r(a) \subset U_j$ . Dann hat man aber auch  $K_\ell \subset U_j$  für alle  $\ell \geq \ell_0$  mit  $\ell_0$  genügend groß. Man braucht für die Überdeckung von  $K_{\ell_0}$  nur diese eine offene Menge  $U_j$  und nicht, wie vorhin behauptet, unendlich viele offene Mengen  $U_i$ . ■

**Bemerkung 7.18.2** Folgenkompakt und kompakt sind auch für unendlich dimensionale, normierte Vektorräume äquivalent. Wenn  $A$  (folgen)kompakt ist, dann impliziert dies, dass  $A$  beschränkt und abgeschlossen ist. Für die umgekehrte Richtung, das heißt für die Richtung ‘beschränkt und abgeschlossen’ zu ‘(folgen)kompakt’, ist endlich dimensional eine notwendige Bedingung.

**Theorem 7.19** Wenn  $A \subset V$  kompakt ist und  $f : A \rightarrow W$  stetig, dann ist  $f(A)$  kompakt.

**Beweis.** Sei  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $f(A)$ . Dann gibt es eine Folge  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$  mit  $f(x_k) = y_k$ . Weil  $A$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $\{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$  mit  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell} = a \in A$ . Weil  $f$  stetig ist, folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} y_{k_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x_{k_\ell}) = f\left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell}\right) = f(a).$$

Das heißt,  $f(A)$  ist (folgen)kompakt. ■

**Theorem 7.20 (Existenz des Extremums)** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum und sei  $A \subset V$ . Wenn folgendes gilt:

1.  $A$  ist kompakt, und
2.  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine stetige Funktion.

Dann nimmt die Funktion  $f$  ihr Maximum<sup>1</sup> und ihr Minimum an auf  $A$ . Das heißt, es gibt  $x_{\min}, x_{\max} \in A$  derart, dass

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in A} f(x).$$

**Beweis.** Sei  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Folge in  $f(A)$  mit  $y_k \rightarrow \inf_{x \in A} f(x)$ . Dann gibt es eine Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$  mit  $f(x_k) = y_k$ . Wegen der Kompaktheit von  $A$  gibt es eine in  $A$  konvergente Teilfolge  $\{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ , sagen wir  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell} = a$ , und

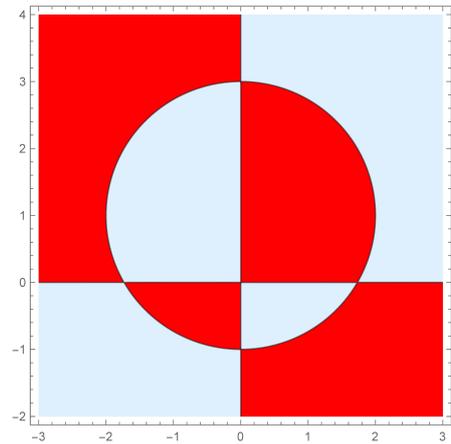
$$\inf_{x \in A} f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} y_{k_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x_{k_\ell}) = f(\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell}) = f(a).$$

Ähnlich gibt es  $b \in A$  mit  $f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$ . ■

**Beispiel 7.21** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 3) e^{-x_1}$$

hat mindestens zwei Maxima und zwei Minima. Man findet, dass  $f = 0$ , sowohl auf der  $x_1$ -Achse als auch auf der  $x_2$ -Achse. Auch auf dem Rand des Kreises  $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4$  findet man  $f = 0$ . Auf dem kompakten (weil beschränkt und abgeschlossen) Gebiet  $A = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4\}$  hat  $f$  ein Minimum und ein Maximum. Weil das Minimum negativ ist und weil  $f = 0$  gilt für  $x \in \partial A$ , liegt die Stelle, wo das Minimum angenommen wird, innerhalb von  $A$ . Dann ist dieses Minimum auch ein lokales Minimum von  $f$ . Es gibt noch drei kompakte Teilgebiete, bei denen man so verfahren kann.



## 7.4 Der Begriff Zusammenhang

Wir werden hier Definitionen für allgemeine normierte Vektorräume geben. Man kann immer auch  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  statt  $(V, \|\cdot\|_V)$  lesen.

**Definition 7.22** Sei  $A \subset V$  mit  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum. Die Menge  $A$  heißt **nicht-zusammenhängend**, wenn es  $A_1, A_2 \subset A$  gibt, die folgendes erfüllen:

1.  $A_1$  und  $A_2$  sind beide nicht leer und relativ offen bezüglich  $A$ ;
2.  $A = A_1 \cup A_2$  und  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

**Bemerkung 7.22.1** Eine Menge  $A$  heißt **zusammenhängend**, wenn sie nicht nicht-zusammenhängend ist.

In der Analysis ist es öfters einfacher, eine andere Definition zu benutzen.

<sup>1</sup>Hier ist das globale Maximum gemeint.

**Definition 7.23** Sei  $A \subset V$  mit  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum. Die Menge  $A$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem  $x, y \in A$  eine Kurve (stetige Funktion)  $f : [0, 1] \rightarrow V$  gibt, mit  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$  und  $f([0, 1]) \subset A$ .

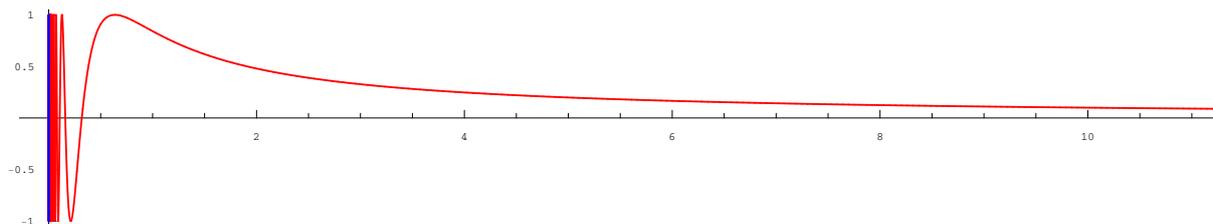
**Lemma 7.24** Sei  $A \subset V$  mit  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum. Wenn  $A$  wegzusammenhängend ist, dann ist  $A$  zusammenhängend.

**Beweis.** Nehmen wir an,  $A$  ist wegzusammenhängend aber nicht zusammenhängend. Das heißt, es gibt zwei nicht-leere in  $A$  relativ offene Mengen  $A_1$  und  $A_2$  mit  $A = A_1 \cup A_2$ . Man nehme  $a_1 \in A_1$  und  $a_2 \in A_2$ . Weil wir angenommen haben, dass  $A$  wegzusammenhängend ist, gibt es eine Kurve  $f : [0, 1] \rightarrow V$  mit  $f([0, 1]) \subset A$  und  $f(0) = a_1$  und  $f(1) = a_2$ . Setze  $t_0 = \sup \{t \in [0, 1] ; f(t) \in A_1\}$ . Weil  $f(0) \in A_1$  und  $f(1) \notin A_1$  gilt  $t_0 \in [0, 1]$ .

1) Wenn  $f(t_0) \in A_2$ , also  $t_0 > 0$ , dann gibt es  $r > 0$  mit  $B_r(f(t_0)) \cap A \subset A_2$  und  $f^{-1}(B_r(f(t_0)))$  ist relativ offen in  $[0, 1]$ . Das heißt, es gibt  $\varepsilon > 0$  mit  $(t_0 - \varepsilon, t_0] \subset [0, 1]$  derart, dass  $f(t_0 - \varepsilon, t_0] \subset A_2$ . Das widerspricht der Definition von  $t_0$ .

2) Wenn  $f(t_0) \in A_1$ , also  $t_0 < 1$ , dann gibt es  $r > 0$  mit  $B_r(f(t_0)) \cap A \subset A_1$  und  $f^{-1}(B_r(f(t_0)))$  ist relativ offen in  $[0, 1]$ . Das heißt, es gibt  $\varepsilon > 0$  mit  $[t_0, t_0 + \varepsilon) \subset [0, 1]$  derart, dass  $f[t_0, t_0 + \varepsilon) \subset A_1$ . Das widerspricht der Definition von  $t_0$ . ■

**Beispiel 7.25** Sei  $A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; x \in \mathbb{R}^+\}$ .



- $A$  ist nicht wegzusammenhängend: Die Mengen

$$A_1 = \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{und} \quad A_2 = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) ; x \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (7.8)$$

sind wegzusammenhängend, aber es gibt keine stetige Kurve  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die Punkte aus diesen beiden Teilmengen innerhalb von  $A$  verbindet. Denn sei  $f$  so eine Kurve mit  $f(0) \in A_1$  und  $f(1) \in A_2$ , setze  $t_0 = \sup \{t \in [0, 1] ; f(t) \in A_1\}$ . Weil  $A_1$  abgeschlossen ist, gilt  $f(t_0) \in A_1$ . Wenn  $t_0 = 1$ , dann gilt  $f(1) \in A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Wenn  $t_0 < 1$ , dann gibt es für jedes  $\delta > 0$  ein  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$  derart, dass  $\|f(t_0) - f(t)\| > \frac{1}{2}$ . Das letztere heißt,  $f$  ist nicht stetig in  $t_0$  und ergibt wiederum einen Widerspruch.

- $A$  ist zusammenhängend: Wenn  $A_1, A_2$  wie in Definition 7.22 sind, führt der Wegzusammenhang dazu, dass für eine solche Zerlegung nur  $A_1$  und  $A_2$  in (7.8) oder umgekehrt möglich wären. Die Menge  $A_1$  ist aber nicht relativ offen bezüglich  $A$ , denn  $(0, 0) \in A_1$  und  $B_r(0, 0) \cap A_2$  ist nicht leer.

**Theorem 7.26** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist wegzusammenhängend;
2.  $A$  ist zusammenhängend;

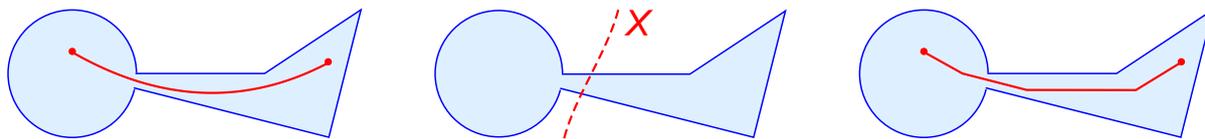


Abbildung 7.2: Wegzusammenhang, Zusammenhang und Polygonzugverbindung.

3. Für jede  $x, y \in A$  gibt es einen Polygonzug innerhalb von  $A$ , der  $x$  und  $y$  verbindet.

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  2) folgt aus Lemma 7.24.

(2  $\Rightarrow$  3) Sei  $x \in A$  und betrachte

$$U_x = \{z \in A; \text{es gibt einen Polygonzug von } x \text{ zu } z \text{ innerhalb von } A\}.$$

Die Menge  $U_x$  ist offen: Sei  $z_1 \in U_x$ . Weil  $U_x \subset A$ , gibt es  $B_r(z_1) \subset A$ . Für  $z_2 \in B_r(z_1)$  kann man den Polygonzug von  $x$  zu  $z_1$  fortsetzen durch Anbinden der Geraden  $[z_1, z_2]$ .

Die Menge  $A \setminus U_x$  ist offen: Sei  $z_1 \in A \setminus U_x$ . Es gibt  $B_r(z_1) \subset A$  und wenn es  $z_2 \in U_x \cap B_r(z_1)$  gebe, so ließe sich der Polygonzug von  $x$  nach  $z_2$  mit der Strecke  $[z_2, z_1]$  zu einem Polygonzug innerhalb von  $A$  von  $x$  nach  $z_1$  erweitern. Dann zerlegt  $U_x, A \setminus U_x$  die Menge  $A$  in zwei nicht-leere offene Mengen und  $A$  wäre nicht zusammenhängend.

(3  $\Rightarrow$  1) Mit einem Polygonzug von  $x$  innerhalb von  $A$  zu  $y$  lässt sich eine verbindende Kurve definieren. ■

**Definition 7.27** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum und sei  $D \subset V$  und  $x \in D$ .

$$K_d = \bigcup \{A \subset D; x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

nennt man die Komponente<sup>2</sup> von  $D$  zu  $x$ .

**Theorem 7.28** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. In jeder beschränkten Komponente von  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}$  gibt es ein lokales Extremum von  $f$ .

**Bemerkung 7.28.1** Wenn  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, gilt ähnliches für jede beschränkte Komponente  $K$  von  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}$  mit  $\bar{K} \subset D$ .

**Beweis.** Sei  $K$  eine solche Komponente und nehmen wir an, dass es  $x^0 \in K$  gibt mit  $f(x^0) > 0$ . Wir beweisen in mehreren Schritten.

1. Wenn  $f(x) > 0$  für ein  $x \in K$ , so gilt dies für alle  $x \in K$ . Denn wenn es  $y \in K$  gibt mit  $f(y) < 0$ , nehme man eine Kurve  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $K$ , die  $x$  und  $y$  verbindet und mit dem Zwischenwertsatz gibt es  $t \in (0, 1)$  mit  $f(w(t)) = 0$ , einen Widerspruch.
2.  $K$  ist offen. Sei  $x \in K$ . Weil  $f(x) > 0$  gilt, ist  $(\frac{1}{2}f(x), \frac{3}{2}f(x))$  offen und wegen der Stetigkeit folgt, dass  $f^{-1}(\frac{1}{2}f(x), \frac{3}{2}f(x))$  offen ist. Das heißt, es gibt  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $y \in B_\delta(x)$  gilt  $f(y) > 0$ . Für alle  $y \in B_\delta(x)$  liegt die Gerade  $[x, y]$  in  $K$ , also gilt  $B_\delta(x) \subset K$ .
3. Für  $x \in \partial K$  gilt  $f(x) = 0$ . Sei  $x \in \partial K$ . Wenn  $f(x) < 0$ , gilt  $x \in f^{-1}(\mathbb{R}^-)$  und weil  $\mathbb{R}^-$  offen ist, folgt aus der Stetigkeit, dass es  $B_r(x) \subset f^{-1}(\mathbb{R}^-)$  gibt und  $x \notin \partial K$ . Wenn  $f(x) > 0$ , dann gibt es  $r > 0$  mit  $f(y) > 0$  für  $y \in B_r(x)$ . Weil  $x \in \partial K$  gibt es  $y^0 \in B_r(x) \cap K$ . Dann liegt auch  $[x, y^0]$  und sogar  $B_r(x)$  in  $K$ , und es gilt  $x \notin \partial K$ . Das heißt  $f(x) \neq 0$  gibt einen Widerspruch und nur  $f(x) = 0$  bleibt übrig.

<sup>2</sup>Eigentlich: Zusammenhangskomponente.

4. Weil  $\bar{K}$  abgeschlossen und beschränkt ist und  $f|_{\bar{K}} : \bar{K} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, hat  $f|_{\bar{K}}$  ein Minimum und ein Maximum auf  $\bar{K}$ .
5. Weil  $f(x) > 0$  für  $x \in K$  und  $f(x) = 0$  für  $x \in \partial K$  finden wir, dass das Maximum streng positiv ist. Nennen wir  $x_{\max} \in K$  die Stelle, wo das globale Maximum von  $f|_{\bar{K}}$  angenommen wird. Weil  $K$  offen ist, liegt  $x_{\max}$  im Inneren von  $K$ . Also gibt es  $B_r(x_{\max}) \subset K$  und außerdem gilt  $f(x_{\max}) \geq f(x)$  für  $x \in B_r(x_{\max})$ . Das wiederum heißt, dass in  $x_{\max}$  die Funktion  $f$  ein lokales Maximum hat.

Wenn es  $x^0 \in K$  gibt mit  $f(x^0) < 0$ , ersetzt man ‘Maximum’ durch ‘Minimum’. ■





# Analysis 2, Woche 8

## Ableitungen in mehr Dimensionen

### 8.1 Partielle Ableitungen

#### 8.1.1 Eine Einführung

Wir haben vorhin Existenzkriterien für Extrema betrachtet, aber wo liegen sie genau? Anders gesagt, wie berechnet man sie? In einer Dimension hat man die betreffende Funktion differenziert, die Ableitung gleich null gesetzt und so die Kandidaten für Extrema gefunden. Dazu mußte man aber erst untersuchen wie man eine Ableitung findet. In höheren Dimensionen braucht man für ein Extremum jedoch mindestens, dass die betreffende Funktion  $x \mapsto F(x)$ , betrachtet als Funktion jeder einzelnen Variablen, also  $x_i \mapsto F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , ein Extremum hat. Dies ist übrigens eine notwendige aber nicht eine ausreichende Bedingung für ein Extremum.

*Um  $x_i \mapsto F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  auf Extrema zu untersuchen, brauchen wir die partiellen Ableitungen.*

Wir beschreiben nochmals kurz die Differenzierbarkeit für Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen.

**Wiederholung 8.1** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- $f$  heißt differenzierbar in  $a \in \mathbb{R}$ , wenn der Limes vom Differenzenquotient existiert:

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}. \quad (8.1)$$

Die Differenzierbarkeit in  $a$  ist äquivalent zu:

- Es existiert ein Polynom ersten Grades  $\ell(x) = f(a) + c(x - a)$  derart, dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - \ell(x)|}{|x - a|} = 0. \quad (8.2)$$

Es gilt  $c = f'(a)$ . Die Äquivalenz findet man, weil  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  das gleiche bedeutet wie jede der folgenden Behauptungen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - a} = 0 \end{aligned}$$

Die Funktion  $\ell$  beschreibt die Tangente an  $f$  in  $a$  und so bedeutet Differenzierbarkeit in  $a$ , wieder betrachtet wie in (8.2), jedoch jetzt mit dem Klein-O-Symbol von Landau geschrieben:

- Es gibt eine Funktion  $\ell$  ersten Grades derart, dass

$$f(x) - \ell(x) = o(|x - a|) \text{ für } x \rightarrow a.$$

### 8.1.2 Die Definition und einige Beispiele

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es viele Möglichkeiten, eine Tangentialrichtung zu betrachten.

**Definition 8.1** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor:

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{1 \text{ an } i\text{-ter Stelle}}{1}, 0, \dots, 0).$$

Man nennt  $f$  **partiell differenzierbar** in  $a$  für die  $i$ -te Veränderliche, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} \text{ existiert.}$$

Man schreibt

$$\partial_i f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}.$$

und nennt  $\partial_i f(a)$  die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $a$ .

**Bemerkung 8.1.1** Man kann diese Ableitung auch definieren durch das „Einfrieren“ aller Koordinaten, ausgenommen der  $i$ -ten. Anders gesagt, betrachte  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

und man bekommt  $\partial_i f(a) = g'(a_i)$ .

**Bemerkung 8.1.2** Man begegnet mehreren Notationen für die partiellen Ableitungen von  $x \mapsto f(x)$  in  $x = a$ :

$$\partial_i f(a) = \partial_{x_i} f(a) = D_{x_i} f(a) = f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)_{x=a}.$$

Meistens ist klar, welche partielle Ableitung gemeint ist. Nur bei so etwas wie  $f_{x_2}(x_2, x_1)$  könnte man Probleme bekommen. Ist da  $\partial_1 f(x_2, x_1)$  oder  $\partial_2 f(x_2, x_1)$  gemeint?

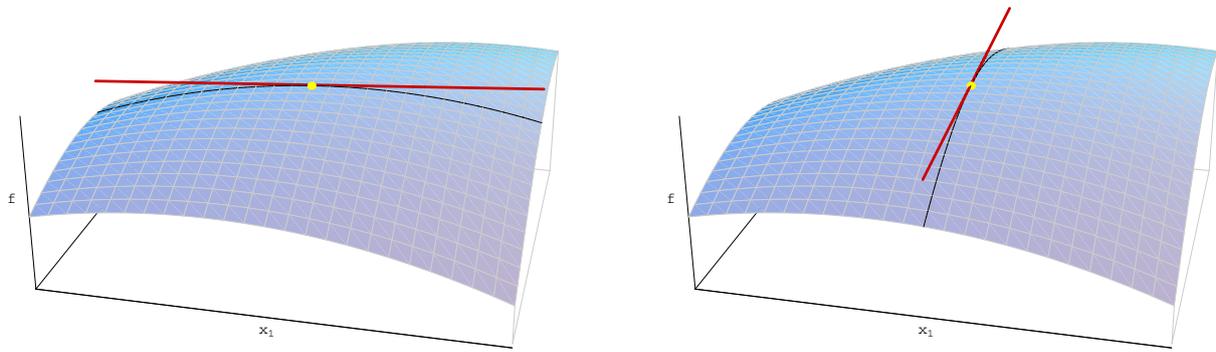


Abbildung 8.1: Für Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man eine Skizze herstellen;  $\partial_1 f(a)$  ist die Steigung der Tangente in  $x_1$ -Richtung und  $\partial_2 f(a)$  die Steigung der Tangente in  $x_2$ -Richtung.

**Definition 8.2** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $a \in \mathbb{R}^n$ . Wenn alle  $n$  partiellen Ableitungen von  $f$  in  $a$  existieren, schreibt man

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a)). \quad (8.3)$$

Zum Symbol  $\nabla$  sagt man ‘nabla’ und  $\nabla f(a)$  nennt man den **Gradienten** von  $f$  in  $a$ .

**Bemerkung 8.2.1** Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist  $\partial_i f(a)$ , wenn es existiert, ein Spaltenvektor und  $\nabla f(a)$  ist eine  $n \times m$ -Matrix:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix wird **Jacobimatrix** genannt.

**Beispiel 8.3** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x_1, x_2) = x_1 + \sin(x_1 x_2^2)$ . Dann gilt

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 1 + x_2^2 \cos(x_1 x_2^2) \text{ und } \partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2).$$

Auch höhere Ableitungen sind möglich:

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) &= \partial_1 (1 + x_2^2 \cos(x_1 x_2^2)) = -x_2^4 \sin(x_1 x_2^2), \\ \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) &= \partial_2 (1 + x_2^2 \cos(x_1 x_2^2)) = 2x_2 \cos(x_1 x_2^2) - 2x_2^3 \sin(x_1 x_2^2), \\ \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) &= \partial_1 (2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2)) = 2x_2 \cos(x_1 x_2^2) - 2x_2^3 \sin(x_1 x_2^2), \\ \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) &= \partial_2 (2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2)) = 2x_1 \cos(x_1 x_2^2) - 4x_1^2 x_2^2 \sin(x_1 x_2^2). \end{aligned}$$

Man sieht  $\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2)$ .

**Beispiel 8.4** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ist nicht nur stetig, sondern hat auch partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Die ersten Ableitungen sind<sup>1</sup>

$$\partial_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

und

$$\partial_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4 x + 3y^2 x^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5 - 0^2 h^3}{(0^2 + h^2)^2} - 0}{h} = 1, \\ \partial_1 \partial_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^4 h + 3 \cdot 0^2 h^3}{(h^2 + 0^2)^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

### 8.1.3 Einige Ergebnisse zu partiellen Ableitungen

**Theorem 8.5 (Vertauschungssatz)** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wenn  $f$ ,  $\partial_1 f$ ,  $\partial_2 f$ ,  $\partial_1 \partial_2 f$  und  $\partial_2 \partial_1 f$  stetig sind in  $D$ , dann gilt  $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$ .

**Bemerkung 8.5.1** Man kann die Bedingungen im Theorem noch ein wenig lockern. Suchen Sie in der Literatur nach dem Vertauschungssatz von Schwarz.

**Beweis.** Sei  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in D$  derart, dass  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subset D$  nicht leer ist. Betrachte

$$g(x) = f(x, y_1) - f(x, y_0) \quad \text{und} \quad h(y) = f(x_1, y) - f(x_0, y).$$

Es gilt

$$g(x_1) - g(x_0) = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1) + f(x_0, y_0) = h(y_1) - h(y_0)$$

und wegen des Mittelwertsatzes gibt es derartige  $\xi \in (x_0, x_1)$  und  $\eta \in (y_0, y_1)$ , dass

$$(x_1 - x_0) g'(\xi) = g(x_1) - g(x_0) = h(y_1) - h(y_0) = (y_1 - y_0) h'(\eta),$$

und anders gesagt:

$$(x_1 - x_0) \left( \partial_1 f(\xi, y_1) - \partial_1 f(\xi, y_0) \right) = (y_1 - y_0) \left( \partial_2 f(x_1, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta) \right).$$

Nochmals den Mittelwertsatz anwenden liefert  $\tilde{\eta} \in (y_0, y_1)$  und  $\tilde{\xi} \in (x_0, x_1)$  mit

$$(x_1 - x_0) (y_1 - y_0) \partial_2 \partial_1 f(\xi, \tilde{\eta}) = (y_1 - y_0) (x_1 - x_0) \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \eta).$$

<sup>1</sup>Außerhalb  $(0, 0)$  ist  $f$  definiert als rationale Funktion und man verwendet die Standardableitungsregeln. In  $(0, 0)$  braucht man die Definition:

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Das heißt, für jede  $x_1 > x_0$  und  $y_1 > y_0$  gibt es  $(\xi, \tilde{\eta}), (\tilde{\xi}, \eta) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$  mit

$$\partial_2 \partial_1 f(\xi, \tilde{\eta}) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \eta).$$

Weil  $\partial_1 \partial_2 f$ , und  $\partial_2 \partial_1 f$  stetig sind, gilt

$$\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0) = \lim_{(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \tilde{\eta}) = \lim_{(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)} \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \eta) = \partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0).$$

Sowohl  $\xi, \eta$  als auch  $\tilde{\xi}$  und  $\tilde{\eta}$  hängen von  $(x_1, y_1)$  ab. Weil  $\xi, \tilde{\xi} \in (x_0, x_1)$  und  $\eta, \tilde{\eta} \in (y_0, y_1)$  folgt, wenn  $(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)$ , dass auch  $(\xi, \tilde{\eta}) \rightarrow (x_0, y_0)$  und  $(\tilde{\xi}, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$ . ■

**Proposition 8.6** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in D$  ein Extremum hat, und wenn die partiellen Ableitungen in  $a$  existieren, dann gilt  $\nabla f(a) = 0$ .

**Beweis.** Wenn  $\partial_i f(a) \neq 0$ , dann betrachtet man  $g(t) = f(a + te_i)$  und geht voran wie in einer Dimension (Satz 11.4 Analysis 1). ■

**Definition 8.7** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in D$ . Wenn für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\nabla f(a) = 0$ , dann nennt man  $a$  einen **stationären Punkt** für  $f$ .

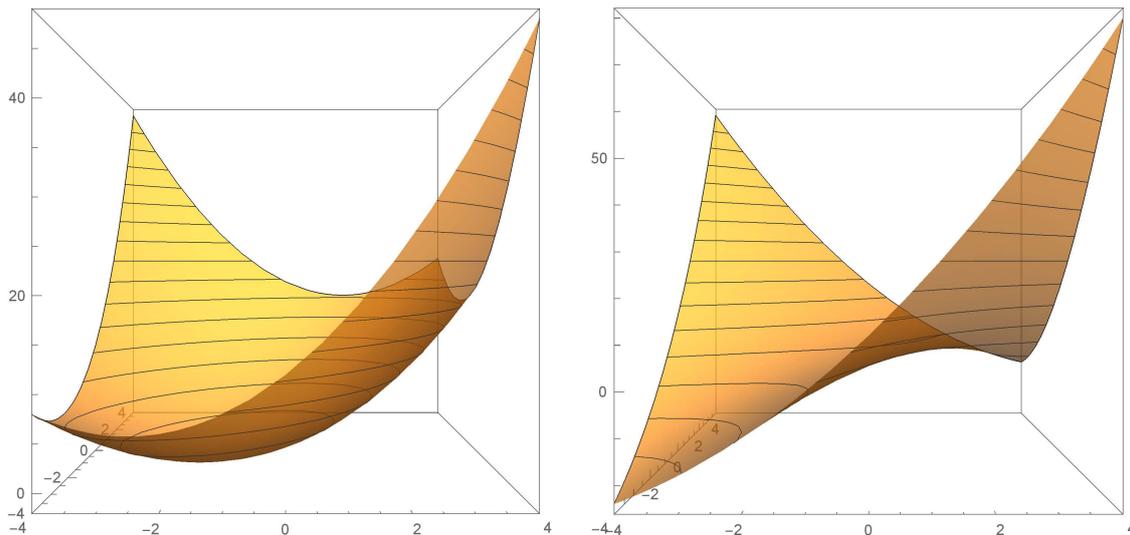


Abbildung 8.2: Skizzen zu  $p_1$  und  $p_2$  aus Beispiel 8.8. Niveaulinien beider Funktionen sind angegeben.

**Beispiel 8.8** Betrachten wir die Polynome  $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ und } p_2(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + x + y.$$

Die stationären Punkt(e) sind für  $p_1$ :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-1, -1),$$

und für  $p_2$ :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2y - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1).$$

Man kann sich überzeugen, dass nur  $p_1$  ein Extremum (Minimum) hat.

## 8.2 Richtungsableitungen

Bei Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat man auch linke und rechte Ableitungen definiert. Auch in höheren Dimensionen hat man ähnliches. Statt links und rechts gibt es nun mehrere Richtungen.

**Definition 8.9** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$ . Wenn sie existiert, nennt man

$$\partial_v f(a) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  in Richtung  $v$ .

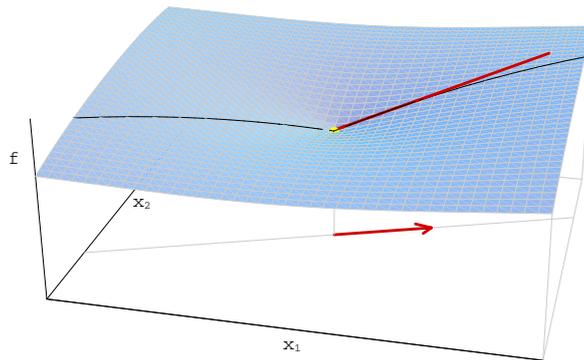


Abbildung 8.3: Für Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man eine Skizze herstellen;  $\partial_v f(a)$  ist die Steigung der Tangente in  $v$ -Richtung. Der gelbe Punkt zeigt  $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$  und der rote Pfeil soll  $v$  darstellen.

**Bemerkung 8.9.1** Als alternative Definition kann man auch sagen: es gibt  $\ell_v \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{|f(a + tv) - f(a) - \ell_v t|}{t} = 0;$$

und man definiert  $\partial_v f(a) = \ell_v$ . Oft schreibt man auch  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  oder  $\frac{\partial}{\partial v} f(a)$  statt  $\partial_v f(a)$ .

Wenn  $\partial_{e_i} f(a)$  und  $\partial_{-e_i} f(a)$  existieren und  $\partial_{e_i} f(a) = -\partial_{-e_i} f(a)$ , dann existiert die  $i$ -te partielle Ableitung und es gilt

$$\partial_i f(a) = \partial_{e_i} f(a) = -\partial_{-e_i} f(a).$$

**Beispiel 8.10** Betrachten wir die Euklidische Norm  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  also  $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Dann gilt

$$\nabla \|x\| = \frac{x}{\|x\|} \text{ für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Sie hat in 0 keine partiellen Ableitungen. Trotzdem existiert an der Stelle 0 in jede Richtung die Richtungsableitung:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\|0 + tv\| - \|0\|}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{|t| \|v\|}{t} = \|v\| = 1.$$

**Beispiel 8.11** Die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x, y) = 2\sqrt[5]{x^2 y^2}$  hat partielle Ableitungen in  $(0, 0)$ , aber keine Richtungsableitungen in  $(0, 0)$  außer die in  $\pm e_1$  und  $\pm e_2$ -Richtung.

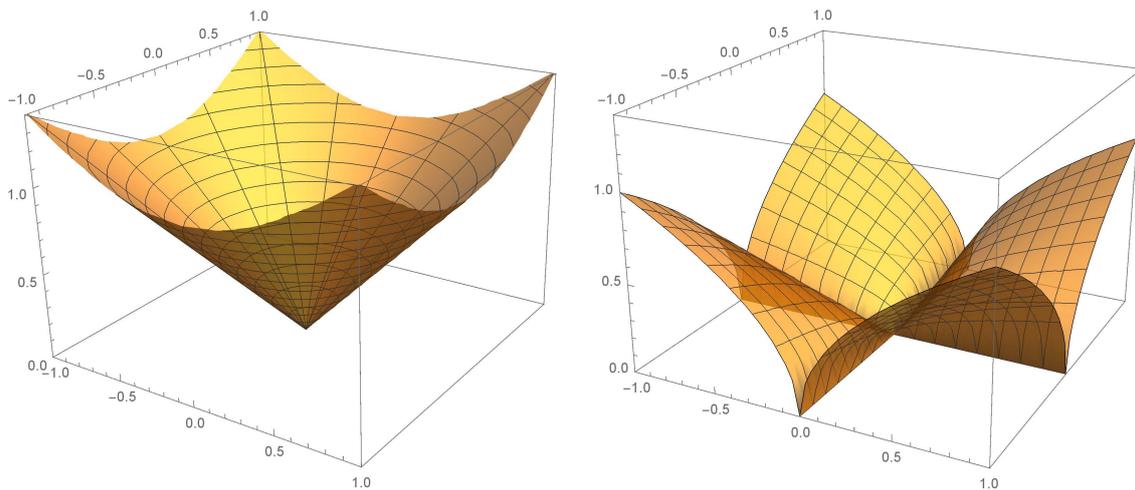


Abbildung 8.4: Skizzen zu Beispiel 8.10 (links) und Beispiel 8.11 (rechts).

**Beispiel 8.12** Betrachten wir die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^4)^2}{|x|^3 + |y|^7} - x^2 y^2 & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

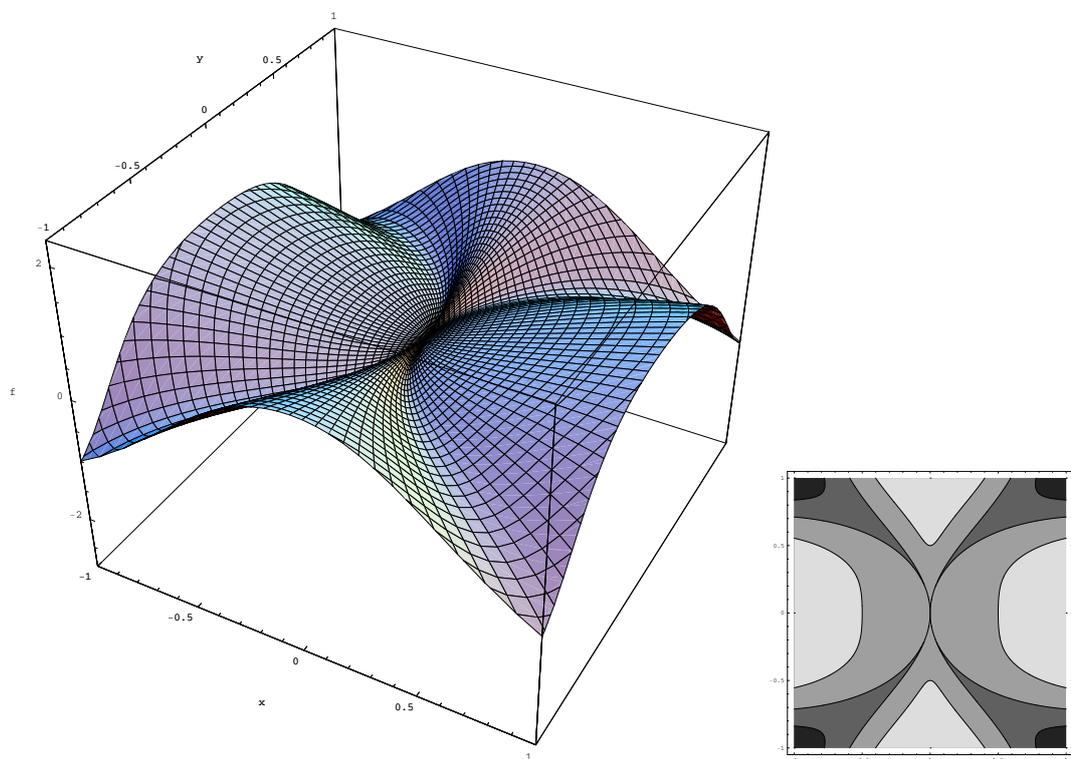


Abbildung 8.5: Skizzen des Graphen und von einigen Niveaumengen zu Beispiel 8.12. Auf geradem Weg aus 0 geht es immer hinauf, und trotzdem kann man aus 0 hinunter gehen.

Es gilt

$$\partial_{e_2} f(0, 0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\frac{(0 - t^4)^2}{0 + t^7} - 0}{t} = 1$$

und auch  $\partial_{-e_2}f(0,0) = 1$ . Wenn  $u_1 \neq 0$  hat man

$$\begin{aligned}\partial_u f(0,0) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\frac{((tu_1)^2 - (tu_2)^4)^2}{|tu_1|^3 + |tu_2|^7} - t^4 u_1^2 u_2^2 - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{(u_1^2 - t^2 u_2^4)^2}{|u_1|^3 + t^4 |u_2|^7} - t^3 u_1^2 u_2^2 \right) = \frac{u_1^4}{|u_1|^3} = |u_1|.\end{aligned}$$

Wir finden, dass für jede Richtung  $u$  die Ableitung  $\partial_u f(0,0)$  existiert und

$$\partial_u f(0,0) > 0.$$

Trotzdem hat sie kein Minimum in  $(0,0)$ , denn  $f(t^2, t) = -t^6$ .

**Lemma 8.13** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in U$ . Wenn  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  eine partielle Ableitung  $\partial_u f(a)$  hat und  $\partial_u f(a) < 0$ , dann hat  $f$  kein Minimum in  $a$ .

Wenn man sich auf partielle und Richtungsableitungen beschränkt, zeigen die Beispiele, dass man nur schwache Aussagen machen kann bezüglich eines Extremwertes.

# Analysis 2, Woche 9

## Mehrdimensionale Differentialrechnung I



### 9.1 Differenzierbarkeit

**Definition 9.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion und  $a \in U$ . Die Funktion  $f$  heißt differenzierbar in  $a$ , wenn es eine lineare Abbildung  $M_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt derart, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - (f(a) + M_a(x - a))\|}{\|x - a\|} = 0. \quad (9.1)$$

Man nennt  $M_a$  die (totale) Ableitung von  $f$  in  $a$  und  $df(a, h) = M_a(h)$  das Differential.

**Bemerkung 9.1.1** Wenn  $f$  für alle  $a \in U$  differenzierbar ist, dann ist das Differential  $df$  eine Funktion von  $U \times \mathbb{R}^m$  zu  $\mathbb{R}^n$ . Oft gibt man die Variablen in  $U \times \mathbb{R}^m$  an mit  $(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m)$ .

**Bemerkung 9.1.2** Jede lineare Abbildung  $M_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  kann man mit Hilfe einer Matrix  $\mathbf{M}_a \in M^{n \times m}(\mathbb{R})$  schreiben. Wenn wir  $h \in \mathbb{R}^m$  als Spaltenvektor schreiben, hat man

$$M_a(h) = \mathbf{M}_a h. \quad (9.2)$$

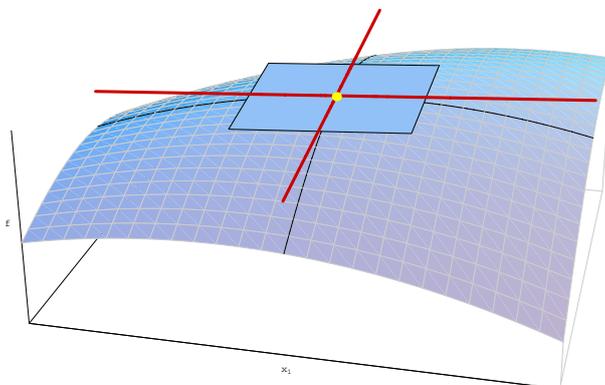


Abbildung 9.1: Für Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man eine Skizze herstellen. Differenzierbarkeit bedeutet, dass es eine anliegende Tangentialfläche gibt.

**Bemerkung 9.1.3** Für eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibt  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) := f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) (x_2 - a_2)$$

die Tangentialebene an  $f$  in  $a$ . Anders gesagt:  $g$  ist die Approximation erster Ordnung<sup>1</sup> von  $f$  in einer Umgebung von  $a$ . So gesehen bedeutet „ $f$  ist differenzierbar in  $a$ “ das gleiche wie „es existiert ein Polynom vom Grad kleiner gleich 1, das  $f$  bei  $a$  mit erster Ordnung approximiert“.

Salopp kann man sagen: es gibt ein Polynom  $x \mapsto g(x)$  vom Grad höchstens eins derart, dass  $\|f(x) - g(x)\|$  wesentlich schneller nach 0 geht als  $\|x - a\|$  für  $x \rightarrow a$ .

**Lemma 9.2** Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion und  $a \in U$ . Die Funktion  $f$  ist differenzierbar in  $a$ , genau dann, wenn jede Komponente  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$  differenzierbar ist in  $a$ .

**Beweis.** Man verwendet, dass  $\|\cdot\|_1$ -Norm und Euklidische Norm in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind: es gibt  $C_1$  und  $C_2 > 0$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - M_a(x - a)\| &\leq C_1 \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(a) - (M_a(x - a))_i| \\ \|f(x) - f(a) - M_a(x - a)\| &\geq C_2 \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(a) - (M_a(x - a))_i| \end{aligned}$$

und bemerkt, dass (9.1) nur für  $f$  gilt, wenn es für jede Funktion  $f_i$  gilt. ■

Dieses Lemma sagt uns, dass wir uns weiterhin ohne Verlust der Allgemeinheit beschränken dürfen auf  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lemma 9.3** Wenn  $f$  differenzierbar ist in  $a$ , dann ist  $f$  stetig in  $a$ .

**Beweis.** Man hat

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - (f(a) + M_a(x - a))\| + \|M_a(x - a)\|.$$

Wegen (9.1) folgt  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - (f(a) + M_a(x - a))\| = 0$  und mit<sup>2</sup>

$$\|M_a(x - a)\| \leq \|M_a\| \|x - a\|$$

folgt  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| = 0$ . ■

**Lemma 9.4** Wenn  $f$  differenzierbar ist in  $a$ , dann existieren die partiellen Ableitungen in  $a$  und es gilt  $M_a(x - a) = \nabla f(a)(x - a)$  mit  $x - a$  als Spaltenvektor.

<sup>1</sup>Man sagt eine Funktion  $g$  approximiert  $f$  mit Ordnung  $k$  in einer Umgebung von  $a$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - a\|^k} = 0.$$

<sup>2</sup>Die Norm einer Matrix  $M \in M^{n \times m}(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$\|M\| = \sup \{\|Mx\|; x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\| = 1\}.$$

**Beweis.** Betrachtet man nur spezielle Richtungen für  $x \rightarrow a$ , nämlich die parallel zu den Achsen, dann vereinfacht sich (9.1) für die  $i$ -te Richtung zu

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{\left\| f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - \left( f(a) + M_a(0, \dots, 0, x_i - a_i, 0, \dots, 0)^\top \right) \right\|}{|x_i - a_i|}.$$

Das kleine T-Zeichen ( $^\top$ ) bedeutet transponiert. Weil dieser Limes existiert, hat man die partielle Ableitung in der  $i$ -ten Richtung und

$$\partial_i f(a) = M_a(e_i).$$

Es folgt  $M_a = \nabla f(a)$ . ■

**Theorem 9.5** *Wenn die partiellen Ableitungen  $\partial_i f$  existieren in einer Umgebung von  $a$  und sie stetig sind in  $a$ , dann ist  $f$  differenzierbar in  $a$ .*

**Beweis.** Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, a_n) + \\ &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, a_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \\ &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - f(x_1, x_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \\ &+ \dots + \\ &+ f(x_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

Verwenden wir den Mittelwertsatz  $n$ -mal, dann gibt es  $\xi_i$  zwischen  $x_i$  und  $a_i$  derart, dass

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) (\partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - \partial_i f(a)). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Stetigkeit der partiellen Ableitungen in  $a$  erlaubt uns, eine Umgebung  $B_\delta(a)$  von  $a$  zu wählen derart, dass für  $x \in B_\delta(a)$  gilt

$$\|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\| \leq \frac{1}{n} \varepsilon.$$

Man soll bemerken, dass für  $x \in B_\delta(a)$  auch  $(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in B_\delta(a)$  gilt.

Mit (9.3) finden wir

$$\|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \frac{1}{n} \varepsilon \leq \|x - a\| \varepsilon.$$

Das heißt, für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  derart, dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon.$$

Anders gesagt:  $f$  ist differenzierbar in  $a$  und  $M_a(x - a) = \nabla f(a)(x - a)$ . ■

**Lemma 9.6** Wenn  $f$  differenzierbar ist in  $a$ , dann existieren die Richtungsableitungen  $\partial_u f(a)$  in  $a$  für  $\|u\| = 1$  und es gilt  $\partial_u f(a) = \nabla f(a) u$ .

**Beweis.** Betrachtet man nur die  $u$ -Richtung für  $x \rightarrow a$ , dann vereinfacht sich (9.1) zu

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\|f(a + tu) - (f(a) + t M_a(u))\|}{t} = 0,$$

und man findet, dass  $\partial_u f(a)$  existiert und dass

$$\partial_u f(a) = M_a(u) = \sum_{i=1}^m u_i M_a(e_i) = \nabla f(a) u.$$

■

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn  $\partial_u f(a) = -\partial_{-u} f(a)$  gilt, die Funktion  $g(t) = f(a + tu)$  differenzierbar ist in  $t = 0$ . Salopp gesagt: der Graph von  $f$  hat in  $a$  eine Tangente in die  $u$ -Richtung.

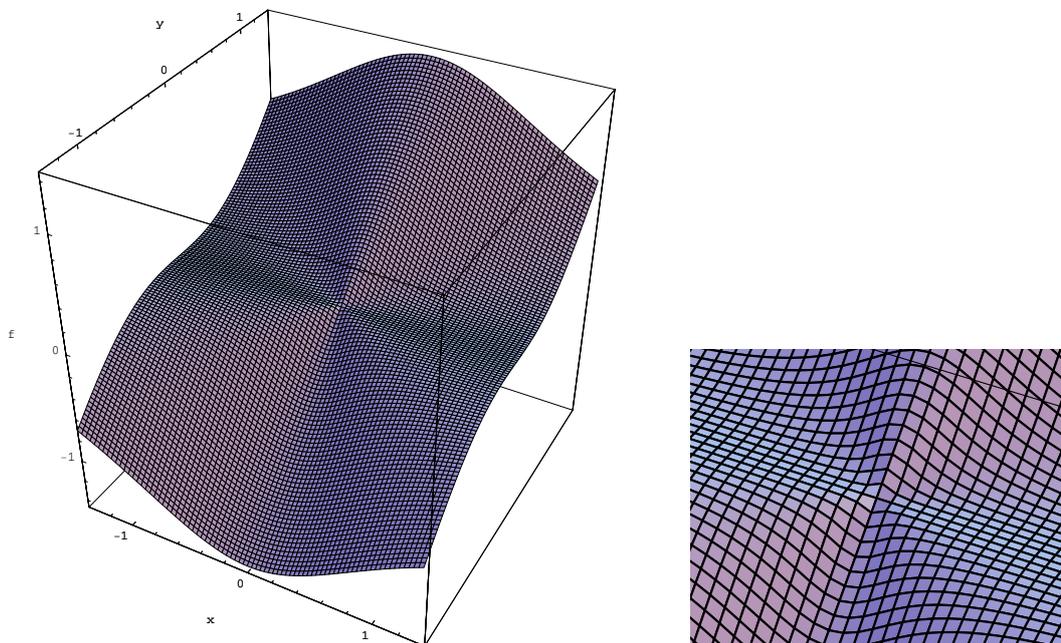


Abbildung 9.2: Eine Skizze zu Beispiel 9.7 mit einer Vergrößerung.

**Beispiel 9.7** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0, \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar sowohl in  $x$ , als auch in  $y$ -Richtung. Sogar gilt  $\partial_u f(0, 0) = -\partial_{-u} f(0, 0)$  in jede Richtung  $u$ . Trotz allem ist  $f$  nicht differenzierbar in  $a$ . Man findet  $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ . Setzt man  $(x, y) = (t, t)$  mit  $t > 0$ , dann folgt

$$\frac{\|f(x, y) - f(0) - \nabla f(0) \cdot (x - 0, y - 0)\|}{\|(x - 0, y - 0)\|} = \frac{\left| \frac{t^3}{t^2 + t^2} - 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \right|}{\|(t, t)\|} = \frac{\frac{1}{2}t}{\sqrt{2}t} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass differenzierbar wesentlich mehr ist als nur die Existenz partieller oder Richtungsableitungen.

### 9.1.1 Bedeutung des Gradienten und Beispiele

**Korollar 9.8** Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist in  $a$  und  $\nabla f(a) \neq 0$ , dann ist die Richtung  $u$ , bei der die maximale Richtungsableitung  $\partial_u f(a)$  erreicht wird:

$$u_{\max} = \frac{(\nabla f(a))^\top}{\|\nabla f(a)\|}.$$

**Beweis.** Bemerke, dass  $\nabla f(a) \cdot u = (\nabla f(a))^\top \cdot u$ . Setze  $w = (\nabla f(a))^\top$ . Cauchy-Schwarz sagt, dass

$$w \cdot u \leq \|w\| \|u\|.$$

Außerdem gilt für  $u = \frac{w}{\|w\|}$ , dass

$$w \cdot u = w \cdot \frac{w}{\|w\|} = \|w\| = \|w\| \|u\|.$$

Die größte Richtungsableitung von  $f$  in  $a$  ist also die in der Richtung von  $(\nabla f(a))^\top$ , und  $u_{\max}$  ist genau der zugehörige Vektor mit Länge 1. ■

**Definition 9.9** Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das Urbild von  $c \in \mathbb{R}$ , also  $f^{-1}(\{c\})$ , nennt man eine **Niveaumenge** von  $f$ . Im Fall  $m = 2$  und wenn  $f$  differenzierbar ist und  $\nabla f(a) \neq 0$ , werden wir noch zeigen, dass so eine Niveaumenge in einer Umgebung von  $a$  eine Kurve definiert. Oft nennt man die Niveaumenge dann eine **Niveaulinie**.

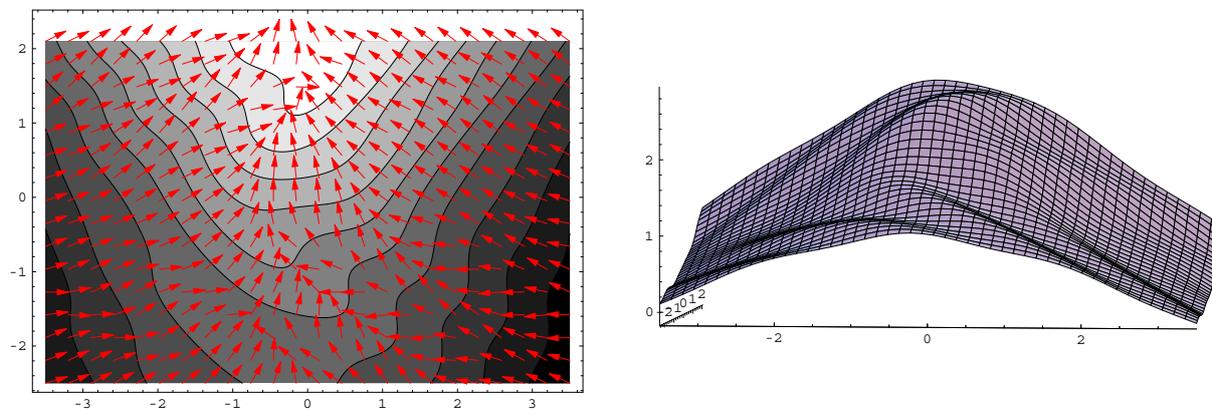


Abbildung 9.3: Links eine Skizze der Niveaulinien und die Richtungen der Gradienten einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ; rechts eine Skizze dieser Funktion.

**Bemerkung 9.9.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

1. Wenn  $f$  differenzierbar ist in jedem  $x \in U$ , dann nennt man  $f$  differenzierbar auf  $U$ .
2. Wenn  $f$  differenzierbar ist in  $a \in U$  und außerdem  $\nabla f$  stetig ist in  $a$ , nennt man  $f$  stetig differenzierbar in  $a$ .
3. Wenn  $f$  stetig differenzierbar ist in jedem  $x \in U$ , dann nennt man  $f$  stetig differenzierbar auf  $U$ .

Um  $m$ -te Ableitungen von  $f$  in  $a$  zu definieren, benötigt man die Existenz der  $(m - 1)$ -ten Ableitungen von  $f$  in einer Umgebung von  $a$ . Partielle Ableitungen können aber existieren, ohne dass  $f$  differenzierbar ist. Wir legen mal genau fest was wir meinen mit  $m$ -mal differenzierbar.

**Definition 9.10** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in U$ . Man sagt,  $f$  ist  $m$ -mal differenzierbar in  $a$ , wenn für jedes  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| < m$  gilt:

- $\partial^\alpha f$  existiert in  $B_r(a)$ , und
- $\partial^\alpha f$  ist differenzierbar in  $a$ .

Die Multiindexnotation für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  ist wie folgt:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{und} \quad \partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f. \quad (9.4)$$

**Bemerkung 9.10.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wenn  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist,  $f$  stetig differenzierbar ist in  $U$  und  $\nabla f$  stetig fortsetzbar ist auf  $\bar{U}$ , dann nennt man  $f$  stetig differenzierbar auf  $\bar{U}$  und schreibt  $u \in C^1(\bar{U})$ . Diese Fortsetzung von  $\nabla f$  wird wiederum  $\nabla f$  genannt. Man kann zeigen, dass  $(C^1(\bar{U}), \|\cdot\|_{C^1(\bar{U})})$  mit

$$\|f\|_{C^1(\bar{U})} = \sup_{x \in \bar{U}} |f(x)| + \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \bar{U}} |\partial_i f(x)|$$

ein normierter Vektorraum ist.

Rekursiv definiert man  $C^k(\bar{U})$  für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , indem man sagt, dass  $f \in C^k(\bar{U})$ , wenn  $f \in C^1(\bar{U})$  und  $\partial_i f \in C^{k-1}(\bar{U})$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Beispiel 9.11** In Analysis 2 von W. Walter findet man folgendes Beispiel:

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ y \left( \frac{|y|}{x^2} - 1 \right) & \text{für } -x^2 < y < x^2, \\ y + x^2 & \text{für } y \leq -x^2. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$ . Es existieren sogar die zweiten (partiellen) Ableitungen in  $(0, 0)$ . Trotzdem ist  $\partial_2 f$  nicht stetig in  $(0, 0)$ . Dann ist  $f$  auch nicht stetig differenzierbar in  $(0, 0)$ . Eine Skizze findet man in Abbildung 9.2.

## 9.1.2 Zusammenfassung

Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in U$ .

die partiellen Ableitungen existieren in  $B_r(a)$  und sind stetig in  $a$

$\Rightarrow$   
 $\neq$

differenzierbar in  $a$

$\Rightarrow$   
 $\neq$

stetig in  $a$

$\nRightarrow$

$\nRightarrow$

die partiellen Ableitungen existieren in  $a$

$\nRightarrow$   
 $\neq$

die Richtungsableitungen existieren in  $a$

Für  $f$  differenzierbar in  $a \in U$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $\|u\| = 1$  gilt:

$$\partial_u f(a) = df(a, u) = \nabla f(a) \cdot u$$

Nimmt man  $x \in U$  und  $dx = (dx_1, \dots, dx_m) \in \mathbb{R}^m$ , so wird dies auch geschrieben als:

$$df(x, dx) = \nabla f(x) \cdot dx$$

## 9.2 Rechenregeln

Die Summen- und Produktregeln sind fast wie früher in einer Dimension.

- Wenn  $f, g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind in  $a$ , dann ist  $f + g$  differenzierbar in  $a$  und

$$\nabla(f + g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a).$$

- Wenn  $f, g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind in  $a$ , dann ist  $gf$  differenzierbar in  $a$  und

$$\nabla(gf)(a) = g(a)\nabla f(a) + (\nabla g(a))f(a).$$

Auch der Beweis ist wie in einer Dimension.

Bei der Kettenregel vereinfacht sich die Notation, wenn wir Matrizen verwenden. Schreiben wir die Koordinaten als Spaltenvektor und setzen wir für  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $a \in U$ , dann finden wir

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_m f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_m f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \partial_2 f_n(a) & \dots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix}.$$

**Lemma 9.12 (Kettenregel)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  und  $V \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $a \in U$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar in  $a$ ,  $f(U) \subset V$  und  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $f(a)$ . Dann ist  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $a$  und

$$\nabla(g \circ f)(a) = \nabla g(f(a)) \nabla f(a). \quad (9.5)$$

**Bemerkung 9.12.1** Man bemerke, dass  $\nabla(g \circ f)(a) \in M^{n \times m}(\mathbb{R})$ ,  $\nabla g(f(a)) \in M^{n \times k}(\mathbb{R})$  und  $\nabla f(a) \in M^{k \times m}(\mathbb{R})$ . In (9.5) steht also ein Produkt zweier Matrizen und kein Skalarprodukt.

**Beweis.** Weil  $f$  differenzierbar ist in  $a$  gilt

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + r(x) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x - a\|} = 0. \quad (9.6)$$

Setze  $b = f(a)$ . Weil  $g$  differenzierbar ist in  $b$  gilt

$$g(y) = g(b) + \nabla g(b)(y - b) + s(y) \quad (9.7)$$

mit  $\lim_{y \rightarrow b} \frac{s(y)}{\|y-b\|} = 0$ . Wir setzen  $S : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$S(y) = \begin{cases} \frac{s(y)}{\|y-b\|} & \text{für } y \neq b \\ 0 & \text{für } y = b \end{cases}$$

und bemerken, dass

$$\lim_{y \rightarrow b} S(y) = 0. \quad (9.8)$$

Kombinieren von (9.6) und (9.7) liefert uns<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(a) + \nabla g(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x)) = \\ &= (g \circ f)(a) + \nabla g(b) \nabla f(a)(x - a) + \nabla g(b)r(x) + \\ &\quad + \|\nabla f(a)(x - a) + r(x)\| S(b + \nabla f(a)(x - a) + r(x)), \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} &\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - \nabla g(b) \nabla f(a)(x - a)}{\|x - a\|} = \\ &= \nabla g(b) \frac{r(x)^\top}{\|x - a\|} + \frac{\|\nabla f(a)(x - a) + r(x)\|}{\|x - a\|} S(b + \nabla f(a)(x - a) + r(x)). \end{aligned}$$

Weil

$$\frac{\|\nabla f(a)(x - a) + r(x)\|}{\|x - a\|} \leq \|\nabla f(a)\| + \frac{\|r(x)\|}{\|x - a\|}$$

und diese rechte Seite wegen (9.6) beschränkt ist, und weil  $\lim_{x \rightarrow a} (\nabla f(a)(x - a) + r(x)) = 0$  gilt, finden wir mit nochmals (9.6) und (9.8), dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - \nabla g(f(a)) \nabla f(a)(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Das heißt,  $g \circ f$  ist differenzierbar in  $a$  und  $\nabla(g \circ f)(a) = (\nabla g)(f(a)) \nabla f(a)$ . ■

### 9.3 Extremum

Wenn  $f$  differenzierbar ist in  $a$  und  $f$  in  $a$  einen Extremwert erreicht, dann gilt wegen Proposition 8.6, dass  $\nabla f(a) = 0$ . Wenn  $\nabla f(a) = 0$  gilt, ist noch nicht geklärt, ob es tatsächlich in  $a$  einen Extremwert gibt. In einer Dimension hat eine zweimal differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Minimum in  $a$ , wenn  $f'(a) = 0$  und  $f''(a) > 0$ . Und wenn  $f$  ein Minimum in  $a$  hat, dann gilt  $f'(a) = 0$  und  $f''(a) \geq 0$ . Die zweite Ableitung ist positiv bedeutet, dass diese Funktion  $f$  in  $a$  ‘aufwärts gekrümmt’ ist. Kann man auch in höheren Dimensionen ähnliche Argumente benutzen, um auf ein Minimum zu schließen? Dazu erstmal ein Beispiel.

<sup>3</sup>Wir schreiben hier Vektorfunktionen als Spalten. Zum Beispiel:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 9.13** Betrachten wir  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$  und  $g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ . Anhand der Höhenlinien lässt sich vermuten, dass nur  $g$  in  $(0, 0)$  ein Minimum hat. Das kann man auch beweisen. Weil

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2$$

folgt  $2xy \geq -\frac{1}{2}x^2 - 2y^2$  und

$$g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 \geq x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 + 3y^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2.$$

Man sieht  $g(x, y) > 0$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Weil

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

sieht man, dass man über die Gerade  $x + \frac{3}{2}y = 0$  negative Werte von  $f$  erreicht und  $f$  in  $(0, 0)$  kein Minimum hat. Skizzen zu  $f$  und  $g$  findet man in Abbildung 9.4.

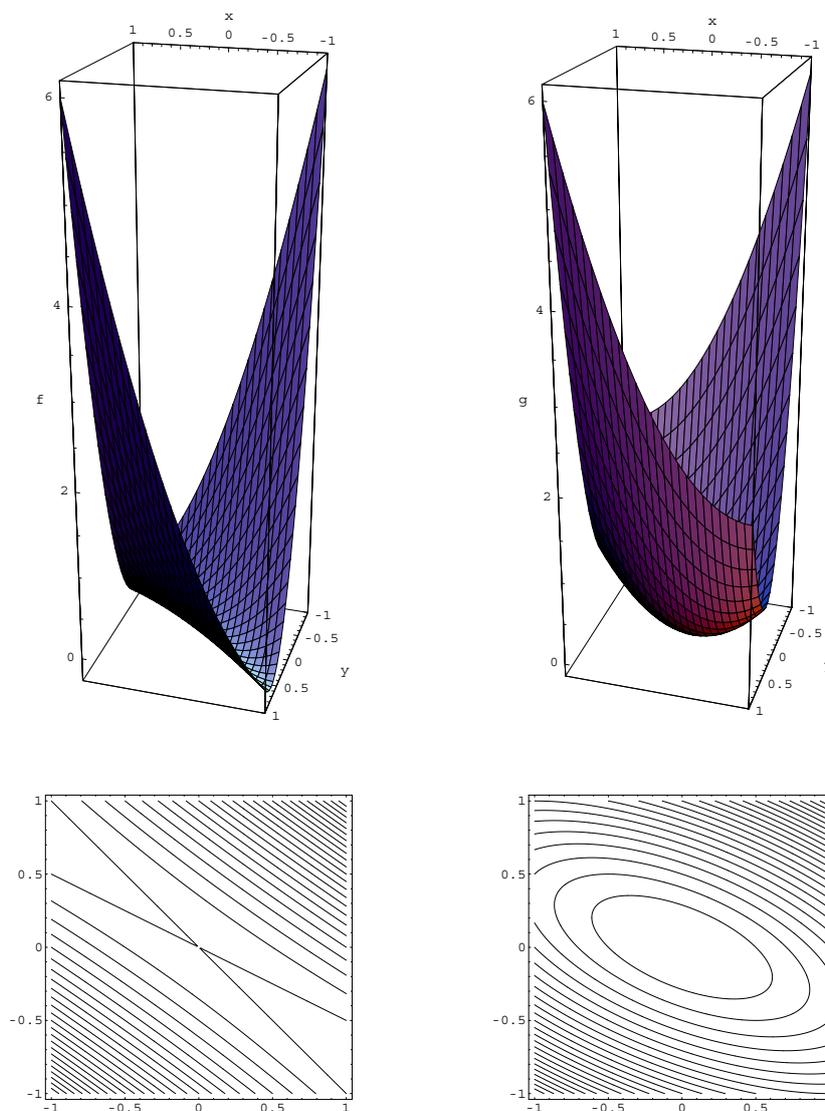


Abbildung 9.4: Die Funktionen  $f, g$  aus Beispiel 9.13, zwei Polynome von Grad 2; unten stehen die zugehörigen Höhenlinien:  $f$  hat kein Minimum,  $g$  hat ein Minimum.

**Beispiel 9.14** Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz.$$

Kandidaten für Extremstellen finden wir durch  $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$  und

$$(2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) = (0, 0, 0)$$

hat  $(0, 0, 0)$  als einzige Lösung. Weil

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{2}yz \\ &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{1}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2 \end{aligned}$$

kann man mit Hilfe von neuen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y + \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix}$$

sehen, dass  $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{x}^2 + \frac{3}{4}\tilde{y}^2 + \frac{2}{3}\tilde{z}^2$  und deshalb auch  $f$  in  $(0, 0, 0)$  ein Minimum hat.

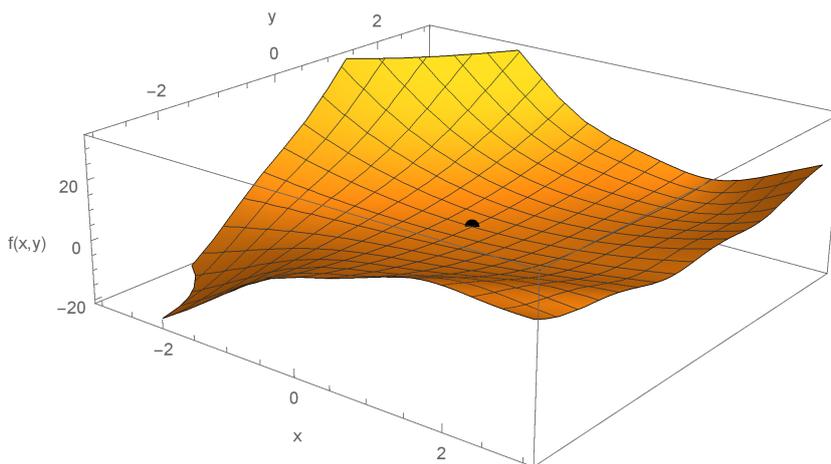


Abbildung 9.5: Skizze der Funktion  $f$  aus Beispiel 9.15

**Beispiel 9.15** Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) = \sin(xy) + x(x - \pi)y + x^2 + y^2.$$

Hat diese Funktion in  $(0, 0)$  ein Extremum? Es gilt

$$\partial_x f(x, y) = y \cos(xy) + (2x - \pi)y + 2x$$

$$\partial_y f(x, y) = x \cos(xy) + x(x - \pi) + 2y$$

und  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ . Also ist  $(0, 0)$  ein Kandidat für eine Extremstelle. Um zu sehen, ob  $(0, 0)$  einen Extrem liefert, betrachten wir die eindimensionale Funktion  $t \mapsto f(tu)$  mit  $u = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Es gilt mit Taylor, dass

$$\begin{aligned} f(tu) &= f(0, 0) + tu \cdot \nabla f(0, 0) + \\ &\quad + \frac{1}{2}t^2 (\partial_x^2 f(0, 0) u_1^2 + 2\partial_x \partial_y f(0, 0) u_1 u_2 + \partial_y^2 f(0, 0) u_2^2) + o(t^2). \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned}\partial_x^2 f(0,0) &= (-y^2 \sin(xy) + 2y + 2)_{(0,0)} = 2, \\ \partial_y \partial_x f(0,0) &= (\cos(xy) - xy \sin(xy) + 2x - \pi)_{(0,0)} = 1 - \pi, \\ \partial_y^2 f(0,0) &= (-x^2 \sin(xy) + 2)_{(0,0)} = 2,\end{aligned}$$

folgt

$$f(tu) = \frac{1}{2}t^2 (2u_1^2 + 2(1-\pi)u_1u_2 + 2u_2^2) + \mathcal{O}(t^3). \quad (9.9)$$

Den quadratischen Term (9.9) kann man wie folgt schreiben:

$$2u_1^2 + 2(1-\pi)u_1u_2 + 2u_2^2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1-\pi \\ 1-\pi & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

Die Matrix in (9.10) hat Eigenwerte  $\lambda_1 = 1 + \pi > 0$  und  $\lambda_2 = 3 - \pi < 0$ . In der Richtung des ersten Eigenvektors  $\varphi_1$  hat  $t \mapsto f(t\varphi_1)$  dann ein Minimum. In der Richtung  $\varphi_2$  hat  $t \mapsto f(t\varphi_2)$  jedoch ähnlich ein Maximum. Insgesamt hat  $f$  also keine Extremstelle in  $(0,0)$ .

Wir werden erst Extrema betrachten bei rein quadratischen Polynomen in  $\mathbb{R}^n$ . Solche Polynome lassen sich darstellen als

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und weil  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} x_i x_j$ , dürfen wir ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass  $a_{ij} = a_{ji}$ , anders gesagt, dass  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  symmetrisch ist.

## 9.4 Algebraisches Intermezzo

**Definition 9.16** Sei  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix.

- Sie heißt **positiv definit**, wenn es  $c > 0$  gibt derart, dass  $\xi \cdot M\xi \geq c \|\xi\|^2$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .
- Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn  $\xi \cdot M\xi \geq 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .
- Sie heißt **negativ definit**, wenn es  $c > 0$  gibt derart, dass  $\xi \cdot M\xi \leq -c \|\xi\|^2$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .
- Sie heißt **negativ semidefinit**, wenn  $\xi \cdot M\xi \leq 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .
- Sie heißt **indefinit**, wenn sie nicht semidefinit ist.

**Bemerkung 9.16.1** Wenn  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  symmetrisch ist, dann gibt es eine orthogonale Basis von Eigenvektoren. Das heißt: es gibt eine Transformationsmatrix  $T$  mit  $T^\top = T$  und eine Diagonalmatrix  $D$  derart, dass  $M = TDT^\top$ . Positive Definitheit liefert, weil  $\xi \mapsto \|T^\top \xi\|$  und  $\xi \mapsto \|\xi\|$  äquivalente Normen sind:

$$(T^\top \xi) \cdot D (T^\top \xi) = \xi \cdot TDT^\top \xi = \xi \cdot M\xi \geq c \|\xi\|^2 \geq \tilde{c} \|T^\top \xi\|^2.$$

Positiv definit heißt "alle Eigenwerte positiv" und positiv semidefinit heißt "alle Eigenwerte nicht negativ". Wenn  $M$  nicht positiv definit ist, dann gibt es also mindestens einen negativen Eigenwert.

**Bemerkung 9.16.2** Äquivalent zu  $\xi \cdot M\xi \geq c \|\xi\|^2$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  ist  $\xi \cdot M\xi > 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Deutlich ist die Richtung von links nach rechts. Für die umgekehrte Richtung bemerke man, dass  $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  kompakt ist und dass die stetige Funktion  $\xi \rightarrow \xi \cdot M\xi$  auf kompakten Mengen ihr Minimum annimmt. Das heißt, es gibt  $\xi_0 \in \partial B_1(0)$  derart, dass  $\xi \cdot M\xi \geq \xi_0 \cdot M\xi_0 =: c > 0$  für alle  $\xi \in \partial B_1(0)$ . Für  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt

$$\xi \cdot M\xi = \|\xi\|^2 \left( \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot M \frac{\xi}{\|\xi\|} \right) \geq c \|\xi\|^2.$$

Um die Eigenwerte einer Matrix in  $M^{n \times n}(\mathbb{R})$  zu berechnen, muss man die Nullstellen eines Polynoms  $n$ -ten Grades finden und das ist nicht immer leicht. Wir müssen sie auch nicht explizit kennen, sondern es reicht, wenn wir die Vorzeichen kennen.

**Lemma 9.17** Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  und  $M$  eine symmetrische Matrix in  $M^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Sei

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) =: a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$$

das charakteristische Polynom.

- $M$  ist positiv definit genau dann, wenn  $(-1)^k a_k > 0$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ .
- $M$  ist negativ definit genau dann, wenn alle  $a_k$  das gleiche Vorzeichen haben.

**Beweis.** Weil die Matrix  $M$  symmetrisch ist, hat sie  $n$  unabhängige reelle Eigenvektoren. Nennen wir die dazugehörigen (reellen) Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Wir listen hier die Eigenwerte inklusive Multiplizität auf. Positiv definit heißt dann, dass der kleinste Eigenwert positiv ist:  $\lambda_1 > 0$ . Negativ definit heißt, dass der größte Eigenwert negativ ist:  $\lambda_n < 0$ . Betrachten wir den positiv definiten Fall. Der negativ definite Fall folgt, wenn man  $\lambda$  durch  $-\lambda$  ersetzt in  $p(\lambda)$ .

( $\Leftarrow$ ) Wenn  $(-1)^k a_k > 0$  und  $\lambda \leq 0$ , dann gilt  $a_k \lambda^k \geq 0$  und

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \geq a_0 > 0.$$

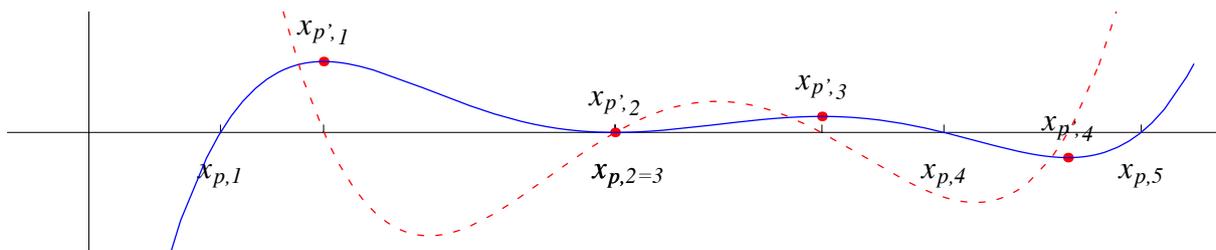
Also kann  $\lambda \leq 0$  keine Nullstelle von  $p$  sein.

( $\Rightarrow$ ) Wir nehmen an  $\lambda_1 > 0$  und sollen zeigen, dass  $(-1)^k a_k > 0$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ . Diese Richtung des Beweises verwendet das folgende Ergebnis.

- Wenn ein Polynom  $q$  von Grad  $n$  genau  $n$  reelle Nullstellen  $x_{q,1} \leq x_{q,2} \leq \dots \leq x_{q,n}$  hat, dann hat  $q'$  genau  $n - 1$  reelle Nullstellen  $x_{q',1} \leq x_{q',2} \leq \dots \leq x_{q',n}$  und es gilt<sup>4</sup>

$$x_{q,1} \leq x_{q',1} \leq x_{q,2} \leq x_{q',2} \leq \dots \leq x_{q',n} \leq x_{q,n}.$$

Hier werden  $k$ -fache Nullstellen  $k$ -fach aufgeführt.



<sup>4</sup>Wenn  $x_{q,i} < x_{q,i+1}$ , dann sagt der Mittelwertsatz, dass es  $\xi \in (x_{q,i}, x_{q,i+1})$  gibt mit  $q'(\xi) = 0$ . Wenn  $x_{q,i}$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q$  ist, dann ist  $x_{q,i}$  eine  $(m - 1)$ -fache Nullstelle von  $q'$ . Zwischen zwei Nullstellen von  $q$  liegt also mindestens eine Nullstelle von  $q'$ , wenn wir die Multiplizität mitzählen. Weil  $q'$  Grad  $n - 1$  hat, liegt auch höchstens eine Nullstelle von  $q'$  zwischen  $x_{q,i}$  und  $x_{q,i+1}$ .

Das heißt,  $M$  ist positiv definit genau dann, wenn alle Nullstellen von  $p$  und von seinen Ableitungen  $p', \dots, p^{(n-1)}$  positiv sind. Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen an, dass  $(-1)^{\tilde{k}} a_{\tilde{k}} \leq 0$  für mindestens ein  $\tilde{k}$ . Weil

$$p^{(\tilde{k})}(0) = \partial_{\lambda}^{\tilde{k}} (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n)_{\lambda=0} = \tilde{k}! a_{\tilde{k}}$$

gilt, finden wir  $(-1)^{\tilde{k}} p^{(\tilde{k})}(0) \leq 0$ . Wenn  $p^{(\tilde{k})}(0) = 0$  haben wir einen Widerspruch. Es bleibt noch der Fall, dass  $(-1)^{\tilde{k}} p^{(\tilde{k})}(0) < 0$ . Weil  $a_n = (-1)^n$  für das Polynom  $p(\lambda)$ , gilt für  $\lambda < 0$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda}^k (a_n \lambda^n) &= n(n-1) \dots (n-k+1) (-1)^n \lambda^{n-k} > 0 \text{ für } k \text{ gerade und} \\ \partial_{\lambda}^k (a_n \lambda^n) &= n(n-1) \dots (n-k+1) (-1)^n \lambda^{n-k} < 0 \text{ für } k \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Das heißt, für  $\lambda \ll 0$  gilt  $(-1)^k p^{(k)}(\lambda) > 0$  und weil  $(-1)^k p^{(k)}(0) < 0$  gilt, liefert der Nullstellensatz eine nicht-positive Nullstelle für  $p^{(k)}$ . Wiederum ist dies ein Widerspruch. ■

**Korollar 9.18** Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  eine symmetrische Matrix in  $M^{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$M \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow (ac > b^2 \text{ und } a > 0). \quad (9.11)$$

$$M \text{ ist negativ definit} \Leftrightarrow (ac > b^2 \text{ und } a < 0). \quad (9.12)$$

**Beweis.** Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = (ac - b^2) - (a + c)\lambda + \lambda^2.$$

Weil aus  $ac > b^2 \geq 0$  folgt, dass  $a$  und  $c$  das gleiche Vorzeichen haben, ist  $a + c > 0$  äquivalent zu  $a > 0$ . Ebenso ist  $a + c < 0$  äquivalent zu  $a < 0$ . ■



# Analysis 2, Woche 10

## Mehrdimensionale Differentialrechnung II



### 10.1 Zweite Ableitungen und Extrema bei Polynomen

Bei Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat die zweite Ableitung uns geholfen, Extrema zu bestimmen. In höheren Dimensionen wird diese Rolle übernommen durch die Hesse-Matrix.

**Definition 10.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $a \in U$ . Für eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , die zweimal differenzierbar ist, nennt man

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) & \dots & \partial_1 \partial_m f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) & \dots & \partial_2 \partial_m f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \partial_1 f(a) & \partial_m \partial_2 f(a) & \dots & \partial_m \partial_m f(a) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von  $f$  in  $a$ .

**Proposition 10.2** Sei  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom und  $a \in \mathbb{R}^n$ .

- Wenn  $\nabla p(a) = 0$  und die Hesse-Matrix  $H_p(a)$  positiv definit ist, dann hat  $p$  ein lokales Minimum in  $a$ .
- Wenn  $p$  ein lokales Minimum in  $a$  hat, dann gilt  $\nabla p(a) = 0$  und die Hesse-Matrix  $H_p(a)$  ist positiv semidefinit.

**Bemerkung 10.2.1** Für Maxima kann man sich die notwendigen Änderungen vorstellen.

**Bemerkung 10.2.2** Aus der zweiten Aussage folgt, dass wenn die Hesse-Matrix  $H_p(a)$  indefinit ist,  $p$  in  $a$  kein Extremum hat. Für  $n = 1$  gibt es diesen Fall nicht.

**Beweis.** Sei  $p(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha x^\alpha$  mit  $b_\alpha \in \mathbb{R}$  das Polynom. Auch hier ist  $\alpha$  ein Multiindex wie in (9.4). Man kann  $\tilde{b}_\alpha \in \mathbb{R}$  finden derart, dass  $p(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha (x-a)^\alpha$ .

Weil

$$\begin{aligned}\partial_i p(a) &= \left( \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha \alpha_i (x-a)^{\alpha-e_i} \right)_{x=a} = \tilde{b}_{e_i}, \\ \partial_i \partial_j p(a) &= \left( \sum_{k=2}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha \alpha_i \alpha_j (x-a)^{\alpha-e_i-e_j} \right)_{x=a} = \tilde{b}_{e_i+e_j} \text{ für } i \neq j, \\ \partial_i^2 p(a) &= \left( \sum_{k=2}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha \alpha_i (\alpha_i - 1) (x-a)^{\alpha-2e_i} \right)_{x=a} = 2\tilde{b}_{2e_i} \text{ für } i = j\end{aligned}$$

gilt

$$\nabla p(a) = \left( \tilde{b}_{e_1}, \tilde{b}_{e_1}, \dots, \tilde{b}_{e_n} \right)^\top \text{ und } H_p(a)_{i,j} = \tilde{b}_{e_i+e_j}.$$

Das wiederum heißt

$$\begin{aligned}p(x) &= p(a) + \nabla p(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} (x-a) \cdot H_p(a) (x-a) + R(x) \quad (10.1) \\ \text{mit } R(x) &= \sum_{k=3}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha (x-a)^\alpha.\end{aligned}$$

Diesen Restterm  $R$  kann man abschätzen: es gibt  $C > 0$  derart, dass

$$|R(x)| \leq C \|x-a\|^3 \text{ für } \|x-a\| \leq 1. \quad (10.2)$$

( $\Rightarrow$ ) Nehmen wir an,  $\nabla p(a) = 0$  und  $H_p(a)$  ist positiv definit. Sei  $c$  wie in Definition 9.16 und  $C$  wie in (10.2). Dann gilt für  $\|x-a\| \leq \min(1, \frac{1}{4}c/C)$ , dass

$$\begin{aligned}p(x) &= p(a) + \frac{1}{2} (x-a) \cdot H_p(a) (x-a) + R(x) \geq \\ &\geq p(a) + \frac{1}{2}c \|x-a\|^2 - C \|x-a\|^3 \geq p(a) + \frac{1}{4}c \|x-a\|^2\end{aligned}$$

und  $p$  hat ein lokales Minimum in  $a$ .

( $\Leftarrow$ ) Wenn  $\nabla p(a) \neq 0$ , dann setze  $u = \nabla p(a) / \|\nabla p(a)\|$  und es gilt für  $x(t) = a - tu$  und  $t \in (0, 1)$ , dass man (10.1) wie folgt abschätzen kann:

$$p(x(t)) \leq p(a) - t \|\nabla p(a)\| + \frac{1}{2}ct^2 + Ct^3. \quad (10.3)$$

Nimmt man  $t$  genügend klein, dann gilt  $p(x(t)) < p(a)$  und  $p$  hat kein Minimum in  $a$ .

Wenn  $\nabla p(a) = 0$  und  $H_p(a)$  einen negativen Eigenwert  $-\gamma$  hat, sage  $H_p(a)\xi = -\gamma\xi$  mit  $\|\xi\| = 1$ , dann gilt für  $x(t) = a + t\xi$  und  $t \in (0, 1)$ , dass man (10.1) wie folgt abschätzen kann:

$$p(x(t)) \leq p(a) - \frac{1}{2}\gamma t^2 + Ct^3. \quad (10.4)$$

Nimmt man  $t$  genügend klein, dann gilt  $p(x(t)) < p(a)$  und  $p$  hat kein Minimum in  $a$ . ■

Bevor wir das Ergebnis von Proposition 10.2 erweitern können für nicht-polynomiale Funktionen, schauen wir uns die Taylor-Approximation in höheren Dimensionen an.

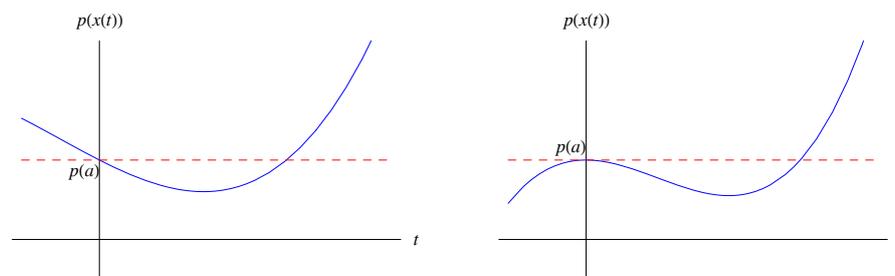


Abbildung 10.1: Skizzen zu (10.3) und (10.4)

## 10.2 Approximation durch Polynome

### 10.2.1 Das Taylorpolynom

Eine  $m$ -mal differenzierbare Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konnte man approximieren durch Taylorpolynome von Grad höchstens gleich  $m$ . Wenn man  $g$  approximieren möchte bei 0, dann verwendet man:

$$p(t) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} t^k g^{(k)}(0) = g(0) + t g'(0) + \frac{1}{2} t^2 g''(0) + \dots + \frac{1}{m!} t^m g^{(m)}(0). \quad (10.5)$$

Wenn man eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf ähnliche Art in einer Umgebung von  $a$  approximieren möchte, dann kann man erst einmal versuchen, welches Ergebnis man bekommt, wenn man sich beschränkt auf eine Richtung. Besser gesagt, wenn  $f$   $m$ -mal differenzierbar ist und man interessiert ist an der  $u$ -Richtung ( $u \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|u\| = 1$ ), dann ist  $g(t) = f(a + tu)$  auch  $m$ -mal differenzierbar und man kann das Ergebnis in einer Dimension verwenden. Weil

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(a + tu)) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a + tu) u_i = ((u \cdot \nabla) f)(a + tu).$$

wird das Polynom in (10.5):

$$p(t) = f(a) + t ((u \cdot \nabla) f)(a) + \frac{1}{2} t^2 ((u \cdot \nabla)^2 f)(a) + \dots + \frac{1}{m!} t^m ((u \cdot \nabla)^m f)(a).$$

Setzt man  $x = a + tu$ , dann bekommt man salopp notiert:

$$\tilde{p}(x) = f(a) + ((x - a) \cdot \nabla) f(a) + \frac{1}{2} ((x - a) \cdot \nabla)^2 f(a) + \dots + \frac{1}{m!} ((x - a) \cdot \nabla)^m f(a).$$

Eine präzisere Schreibweise für  $((x - a) \cdot \nabla)^k f(a)$  ist

$$\left( ((x - a) \cdot \nabla_\xi)^k f(\xi) \right)_{\xi=a},$$

denn  $\nabla$  soll nur auf  $f$  angewendet werden. Zum Beispiel für  $n = k = 2$  hat man

$$\begin{aligned} ((x - a) \cdot \nabla)^2 f(a) &= (x_1 - a_1)^2 \partial_1 \partial_1 f(a) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \partial_1 \partial_2 f(a) + \\ &+ (x_2 - a_2)(x_1 - a_1) \partial_2 \partial_1 f(a) + (x_2 - a_2)^2 \partial_2 \partial_2 f(a). \end{aligned}$$

Ist  $f$  sogar  $m$ -mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von  $a$ , dann gilt  $\partial_1 \partial_2 f(a) = \partial_2 \partial_1 f(a)$ .

Für  $n \geq 2$  und  $k \geq 2$  begegnet man mehreren mehrfach erscheinenden Termen. Wie man die kombinieren kann, folgt aus dem folgenden Lemma.

**Lemma 10.3** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 1$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt, wenn wir die Multiindexnotation verwenden:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{k}{\beta} x^\beta. \quad (10.6)$$

Für ein Multiindex  $\beta \in \mathbb{N}^n$  und  $k = |\beta|$  definiert man

$$\begin{aligned} \beta! &= \beta_1! \beta_2! \cdots \beta_n! \text{ und} \\ \binom{k}{\beta} &= \frac{k!}{\beta!} = \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_n!}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 10.3.1** Allgemein definiert man für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\beta \in \mathbb{N}^n$ :

$$\begin{aligned} \binom{k}{\beta} &= \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_n! (k-|\beta|)!} \quad \text{für } k \geq |\beta|, \\ \binom{k}{\beta} &= 0 \quad \text{für } k < |\beta|. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir führen einen Induktionsbeweis nach  $n$  durch. Für  $n = 1$  ist diese Behauptung trivialerweise wahr für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Im Induktionsbeweis verwenden wir jedoch auch die Formel für  $n = 2$  und diese soll also unabhängig gelten. Weil dies die bekannte Binomialformel ist, die wir für alle  $k \in \mathbb{N}$  schon bewiesen haben, passt es.

Nehmen wir nun an, die Formel stimmt für ein  $n \in \mathbb{N}^+$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (x_1 + \cdots + x_n)^m x_{n+1}^{k-m} = \quad (10.7)$$

(hier haben wir die bekannte Binomialformel für  $n = 2$  benutzt und als nächstes verwenden wir die Induktionsannahme)

$$\begin{aligned} (10.7) &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \left( \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{m}{\beta} x^\beta \right) x_{n+1}^{k-m} = \\ &= \sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{k!}{m! (k-m)!} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_n!} x^\beta x_{n+1}^{k-m} = \\ &= \sum_{|\tilde{\beta}|=k, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{k!}{\tilde{\beta}_1! \tilde{\beta}_2! \cdots \tilde{\beta}_n! \tilde{\beta}_{n+1}!} x^{\tilde{\beta}} = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}} \binom{k}{\beta} x^\beta. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir  $\tilde{\beta}_i = \beta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $\tilde{\beta}_{n+1} = k - m$  geschrieben. Im letzten Schritt ist  $\tilde{\beta}$  wieder  $\beta$  genannt worden. Die Formel gilt also für  $n + 1$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$ . ■

Wenn  $\partial_i$  und  $\partial_j$  kommutieren, kann man die Formel in (10.6) auch anwenden auf den Differentialoperator  $(u_1 \partial_1 + \cdots + u_n \partial_n)^k$  und man findet, wieder die Multiindexnotation benutzend, dass

$$(u \cdot \nabla)^k f(a) = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{k}{\beta} u^\beta \partial^\beta f(a).$$

**Definition 10.4** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in U$ . Für eine  $m$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man das **Taylorpolynom  $m$ -ter Ordnung bei  $a$**  durch

$$T_{m,a}(x) = \sum_{|\beta| \leq m, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} \partial^\beta f(a). \quad (10.8)$$

**Bemerkung 10.4.1** Man soll bemerken, dass

$$\frac{1}{k!} \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{k}{\beta} (x-a)^\beta \partial^\beta f(a) = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} \partial^\beta f(a).$$

Nachdem wir die Buchhaltung für die höheren Dimensionen im Griff haben, können wir den Approximationssatz von Taylor für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  formulieren.

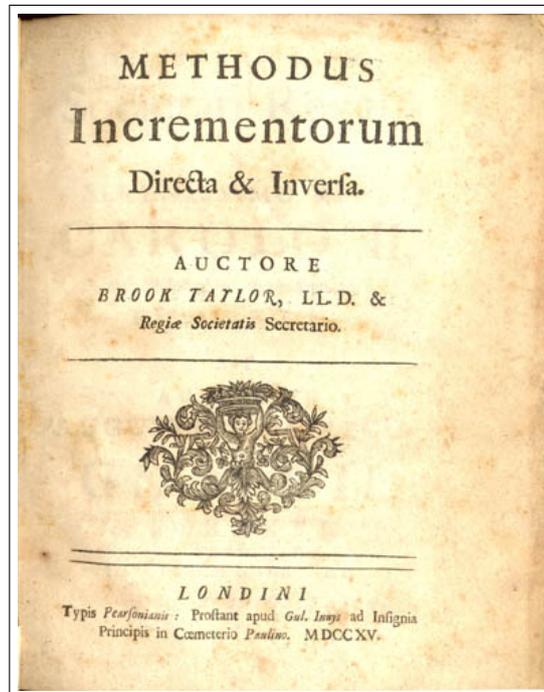


Abbildung 10.2: Das Hauptwerk von Brook Taylor, 1685-1731, aus 1715.

**Theorem 10.5 (Taylor)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in U$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mindestens  $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar auf  $B_r(a)$ , und sei  $T_{m,a}$  das zugehörige Taylorpolynom  $m$ -ter Ordnung bei  $a$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - T_{m,a}(x)|}{\|x - a\|^m} = 0. \quad (10.9)$$

Für  $R_m(x) = f(x) - T_{m,a}(x)$  gilt sogar, dass für jedes  $x \in B_r(a)$  ein  $\theta_x \in (0, 1)$  existiert derart, dass

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta_x(x-a)). \quad (10.10)$$

**Bemerkung 10.5.1** Man nennt  $R_m$  den **Restterm von Lagrange**. Man kann (10.10) auch formulieren als: es gibt  $\xi \in [a, x]$  mit

$$f(x) = T_{m,a}(x) + \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(\xi).$$

Man definiert  $[a, x] \subset \mathbb{R}^n$  durch

$$[a, x] := \{\theta a + (1-\theta)x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq \theta \leq 1\}. \quad (10.11)$$

**Bemerkung 10.5.2** Das Taylorpolynom in (10.5) ist das einzige Polynom von Grad kleiner gleich  $m$  wobei in  $a$  alle Ableitungen von Ordnung  $m$  und kleiner übereinstimmen mit den betreffenden Ableitungen von  $f$ . Man findet nämlich genau, dass

$$\left( \partial_x^\alpha \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} \right)_{x=a} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{wenn } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Die Gleichung  $\alpha = \beta$  bedeutet, dass  $\alpha_i = \beta_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , und  $\alpha \neq \beta$  bedeutet, dass es mindestens ein  $i = 1, \dots, n$  gibt mit  $\alpha_i \neq \beta_i$ .

**Beweis.** Definieren wir  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $g(t) = f(a + t(x-a))$ , dann bekommen wir durch den eindimensionalen Taylorsatz, dass

$$\begin{aligned} f(a + t(x-a)) &= g(t) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} t^k g^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} t^{m+1} g^{(m+1)}(\theta) = \\ &= T_{m,a}(a + t(x-a)) + \frac{1}{(m+1)!} t^{m+1} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta(x-a)). \end{aligned}$$

Für  $t = 1$  folgt

$$f(x) = T_{m,a}(x) + \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta(x-a)).$$

Weil wir angenommen haben, dass  $f$  sogar  $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, ist  $\partial^\beta f$  für  $|\beta| \leq m+1$  beschränkt auf  $\overline{B_{r-\varepsilon}(a)}$ . Das heißt, es gibt eine Schranke  $M \in \mathbb{R}^+$  derart, dass

$$\frac{|f(x) - T_{m,a}(x)|}{\|x-a\|^m} = \frac{\left| \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta(x-a)) \right|}{\|x-a\|^m} \leq M \|x-a\|,$$

und (10.10) folgt. ■

## 10.2.2 Die Taylorreihe

Für Potenzreihen einer Variablen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  haben wir gesehen, es gibt  $R \in [0, \infty]$  derart, dass diese Reihe konvergiert für alle  $t \in \mathbb{R}$  (oder  $t \in \mathbb{C}$ ) mit  $|t| < R$ . Ein solches Ergebnis gibt es auch für Potenzreihen mehrerer Variablen.

- Eine Potenzreihe für  $x \in \mathbb{R}^n$  sieht aus wie folgt:

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta \text{ mit Koeffizienten } a_\beta \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}.$$

Die Reihenfolge wie  $\mathbb{N}^n$  durchlaufen werden soll, ist nicht mehr auf eine natürliche Weise festgelegt. Wir verabreden folgendes:

- Diese Reihe heißt konvergent, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ).
- Sie heißt absolut konvergent, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta x^\beta| \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ).

**Proposition 10.6** Sei  $\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta$  eine Potenzreihe. Setze  $A_m = \max \{|a_\beta|; |\beta| = m\}$  und nehme an  $\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m$  hat Konvergenzradius  $R$ .

1. Dann konvergiert  $\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\max \{|x_i|; i = 1, \dots, n\} < R$ .
2. Für  $s < R$  konvergiert  $x \mapsto \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta$  gleichmäßig auf  $(\overline{B_s(0)})^n$ .

**Beweis.** Es gibt weniger als  $(m+1)^n$  Multiindizes  $\beta$  mit  $|\beta| = m$ . Setzen wir

$$t = \max \{|x_i|; i = 1, \dots, n\}$$

dann haben wir

$$\sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta x^\beta| \leq (m+1)^n |a_\beta| t^m.$$

Weil

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^n A_m t^m$$

den gleichen Konvergenzradius haben, nämlich  $R$ , und weil folgende Abschätzung gilt

$$\sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta x^\beta| \leq \sum_{m=0}^k (m+1)^n A_m t^m,$$

liefert das Majorantenkriterium, dass auch  $\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta$  konvergent ist.

Setze  $t = \sqrt{sR} \in (s, R)$ . Weil  $\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1)^n A_m t^m = 0$  ist  $\{(m+1)^n A_m t^m\}_{m=0}^{\infty}$  beschränkt, sagen wir durch  $M$ , und wir finden für  $x \in (\overline{B_s(0)})^n$ , dass

$$\sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta x^\beta| \leq M \left(\frac{s}{t}\right)^m.$$

Es folgt, dass

$$\left| \sum_{|\beta| \geq m, \beta \in \mathbb{N}^n} a_\beta x^\beta \right| \leq \sum_{|\beta| \geq m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_\beta x^\beta| \leq \frac{M}{1 - \frac{s}{t}} \left(\frac{s}{t}\right)^m$$

und wir haben die gleichmäßige Konvergenz. ■

**Lemma 10.7** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in U$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Seien  $T_{m,a}$  die Taylorpolynome und  $R_m$  die dazugehörigen Restterme. Wenn  $R_m(x) \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf

$$W = \overline{B_R(a_1) \times B_R(a_2) \times \dots \times B_R(a_n)},$$

dann konvergieren die Taylorpolynome  $T_{m,a}$  gleichmäßig nach  $f$  auf  $W$  für  $m \rightarrow \infty$

**Beweis.** Hier ist nur zu bemerken, dass  $f(x) = T_{m,a}(x) + R_m(x)$ . ■

In einer Dimension haben wir schon gesehen, dass Konvergenz von  $\{T_{m,a}(x)\}_{m=0}^{\infty}$  nicht unbedingt bedeutet  $T_{m,a}(x) \rightarrow f(x)$ .

### 10.3 Hesse-Matrix und Extremum

**Theorem 10.8** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in U$  und nehme an:  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist dreimal stetig differenzierbar in  $a$ .

- Wenn  $\nabla f(a) = 0$  und die Hesse-Matrix  $H_f(a)$  positiv definit ist, dann hat  $f$  ein lokales Minimum in  $a$ .
- Wenn  $f$  ein lokales Minimum in  $a$  hat, dann gilt  $\nabla f(a) = 0$  und die Hesse-Matrix  $H_f(a)$  ist positiv semidefinit.

**Bemerkung 10.8.1** Für Maxima kann man sich die notwendigen Änderungen vorstellen.

**Bemerkung 10.8.2** Aus der zweiten Aussage folgt, dass wenn die Hesse-Matrix  $H_f(a)$  indefinit ist,  $f$  in  $a$  kein Extremum hat.

**Beweis.** Wenn  $f$  dreimal stetig differenzierbar ist auf  $\overline{B_r(a)}$ , dann ist

$$\max \left\{ |\partial_i \partial_j f(x)| ; x \in \overline{B_r(a)} \text{ und } i, j \in \{1, n\} \right\}$$

endlich und es gibt  $M \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$|f(x) - T_{2,a}(x)| = |R_2(x)| \leq M \|x - a\|^3.$$

- Wenn  $\nabla f(a) = 0$  und  $\xi \cdot H_f(a)\xi \geq c \|\xi\|^2$ , dann gilt für  $x \in \overline{B_r(a)}$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq T_{2,a}(x) - M \|x - a\|^3 = \\ &= f(a) + \nabla f(a) (x - a) + (x - a) \cdot H_f(a) (x - a) - M \|x - a\|^3 \geq \\ &\geq f(a) + c \|x - a\|^2 - M \|x - a\|^3. \end{aligned}$$

Setzen wir  $r_1 = \min\left(r, \frac{c}{2M+1}\right)$  dann gilt für  $x \in \overline{B_{r_1}(a)}$ , dass

$$f(x) \geq f(a) + \frac{1}{2}c \|x - a\|^2$$

und es ist bewiesen, dass  $f$  ein lokales Minimum hat.

- Wenn  $\nabla f(a) \neq 0$ , dann betrachten wir  $x = a - t\nu$  mit  $\nu = \nabla f(a)$  und finden für  $t > 0$  genügend klein, dass

$$\begin{aligned} f(a - t\nu) &= f(a) + t\nabla f(a) \nu + R_1(a - t\nu) \leq \\ &\leq f(a) - t \|\nabla f(a)\|^2 + c_1 t^2 < f(a). \end{aligned}$$

Wenn  $\nabla f(a) = 0$  und  $H_f(a)$  nicht positiv semidefinit ist, dann hat  $H_f(a)$  einen negativen Eigenwert  $\lambda$ . Sei  $\varphi$  der dazugehörige Eigenvektor. Dann gilt für  $t > 0$  und genügend klein, dass

$$\begin{aligned} f(a - t\varphi) &= f(a) + t\nabla f(a) \varphi + t^2 \varphi \cdot H_f(a) \varphi + R_2(a - t\varphi) \leq \\ &\leq f(a) + \lambda t^2 \|\varphi\|^2 + c_2 t^3 < f(a). \end{aligned}$$

In beiden Fällen hat  $f$  kein Minimum in  $a$ . ■

**Beispiel 10.9** Betrachten wir  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (x^2 + 4y^2 + z^4)$ . Welche Minima und Maxima hat  $f$  und wo liegen sie?

Weil  $f$  differenzierbar ist (sogar unendlich oft), sind die Kandidatenstellen für Extrema die stationären Punkte:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (-4x(x^2 + 4y^2 + z^4) + 2x), \\ 0 &= \partial_2 f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (-4y(x^2 + 4y^2 + z^4) + 8y), \\ 0 &= \partial_3 f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (-4z(x^2 + 4y^2 + z^4) + 4z^3). \end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} (x = 0 \text{ oder } x^2 + 4y^2 + z^4 = \frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad (y = 0 \text{ oder } x^2 + 4y^2 + z^4 = 2) \\ \text{und} \quad (z = 0 \text{ oder } x^2 + 4y^2 + z^4 = z^2). \end{aligned}$$

Es gibt 8 Kombinationen.

1.  $x = y = z = 0$ :

$$P_1 = (0, 0, 0).$$

2.  $x = y = 0$  und  $z^4 = z^2$ .  $P_1$  ist auch hier eine Lösung und sonst  $z = \pm 1$ :

$$P_2 = (0, 0, 1) \quad \text{und} \quad P_3 = (0, 0, -1)$$

3.  $x = z = 0$  und  $4y^2 = 2$ . Wiederum  $P_1$  und sonst

$$P_4 = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right) \quad \text{und} \quad P_5 = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$$

4.  $x = 0$  und  $4y^2 + z^4 = 2$  und  $4y^2 + z^4 = z^2$ . Es folgt  $2 = z^2$  und wir finden keine reelle Lösung  $y$  für  $4y^2 + 4 = 2$ .

5.  $x^2 = \frac{1}{2}$  und  $y = z = 0$ :

$$P_6 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 0\right) \quad \text{und} \quad P_7 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 0\right)$$

6.  $\frac{1}{2} = x^2 + z^4 = z^2$  und  $y = 0$  liefert  $z^2 = \frac{1}{2}$  und  $x^2 = \frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned} P_8 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad , \quad P_9 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \\ P_{10} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad \text{und} \quad P_{11} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

7.  $\frac{1}{2} = x^2 + 4y^2 = 2$  und  $z = 0$  gibt keine Lösung.

8.  $\frac{1}{2} = x^2 + y^3 + z^4 = 2 = z^2$  gibt auch keine Lösung.

Die Hesse-Matrix im Punkt  $(x, y, z)$  ist

$$e^{-2(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} 16x^4 + 64x^2y^2 + 16x^2z^4 - 20x^2 - 16y^2 - 4z^4 + 2 & 16x^3y + 64xy^3 + 16xyz^4 - 40xy & 16x^3z + 64xy^2z + 16xz^5 - 16xz^3 - 8xz \\ 16x^3y + 64xy^3 + 16xyz^4 - 40xy & 16x^2y^2 - 4x^2 + 64y^4 + 16y^2z^4 - 80y^2 - 4z^4 + 8 & 16yz(x^2 + 4y^2 + z^4 - z^2 - 2) \\ 16x^3z + 64xy^2z + 16xz^5 - 16xz^3 - 8xz & 16yz(x^2 + 4y^2 + z^4 - z^2 - 2) & 16x^2z^2 - 4x^2 + 64y^2z^2 - 16y^2 + 16z^6 - 36z^4 + 12z^2 \end{pmatrix}$$

und setzen wir die Punkte  $P_1$  bis  $P_{11}$  ein, finden wir:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_2 = M_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{e^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{e^2} \end{pmatrix} \\
 M_4 = M_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, & M_6 = M_7 &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix} \\
 M_8 = M_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^{3/2}} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} \\ 0 & \frac{6}{e^{3/2}} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_9 = M_{10} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^{3/2}} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} \\ 0 & \frac{6}{e^{3/2}} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 10.8 können wir folgern:

- Die Matrix  $M_1$  ist positiv semidefinit und das heißt, dass  $f$  möglicherweise in  $P_1$  ein Minimum hat.
- Die Matrizen  $M_4$  und  $M_5$  sind negativ definit. In  $P_4$  und  $P_5$  hat  $f$  also bestimmt ein Maximum.
- Die übrigen Matrizen sind indefinit und in den zugehörigen Punkten hat  $f$  nur Sattelpunkte.

Weil man  $f(x, y, z) > 0$  für  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  hat und  $f(0, 0, 0) = 0$ , können wir schließen, dass  $f$  in  $P_1$  ein globales Minimum hat.

Weil  $\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$  können wir auch schließen, dass  $f$  ein globales Maximum haben muss. Die einzigen Kandidaten sind  $P_4$  und  $P_5$  und weil  $f(P_4) = f(P_5)$ , hat  $f$  sowohl in  $P_4$  als auch in  $P_5$  ein globales Maximum.

Die globalen Extrema hätten wir auch finden können, indem wir die Werte  $f(P_i)$  berechnen:

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_{2,3}) = \frac{1}{e^2}, \quad f(P_{4,5}) = \frac{2}{e}, \quad f(P_{6,7}) = \frac{1}{2e}, \quad f(P_{8,\dots,11}) = \frac{1}{2}e^{-3/2}.$$

In  $P_4$  und  $P_5$  findet man den größten Wert; in  $P_1$  den kleinsten. Ohne die Hesse-Matrizen hätten wir aber nicht schlussfolgern können, dass es die einzigen Extrema sind.

In Abbildung 10.3 findet man Skizzen einiger Niveaumengen. Für eine Darstellung des Graphen von  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  braucht man 4 Dimensionen. Jede Niveaumenge  $f(x, y, z) = c$  braucht bloß 3.

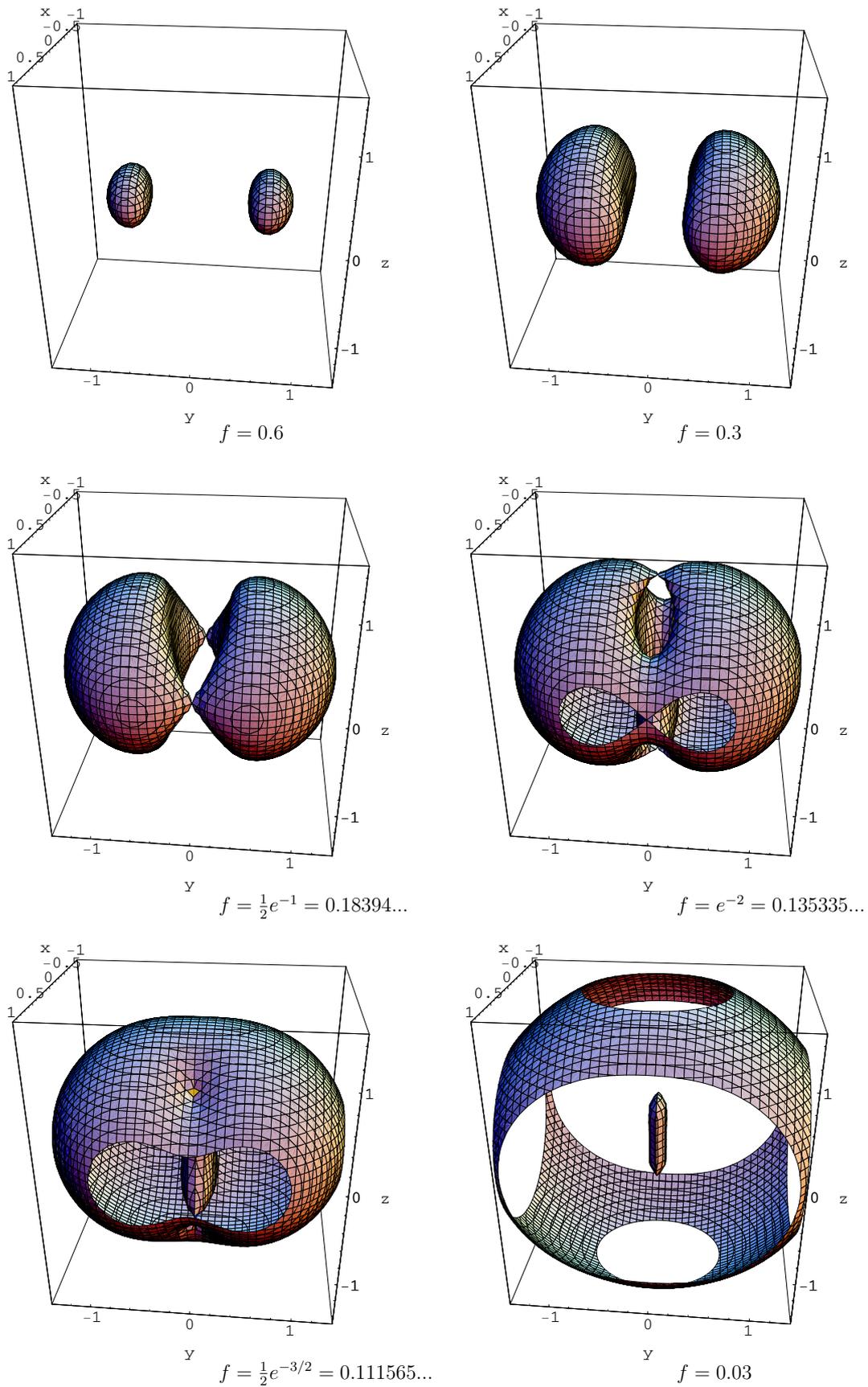


Abbildung 10.3: Zu Beispiel 10.9 stehen hier einige Skizzen von Niveaumengen von  $f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)}(x^2 + 4y^2 + z^4)$  durch Mathematica. Die Sattelpunkte kann man erkennen.

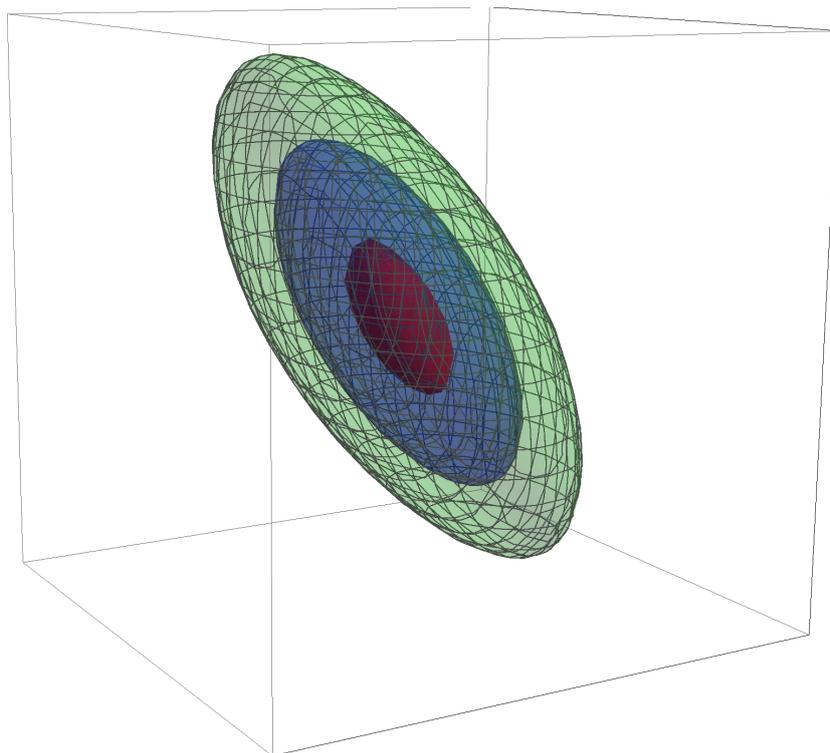


Abbildung 10.4: Typische Niveaumengen bei einem Extremum für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

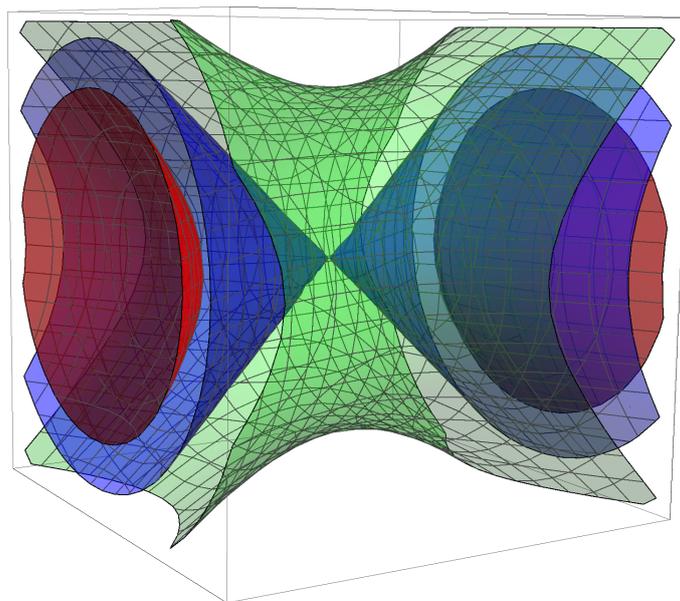


Abbildung 10.5: Typische Niveaumengen bei einem Sattelpunkt für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

# Analysis 2, Woche 11

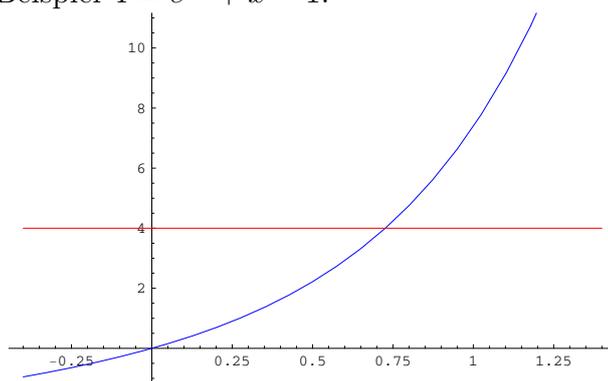
## Inverse Funktionen



### 11.1 Gleichungen lösen durch Approximation

#### 11.1.1 Wiederholung

Es gibt nur wenige Funktionen  $f$ , bei denen man Gleichungen  $y = f(x)$  explizit lösen kann. Lösen heißt hier, dass  $y$  gegeben ist und man  $x$  finden soll. Doch möchte man etwas sagen können bei zum Beispiel  $4 = e^{2x} + x - 1$ .



Eine Möglichkeit ist es, zu raten wo die Lösung  $x$  ungefähr liegen sollte. Sagen wir man rate  $x_0$ . Diese grobe Annäherung könnte man verbessern, indem man statt  $f$  die Linearisierung von  $f$  bei  $x_0$  verwendet. Das heißt, wir vermuten  $y \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$  und lösen statt  $y = f(x)$  nun

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Für  $f'(x_0) \neq 0$  folgt

$$x = x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Wir hoffen, dass  $x_1 = x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$  eine bessere Approximation ist als  $x_0$ . Wir können diesen Vorgang wiederholen mit  $x_1$  statt  $x_0$  usw. Wir bekommen so eine Folge  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  mit  $x_{i+1}$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

**Definition 11.1** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Das **Newton-Verfahren** für die Approximation einer Lösung von  $y = f(x)$  ist wie folgt:

1. Nehme  $x_0$  als geschickt gewählter Startpunkt.

2. Definiere

$$x_{i+1} = x_i + \frac{y - f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (11.1)$$

Die Fragen, die zu beantworten sind, lauten:

- Ist die Folge, die man so bekommt, konvergent?
- Konvergiert Sie zu einer Lösung?

Wir schauen uns zwei Beispiele an.

**Beispiel 11.2** Wir nannten schon  $f(x) = e^{2x} + x - 1$ . Die Lösung für  $f(x) = 4$  approximiert man wie folgt:

$$F(x) = x + \frac{4 - f(x)}{f'(x)} = x + \frac{4 - (e^{2x} + x - 1)}{2e^{2x} + 1}.$$

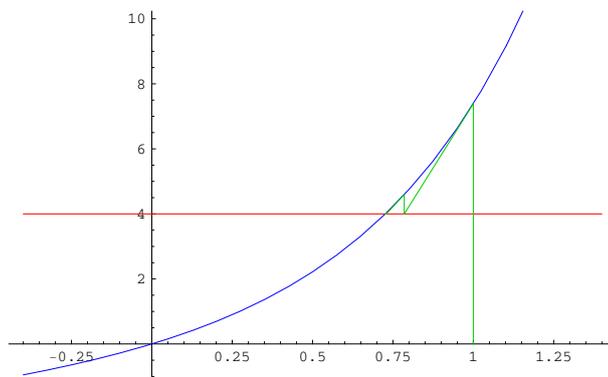
Fängt man an mit  $x_0 = 1$ , dann liefert der Rechner für  $x_{i+1} = F(x_i)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.78520522249866928185 \dots, \\ x_2 &= 0.72927481853190067928 \dots, \\ x_3 &= 0.72625446771654076922 \dots, \\ x_4 &= 0.72624626770602477443 \dots, \\ x_5 &= 0.72624626764582663769 \dots, \\ x_6 &= 0.72624626764582663769 \dots \end{aligned}$$

Es macht den Eindruck, dass diese Folge konvergiert. Wenn sie zu  $x_\infty$  konvergiert, dann gilt, weil  $F$  stetig ist, dass

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = F(x_\infty).$$

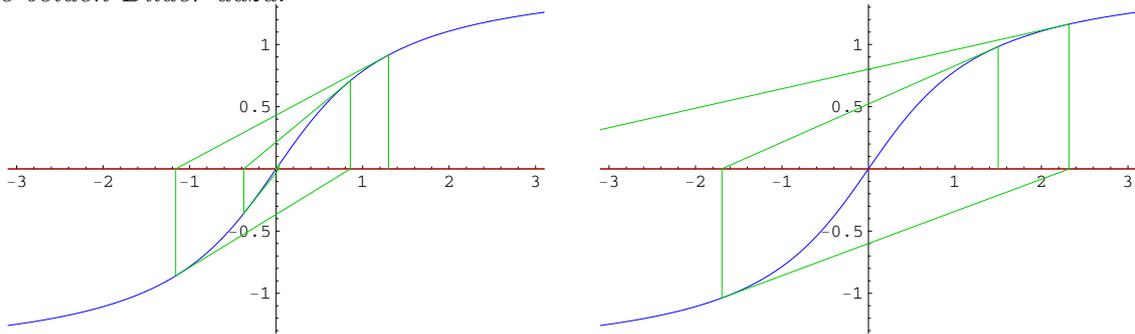
Weil  $f'(x_\infty) \neq 0$  gilt, folgt  $f(x_\infty) = 4$ . Graphisch lässt sich dieser Vorgang auch anschaulich darstellen.



**Beispiel 11.3** Wir testen das Newton-Verfahren für die Lösung von  $\arctan(x) = 0$ . Wir schreiben  $f(x) = \arctan(x)$  und betrachten das Verfahren mit zwei verschiedenen Startpunkten, nämlich  $x_0 = 1.3$  und  $x_0 = 1.5$ . Die Funktion  $F$  wird:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2) \arctan x.$$

Wir werden nicht die Werte von den  $x_i$  in beiden Fällen aufführen, sondern geben nur die beiden Bilder dazu.



Es sieht so aus, als ob das Newton-Verfahren nicht konvergiert, wenn man zu weit entfernt von der Lösung anfängt.

### 11.1.2 In höheren Dimensionen

Auch in höheren Dimensionen für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kann man versuchen, eine Lösung von  $f(x) = y$  zu approximieren, indem man  $x^0$  geschickt wählt und  $x^{i+1}$  für  $i \in \mathbb{N}$  definiert als die Lösung des in  $x^i$  linearisierten Problems:<sup>1</sup>

$$y = f(x^i) + (\nabla f(x^i)) (x^{i+1} - x^i). \quad (11.2)$$

Via  $(\nabla f(x^i))^{-1} (y - f(x^i)) = x^{i+1} - x^i$  findet man

$$x^{i+1} = x^i + (\nabla f(x^i))^{-1} (y - f(x^i)).$$

**Definition 11.4** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und sei  $y \in \mathbb{R}^n$ . Das **Newton-Verfahren** für die Approximation einer Lösung von  $y = f(x)$  ist wie folgt:

1. Nehme  $x_0$  als geschickt gewählter Startpunkt.
2. Definiere für  $i \in \mathbb{N}$ :

$$x^{i+1} = F(x^i) \quad (11.3)$$

mit  $F(x) := x + (\nabla f(x))^{-1} (y - f(x))$ .

**Bemerkung 11.4.1** Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Funktion ist, dann hat man in einem Schritt die Lösung. Denn sei  $A$  eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix und  $f(x) = Ax$ , dann gilt  $\nabla f(x) = A$  und

$$F(x) = x + A^{-1} (y - Ax) = A^{-1}y.$$

Bevor wir den Satz formulieren, der besagt, dass wenn man genügend nahe an einer Nullstelle startet, die Folge tatsächlich die Nullstelle approximiert, brauchen wir die Norm einer Matrix  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ .

<sup>1</sup>Bemerke, dass in (11.2) folgendes steht:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x^i) \\ \vdots \\ f_n(x^i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x^i) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x^i) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(x^i) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(x^i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{i+1} - x_1^i \\ \vdots \\ x_n^{i+1} - x_n^i \end{pmatrix}$$

**Definition 11.5** Sei  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Man definiert

$$\|M\| = \sup \{ \|M\xi\| ; \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|\xi\| = 1 \}.$$

**Bemerkung 11.5.1** Es gilt, dass

$$\|M\| = \sup \{ \|M\xi\| ; \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|\xi\| \leq 1 \} = \sup \left\{ \frac{\|M\xi\|}{\|\xi\|} ; \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

und dass man  $\sup$  durch  $\max$  ersetzen kann. Wenn  $M$  symmetrisch ist, gilt sogar  $\|M\| = \max \{ |\lambda_i| ; 1 \leq i \leq n \}$ , wenn  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  die Menge der Eigenwerte ist.

**Proposition 11.6** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei  $y \in \mathbb{R}^n$ . Nehmen wir an,  $x^0$ ,  $R$ ,  $M_1$  und  $M_2$  sind derartig, dass<sup>2</sup>

a.  $(\nabla f(x))^{-1}$  existiert auf  $\overline{B_R(x^0)}$  und

$$\|(\nabla f)^{-1}\|_\infty := \sup \left\{ \|(\nabla f(x))^{-1}\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})} ; x \in \overline{B_R(x^0)} \right\} \leq M_1;$$

b.  $\|\nabla^2 f\|_\infty := \sup \left\{ \|\nabla^2 f_k(x)\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})} ; x \in \overline{B_R(x^0)}, k \in \{1, \dots, n\} \right\} \leq M_2.$

Definiere für  $x^{i+1} = F(x^i)$  wie in (11.3). Wenn

$$\|x^1 - x^0\| \leq \min \left( n^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1}, \frac{1}{2} R \right), \quad (11.4)$$

dann gilt:

1. die Folge  $\{x^i\}_{i=0}^\infty$  ist konvergent;
2. für den Limes  $x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^i$  gilt:  $f(x^\infty) = y$ ;
3. die Folge konvergiert quadratisch:

$$\text{es gibt } c > 0 \text{ derart, dass } \|x^{i+1} - x^\infty\| \leq c \|x^i - x^\infty\|^2.$$

**Bemerkung 11.6.1** Die zwei Bedingungen a und b und die Annahme in (11.4) sind lästig zu kontrollieren. Wenn aber  $(\nabla f)^{-1}$  und  $\nabla^2 f$  existieren und beschränkt sind und man außerdem bemerkt, dass man das Rechnen findet, dass  $\|x^{i+1} - x^i\| \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ , dann ist automatisch (11.4) erfüllt für  $\tilde{x}^0 = x^i$  und  $\tilde{x}^1 = x^{i+1}$  für  $i$  genügend groß. Man tut dann, als finge man erst an mit  $\tilde{x}^0$  (das alte  $x^i$ ). Das Wichtigste an der Proposition ist dann auch eigentlich, dass sie besagt, dass wenn es konvergiert, man dann auch eine Nullstelle von  $f$  gefunden (besser gesagt: approximiert) hat.

**Beweis.** Die Matrix  $\nabla f(x)$  ist invertierbar für  $x \in \overline{B_R(x_0)}$  und weil  $x^0, x^1 \in B_R(x_0)$ , sind  $x^1$  und  $x^2$  durch (11.3) wohldefiniert.

<sup>2</sup>Sowohl  $(\nabla f(x))^{-1}$  als auch  $\nabla^2 f_k(x)$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$  sind Matrizen in  $M^{n \times n}(\mathbb{R})$ .

1. Wir zeigen erst, dass die Folge  $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  innerhalb von  $B_R(x_0)$  liegt. Die Induktionsannahme ist, dass

$$x^0, \dots, x^{n+1} \in B_R(x_0).$$

Für  $n = 0$  gilt dies und wir nehmen an, dies gilt für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist diese Folge  $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  bis  $i = n$  so wohldefiniert. Weil

$$y = f(x^i) + \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i) \quad \text{und} \quad y = f(x^{i+1}) + \nabla f(x^{i+1}) (x^{i+2} - x^{i+1}),$$

folgt

$$\begin{aligned} x^{i+2} - x^{i+1} &= (\nabla f(x^{i+1}))^{-1} (y - f(x^{i+1})) = \\ &= (\nabla f(x^{i+1}))^{-1} (f(x^i) + \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i) - f(x^{i+1})) \\ &= -(\nabla f(x^{i+1}))^{-1} (f(x^{i+1}) - f(x^i) - \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i)). \end{aligned}$$

Der Satz von Taylor liefert uns, wenn  $x^i, x^{i+1} \in \overline{B_R(x^0)}$ , dass

$$f(x^{i+1}) - f(x^i) - \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (x^{i+1} - x^i) \cdot \nabla^2 f_1(\xi^1) (x^{i+1} - x^i) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (x^{i+1} - x^i) \cdot \nabla^2 f_n(\xi^n) (x^{i+1} - x^i) \end{pmatrix}$$

für  $\xi^k \in [x^i, x^{i+1}] \subset \overline{B_R(x^0)}$ . Also gilt

$$\|f(x^{i+1}) - f(x^i) - \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i)\| \leq \frac{1}{2} n \|\nabla^2 f\|_\infty \|x^{i+1} - x^i\|^2$$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \|x^{i+2} - x^{i+1}\| &\leq \frac{1}{2} \|(\nabla f)^{-1}\|_\infty n \|\nabla^2 f\|_\infty \|x^{i+1} - x^i\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} n M_1 M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Wenn  $\|x^1 - x^0\| \leq n^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1}$ , dann folgt

$$\|x^2 - x^1\| \leq \frac{1}{2} \|x^1 - x^0\|$$

und durch Wiederholung

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq \frac{1}{2} \|x^{i+1} - x^i\| \quad (11.6)$$

für  $i = 0, \dots, n$ . Das heißt,

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq \frac{1}{2^{i+1}} \min(M_1^{-1} M_2^{-1}, \frac{1}{2} R).$$

und außerdem gilt

$$\|x^{i+2} - x^0\| \leq \sum_{j=0}^{i+1} \|x^{j+1} - x^j\| < \sum_{j=0}^{i+1} \frac{1}{2^{j+1}} R < R.$$

Das bedeutet, dass  $x^{i+2} \in B_R(x^0)$ .

2. Nicht nur gilt  $x^i \in B_R(x^0)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , sondern (11.6) zeigt auch, dass  $\{x^i\}_{i=0}^\infty$  eine Cauchy-Folge ist und somit konvergent.

3. Setzen wir  $x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^i$ . Es gilt  $x^\infty \in \overline{B_R(x^0)}$ . Weil  $f$  und  $\nabla f$  stetig sind, und weil  $(\nabla f(x^\infty))^{-1}$  existiert, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x^{i+1} - x^i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left\| (\nabla f(x^i))^{-1} (y - f(x^i)) \right\| = \\ &= \left\| (\nabla f(x^\infty))^{-1} (y - f(x^\infty)) \right\| \geq \|\nabla f(x^\infty)\|^{-1} \|y - f(x^\infty)\|, \end{aligned}$$

und es folgt  $y = f(x^\infty)$ .

4. Es bleibt uns noch die quadratische Konvergenz zu zeigen. Wir haben

$$\|x^{i+1} - x^i\| \leq \frac{1}{2} (M_1 M_2)^{-1} \text{ für } i \geq 1. \quad (11.7)$$

Es folgt aus (11.6) und (11.5) dass:

$$\begin{aligned} \|x^\infty - x^{i+1}\| &\leq \sum_{j=i}^{\infty} \|x^{j+2} - x^{j+1}\| \leq \sum_{j=i}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} \|x^{i+2} - x^{i+1}\| = \\ &= 2 \|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq n M_1 M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2 \end{aligned} \quad (11.8)$$

und mit (11.8) und (11.7), dass

$$\begin{aligned} \|x^\infty - x^i\| &\geq \|x^{i+1} - x^i\| - \|x^\infty - x^{i+1}\| \geq \\ &\geq \|x^{i+1} - x^i\| - n M_1 M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2 \geq \frac{1}{2} \|x^{i+1} - x^i\|. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Kombinieren von (11.8) und (11.9) liefert

$$\|x^\infty - x^{i+1}\| \leq n M_1 M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2 \leq 4n M_1 M_2 \|x^\infty - x^i\|^2.$$

Das Ergebnis gilt ab  $i = 1$  für  $c = 4n M_1 M_2$ . Will man das Resultat für alle  $i$  haben, setzt man

$$c_0 = \frac{\|x^\infty - x^1\|}{\|x^\infty - x^0\|^2}$$

und nimmt  $c = \max(4n M_1 M_2, c_0)$ .

■

**Beispiel 11.7** Wir möchten das Minimum von  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x, y) = x + x^2 + xy + y^2 + e^x + e^{-y}$$

finden. Das Minimum ist eine Nullstelle von  $\nabla g = f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und wir setzen

$$f(x, y) = \nabla g(x, y) = (1 + 2x + y + e^x, x + 2y - e^{-y}).$$

Die Iteration wird dann

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = F(x_i, y_i)$$

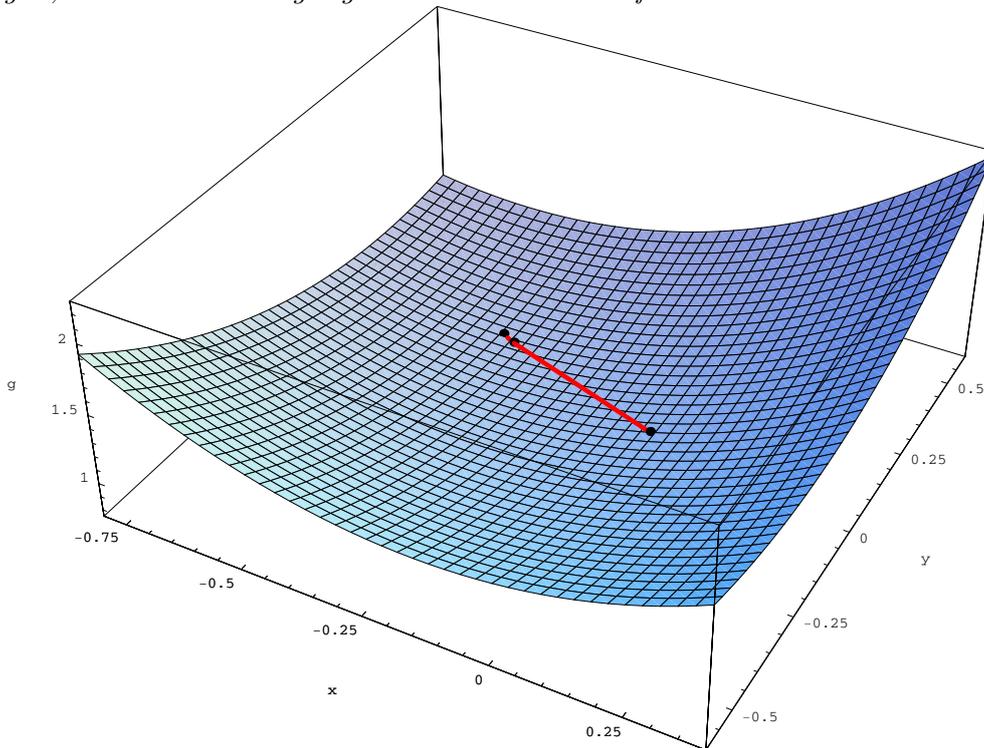
mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + e^x & 1 \\ 1 & 2 + e^{-y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + 2x + y + e^x \\ x + 2y - e^{-y} \end{pmatrix}.$$

Fängt man an mit  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , dann liefert Maple oder Mathematica:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (-0.875, 0.625), \\(x_2, y_2) &= (-1.0505688999526065271 \dots, 0.75746378645368218669 \dots), \\(x_3, y_3) &= (-1.0546238041746058483 \dots, 0.76092703922680100579 \dots), \\(x_4, y_4) &= (-1.0546258678189494017 \dots, 0.76092901396805203652 \dots), \\(x_5, y_5) &= (-1.0546258678195211608 \dots, 0.76092901396865302180 \dots), \\(x_6, y_6) &= (-1.0546258678195211608 \dots, 0.76092901396865302180 \dots).\end{aligned}$$

Wir haben keine Bedingung kontrolliert, sondern bloß gerechnet. Wenn wir ein wenig Glück haben, konvergiert diese Folge tatsächlich. Im Nachhinein sieht man, dass  $f$  sehr klein ist bei  $(x_4, y_4)$  und  $(\nabla f)^{-1}$  in einer Umgebung beschränkt ist. Hätten wir mit  $(x_4, y_4)$  angefangen, wären die Bedingungen wahrscheinlich erfüllt.



In der Skizze zu  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  sind die Iterationen  $(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$  eingezeichnet. Man kann  $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$  und  $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$  noch deutlich von dem Rest trennen. Die Punkte  $(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$  mit  $i \geq 2$  kann man nicht mehr unterscheiden.

## 11.2 Kontraktionen

Wir brauchen ein paar allgemeinere Ergebnisse.

**Lemma 11.8** Sei  $\{x^i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge. Wenn  $\theta \in (0, 1)$  existiert derart, dass

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq \theta \|x^{i+1} - x^i\|,$$

dann gilt

1. diese Folge ist konvergent:  $x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^i \in \mathbb{R}^n$  und
2.  $\|x^\infty - x^0\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|x^1 - x^0\|$ .

**Beweis.** Sei  $k > \ell$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x^k - x^\ell\| &\leq \sum_{i=\ell}^{k-1} \|x^{i+1} - x^i\| \leq \sum_{i=\ell}^{k-1} \theta^{i-\ell} \|x^{\ell+1} - x^\ell\| \leq \\ &\leq \sum_{i=\ell}^{\infty} \theta^{i-\ell} \|x^{\ell+1} - x^\ell\| = \frac{1}{1-\theta} \|x^{\ell+1} - x^\ell\| \leq \frac{\theta^\ell}{1-\theta} \|x^1 - x^0\|. \end{aligned}$$

Weil  $\theta^\ell \rightarrow 0$  für  $\ell \rightarrow \infty$  hat man bewiesen, dass  $\{x^i\}_{i=1}^\infty$  eine Cauchy-Folge ist. Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}^n$  sind konvergent. Nimmt man  $\ell = 0$  und  $k \rightarrow \infty$ , dann folgt die Abschätzung. ■

**Definition 11.9** Eine Funktion  $F : D \rightarrow D$ , wobei gilt: es gibt  $\theta \in [0, 1)$  derart, dass

$$\|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq \theta \|x - \tilde{x}\| \text{ für alle } x, \tilde{x} \in D \quad (11.10)$$

heißt eine **Kontraktion** auf  $D$ . Ein  $x \in D$  mit  $F(x) = x$  nennt man einen **Fixpunkt** für  $F$ .

Man sollte bemerken, dass eine Kontraktion stetig ist.

Aus Lemma 11.8 folgt sofort:

**Korollar 11.10** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kontraktion. Dann hat  $F$  genau einen Fixpunkt.

**Beweis.** Nehme  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig und wende Lemma 11.8 an auf die Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  iterativ definiert durch  $x_{n+1} = F(x_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $x_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  gilt wegen Stetigkeit von  $F$  und von der Norm, dass

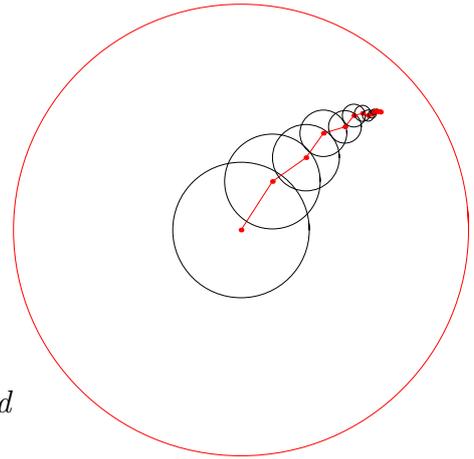
$$\|F(x_\infty) - x_\infty\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - x_n\| = 0$$

Also ist  $x_\infty$  ein Fixpunkt von  $F$ . Es gibt nur einen Fixpunkt, denn, wenn auch  $x^*$  ein Fixpunkt wäre, folgt

$$\|x_\infty - x^*\| = \|F(x_\infty) - F(x^*)\| \leq \theta \|x_\infty - x^*\|$$

und ein Widerspruch, wenn  $x_\infty \neq x^*$ . Bemerke übrigens, dass der Fixpunkt unabhängig ist von Startpunkt  $x_0$ . ■

Das Newton-Verfahren liefert uns nur eine Kontraktion, wenn wir in der Nähe einer einfachen Nullstelle anfangen. Also kann man das Korollar so direkt nicht anwenden.



**Theorem 11.11 (Kontraktionssatz auf einer Kugel)** Sei  $F : \overline{B_R(a)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt:

1.  $F$  ist eine Kontraktion mit Konstante  $\theta \in [0, 1)$ , und
2.  $\|F(a) - a\| \leq (1 - \theta)R$  oder  $F(\overline{B_R(a)}) \subset \overline{B_R(a)}$ .

Dann gilt  $F(\overline{B_R(a)}) \subset \overline{B_R(a)}$  und  $F$  hat genau einen Fixpunkt in  $\overline{B_R(a)}$ .

**Beweis.** Sei  $x \in \overline{B_R(a)}$ . Dann folgt aus der ersten Annahme der zweiten Bedingung und weil  $F$  eine Kontraktion ist, dass gilt

$$\|F(x) - a\| \leq \|F(x) - F(a)\| + \|F(a) - a\| \leq \theta \|x - a\| + (1 - \theta)R \leq R$$

und das heißt, dass  $F(x) \in \overline{B_R(a)}$ .

Wir setzen  $x^0 = a$  und  $x^{i+1} = F(x^i)$ . Weil  $F(\overline{B_R(a)}) \subset \overline{B_R(a)}$  ist die Folge  $\{x^i\}_{i=1}^\infty$  wohldefiniert. Weil

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| = \|F(x^{i+1}) - F(x^i)\| \leq \theta \|x^{i+1} - x^i\|,$$

liefert das letzte Lemma den Grenzwert  $x^\infty \in \overline{B_R(a)}$ . Die erste Annahme impliziert, dass  $F$  stetig ist. Deswegen gilt

$$x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} F(x^i) = F(\lim_{i \rightarrow \infty} x^i) = F(x^\infty)$$

und  $x^\infty$  ist ein Fixpunkt.

Wenn es noch einen zweiten Fixpunkt  $\bar{x}$  in  $\overline{B_R(a)}$  geben würde, dann folgt

$$\|\bar{x} - x^\infty\| = \|F(\bar{x}) - F(x^\infty)\| \leq \theta \|\bar{x} - x^\infty\|.$$

Weil  $\theta \in (0, 1)$  folgt  $0 \leq (1 - \theta) \|\bar{x} - x^\infty\| \leq 0$  und  $\bar{x} = x^\infty$ . ■

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweimal differenzierbare Funktion. Wir sind daran interessiert wie man  $x \in \mathbb{R}^n$  finden kann, wenn  $y \in \mathbb{R}^n$  gegeben für

$$f(x) = y. \tag{11.11}$$

Wenn  $\nabla f(x) \neq 0$  für alle  $x$ , dann ist es möglich mit dem Newton-Verfahren eine Lösung von (11.11) zu approximieren durch

$$\begin{cases} x^0 \text{ geschickt zu wählen, und} \\ x_{i+1} = x_i + (\nabla f(x_i))^{-1} (y - f(x_i)) \text{ für } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Das Invertieren von  $\nabla f(x_i)$  in jedem Schritt kann ziemlich aufwändig sein. Wir werden zeigen, dass man auch ein **vereinfachtes Newton-Verfahren** verwenden kann:

$$\begin{cases} x^0 \text{ geschickt zu wählen, und} \\ x_{i+1} = x_i + (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - f(x_i)) \text{ für } i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

und auch  $\bar{x}$  geschickt zu wählen. Oft nimmt man  $\bar{x} = x^0$ . Man hat für dieses vereinfachte Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{i+2} - x_{i+1} &= (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - f(x_{i+1})) = \\ &= (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (f(x_i) + \nabla f(\bar{x})(x_{i+1} - x_i) - f(x_{i+1})) = \\ &= (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\xi^i)) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (M(\bar{x} - \xi^i)) (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Hier ist zweimal der Mittelwertsatz angewendet worden:

$$\begin{aligned} \text{es gibt } \xi^i &\in [x_i, x_{i+1}] \text{ derart, dass } f(x_{i+1}) - f(x_i) = \nabla f(\xi^i) (x_{i+1} - x_i); \\ \text{es gibt } \tilde{\xi}^{i,j} &\in [\bar{x}, \xi^i] \text{ derart, dass } \frac{\partial}{\partial x_j} f(\bar{x}) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi^i) = \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} f(\tilde{\xi}^{i,j}) (\bar{x} - \xi^i) \end{aligned}$$

und mit

$$M(\bar{x} - \xi^i) = \left( \left( \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) (\tilde{\xi}^{i,j}) (\bar{x} - \xi^i) \right).$$

Wenn man garantieren kann, dass  $|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} M(\bar{x} - \xi^i)| \leq \frac{1}{2}$ , dann konvergiert  $\{x_i\}_{i=0}^\infty$  und  $x_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$  erfüllt  $x_\infty = x_\infty + (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - f(x_\infty))$ , anders gesagt:  $y = f(x_\infty)$ . Wenn man die erste und zweite Ableitungen von  $f$  kennt, dann liegen die Schranken für  $(\nabla f(\bar{x}))^{-1}$  und alle zweite Ableitungen in  $M$  fest und gilt mit expliziter Schranke in  $\mathcal{O}$ , dass

$$|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} M(\bar{x} - \xi^i)| = \mathcal{O}(\|\bar{x} - x_i\|).$$

Indem man  $x^0 = \bar{x}$  genügend nahe bei der Lösung nimmt, kann man dafür sorgen, dass  $\|\bar{x} - x_i\|$  klein bleibt. So eine Möglichkeit hat man, wenn man  $(\bar{x}, \bar{y})$  kennt mit  $\bar{y} = f(\bar{x})$  und man  $y = f(x)$  lösen möchte für  $y$  nahe bei  $\bar{y}$ .

### 11.2.1 Banachscher Fixpunktsatz

Den Banachschen Fixpunktsatz kann man für einen vollständigen normierten Vektorraum definieren, hat jedoch seine volle Aussagekraft für einen vollständigen metrischen Raum.

**Definition 11.12**  $d : V \times V \rightarrow [0, \infty)$  ist eine Metrik, wenn:

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in V$ , und
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  für alle  $x, y, z \in V$ .

**Definition 11.13** Wenn  $d$  eine Metrik ist für  $V$  nennt man  $(V, d)$  einen metrischen Raum.

Wenn  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum ist, dann ist  $(V, d)$  mit  $d(x, y) = \|x - y\|$  ein metrischer Raum. Ein metrischer Raum muss aber keine Vektorraumstruktur haben.

**Definition 11.14** Sei  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im metrischen Raum  $(V, d)$ .

1. Diese Folge heißt konvergent, wenn es  $a \in V$  gibt mit  $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > M_\varepsilon : d(x_n, a) < \varepsilon$ .
2. Diese Folge nennt man eine Cauchy-Folge, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m > M_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Definition 11.15**  $(V, d)$  heißt ein vollständiger metrischer Raum, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

**Definition 11.16** Sei  $(V, d)$  ein metrischer Raum.  $F : V \rightarrow V$  nennt man eine Kontraktion, wenn es  $\theta \in [0, 1)$  gibt mit  $d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$  für alle  $x, y \in V$ .

Der Banachsche Fixpunktsatz lautet wie folgt.

**Theorem 11.17 (Banach)** Sei  $(V, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und sei  $F : V \rightarrow V$  eine Kontraktion. Dann gibt es genau einen Fixpunkt.

Für  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  vereinfacht dies zu Korollar 11.10.

## 11.3 Umkehrfunktionen

**Theorem 11.18 (Satz über lokale Umkehrfunktionen)** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  derart, dass  $\bar{y} = f(\bar{x})$  und

$$\det(\nabla f(\bar{x})) \neq 0.$$

Dann gibt es offene Umgebungen  $U(\bar{x})$  von  $\bar{x}$  und  $V(\bar{y}) = f(U(\bar{x}))$  von  $\bar{y}$  derart, dass

1.  $f : U(\bar{x}) \rightarrow V(\bar{y})$  bijektiv ist;
2.  $g := f^{\text{inverse}}$  ist stetig differenzierbar auf  $V(\bar{y})$  und

$$(\nabla g)(y) = (\nabla f \circ g(y))^{-1} \text{ für } y \in V(\bar{y}).$$

**Bemerkung 11.18.1** Es reicht hier, dass  $f$  einmal stetig differenzierbar ist. Die Abschätzungen werden etwas technischer. Wenn man den Beweis genau betrachtet, dann sieht man, dass nur  $\nabla f(\tilde{x}) \rightarrow \nabla f(x)$  für  $\tilde{x} \rightarrow x$  verwendet wird.

**Bemerkung 11.18.2** Eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  nennt man einen **Homöomorphismus**, wenn  $f$  stetig ist und die Umkehrabbildung  $f^{\text{inv}} : B \rightarrow A$  existiert und stetig ist.

Eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  nennt man einen **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  stetig differenzierbar ist und die Umkehrabbildung  $f^{\text{inv}} : B \rightarrow A$  existiert und stetig differenzierbar ist.

**Beweis.** Wir betrachten  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $y \in \mathbb{R}^n$  als Parameter:

$$F(x; y) = x + (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - f(x))$$

und werden den Fixpunktsatz verwenden für  $x \mapsto F(x; y)$ .

Setze

$$\begin{aligned} M_1 &= \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1}\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})}, \\ M_2 &= n \sup \left\{ \|(\nabla^2 f_k(x))^{-1}\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})}; k \in \{1, \dots, n\} \text{ und } x \in \overline{B_1(\bar{x})} \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt für  $x, \tilde{x} \in \overline{B_1(\bar{x})}$ , dass

$$\begin{aligned} \|F(x; y) - F(\tilde{x}; y)\| &= \|x - \tilde{x} - (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (f(x) - f(\tilde{x}))\| = \\ &= \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} (f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\bar{x})(x - \tilde{x}))\| \leq \\ &\leq M_1 \|f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\bar{x})(x - \tilde{x})\| \leq \\ &\leq M_1 (\|f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\tilde{x})(x - \tilde{x})\| + \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\tilde{x})\| \|x - \tilde{x}\|). \end{aligned} \quad (11.12)$$

Weil  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Satz von Taylor angewendet auf jede Komponente, dass

$$\begin{aligned} \|f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\tilde{x})(x - \tilde{x})\| &\leq \frac{1}{2} M_2 \|x - \tilde{x}\|^2, \\ \text{und } \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\tilde{x})\| &\leq M_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Setzen wir die Abschätzung in (11.12) fort, bekommen wir für  $x, \tilde{x} \in \overline{B_R(\bar{x})}$  mit  $R \in (0, 1]$ , dass

$$\|F(x; y) - F(\tilde{x}; y)\| \leq M_1 \left( \frac{1}{2} M_2 \|x - \tilde{x}\|^2 + M_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\| \|x - \tilde{x}\| \right) \leq \frac{3}{2} M_1 M_2 R \|x - \tilde{x}\|.$$

Jetzt nehmen wir  $R = \min\left(\frac{1}{3}M_1^{-1}M_2^{-1}, 1\right)$  und finden so

$$\|F(x; y) - F(\tilde{x}; y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\| \quad \text{für } x, \tilde{x} \in \overline{B_R(\bar{x})}. \quad (11.13)$$

Die zweite Bedingung in Satz 11.11 muss noch erfüllt werden. Wir haben

$$\|F(\bar{x}; y) - \bar{x}\| = \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1}(y - f(\bar{x}))\| = \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1}(y - \bar{y})\| \leq M_1 \|y - \bar{y}\|.$$

Wenn wir also  $\|y - \bar{y}\| \leq \frac{1}{2}M_1^{-1}R$  nehmen, gilt

$$\|F(\bar{x}; y) - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2}R$$

und die Bedingungen von Satz 11.11 sind erfüllt für  $\theta = \frac{1}{2}$ .

Zusammengefasst: nehme  $R = \min\left(\frac{1}{3}M_1^{-1}M_2^{-1}, 1\right)$  und  $S = \frac{1}{2}M_1^{-1}R$  und Satz 11.11 gibt uns für  $y \in B_S(\bar{y})$  genau ein  $x_y \in B_R(\bar{x})$  mit  $y = f(x_y)$ . Die Funktion  $g : B_S(\bar{y}) \rightarrow B_R(\bar{x})$  mit  $g(y) = x_y$  ist also wohldefiniert und  $f \circ g(y) = y$  für alle  $y \in B_S(\bar{y})$ . Weil wegen (11.13) und der Definition von  $F$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(\tilde{y})\| &= \|F(x; y) - F(\tilde{x}; \tilde{y})\| \leq \\ &\leq \|F(x; y) - F(\tilde{x}; y)\| + \|F(\tilde{x}; y) - F(\tilde{x}; \tilde{y})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|g(y) - g(\tilde{y})\| + \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1}(y - \tilde{y})\|, \end{aligned}$$

folgt

$$\|g(y) - g(\tilde{y})\| \leq 2M_1 \|y - \tilde{y}\|$$

und so gilt, dass  $g$  sogar stetig ist.

Für die Differenzierbarkeit von  $g$  betrachten wir die folgende Gleichung. Wenn sowohl  $(x, y)$  als auch  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  eine Lösung ist, dann gilt

$$y - \tilde{y} = f(x) - f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi^1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi^n) \end{pmatrix} (x - \tilde{x}) \quad (11.14)$$

und weil  $\nabla f(\bar{x})$  invertierbar ist, gibt es  $B_r(\bar{x})$  mit  $r \in (0, R)$  derart, dass für alle  $\xi^1, \dots, \xi^n \in [x, \tilde{x}] \subset B_r(\bar{x})$  die Matrix in (11.14) invertierbar ist. Wir bekommen

$$g(y) - g(\tilde{y}) = x - \tilde{x} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi^1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi^n) \end{pmatrix}^{-1} (y - \tilde{y}).$$

Weil  $\xi^1, \dots, \xi^n \in [g(y), g(\tilde{y})]$  und  $g$  stetig ist, folgt dass  $\nabla f_k(\xi^k) \rightarrow \nabla f_k(g(\tilde{y}))$  für  $y \rightarrow \tilde{y}$

und auch<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi^1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi^n) \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \nabla f_1(\tilde{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\tilde{x}) \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{für } y \rightarrow \tilde{y}.$$

Das heißt,

$$\lim_{y \rightarrow \tilde{y}} \frac{\|g(y) - g(\tilde{y}) - (\nabla f \circ g(\tilde{y}))^{-1}(y - \tilde{y})\|}{\|y - \tilde{y}\|} = 0.$$

Für  $s = \frac{1}{2}M_1^{-1}r$  ist  $g : B_s(\bar{y}) \rightarrow B_r(\bar{x})$  sogar differenzierbar und die Ableitung ist wie vorhergesagt.

Wir setzen  $V(\bar{y}) = B_s(\bar{y})$  und  $U(\bar{x}) = g(B_s(\bar{y}))$ . Weil  $U(\bar{x}) = f^{-1}(B_s(\bar{y})) \cap B_r(\bar{x})$  ist auch  $U(\bar{x})$  offen. ■

**Beispiel 11.19** Für  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$  findet man

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

und  $\det(\nabla f(x)) = 4\|x\|^2$ . Also existiert lokal bei jedem  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  lokal eine Umkehrfunktion. Heißt das auch, dass  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  invertierbar ist? Die Antwort ist verneinend, denn  $f(0, 1) = f(0, -1)$ .

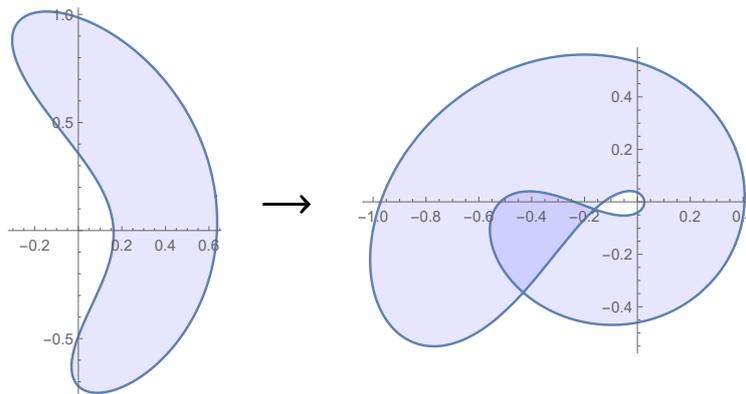


Abbildung 11.1: Skizze zu Beispiel 11.19

Bemerke, dass  $(x_1 + ix_2)^2 = x_1^2 - x_2^2 + i2x_1x_2$ . Wenn man die Funktion  $z \mapsto z^2$  von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  betrachtet, sollte man sich erinnern, das Längen quadriert werden,  $|z^2| = |z|^2$ ,

<sup>3</sup> $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  ist invertierbar genau dann, wenn  $\det(A) \neq 0$ . Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left( (-1)^{i+j} \det(A_{j,i}) \right)_{i,j},$$

wobei

$$\det(A_{i,j}) = \det \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ \hline a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

Weil die Einträge von  $A^{-1}$  rationale Funktionen der Einträge in  $A$  sind, ist die Abbildung  $A \mapsto A^{-1} : M^{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M^{n \times n}(\mathbb{R})$  stetig an der Stelle  $A_0$  wenn  $\det(A_0) \neq 0$ .

und Winkeln sich verdoppeln:  $\text{Arg } z^2 = 2 \text{ Arg } z$ . Das Verdoppeln der Winkel führt dazu, dass Bildmengen sich überlappen können, wie man in Abbildung 11.1 sieht.

Im Gegensatz zu einer Dimension bedeutet die Tatsache, dass eine stetige Funktion  $f$  lokal invertierbar ist auf einem (zusammenhängenden) Gebiet  $D$ , also nicht, dass sie eine Inverse für  $f : D \rightarrow f(D)$  hat.

**Beispiel 11.20** Wir betrachten  $f(x_1, x_2) = (e^{x_1 x_2}, x_1 + x_2)$  und untersuchen sowohl auf einer Umgebung von  $(0, 0)$ , als auch auf einer Umgebung von  $(1, 0)$  die Existenz einer Umkehrfunktion.

Wir haben

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1 x_2} & x_1 e^{x_1 x_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und finden

$$\det(\nabla f(x_1, x_2)) = (x_2 - x_1) e^{x_1 x_2}.$$

Also gilt  $\det(\nabla f(x_1, x_2)) = 0$  genau dann, wenn  $x_1 = x_2$ . Die Bedingungen des Satzes sind zum Beispiel nicht in  $(0, 0)$  erfüllt. In  $(-1, .6)$  sind sie erfüllt. Das heisst dass es eine Umgebung  $B_\varepsilon(-1, .6)$  gibt und  $g : f(B_\varepsilon(-1, .6)) \rightarrow B_\varepsilon(-1, .6)$  mit

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \Leftrightarrow g(y_1, y_2) = (x_1, x_2).$$

In einer Umgebung von  $(0, 0)$  ist der Satz nicht anwendbar. Lässt man Mathematica Bilder dazu anfertigen, dann sieht man, dass die Funktion bei  $(0, 0)$  für eine Faltung sorgt. Rechts steht das Bild der Menge links.

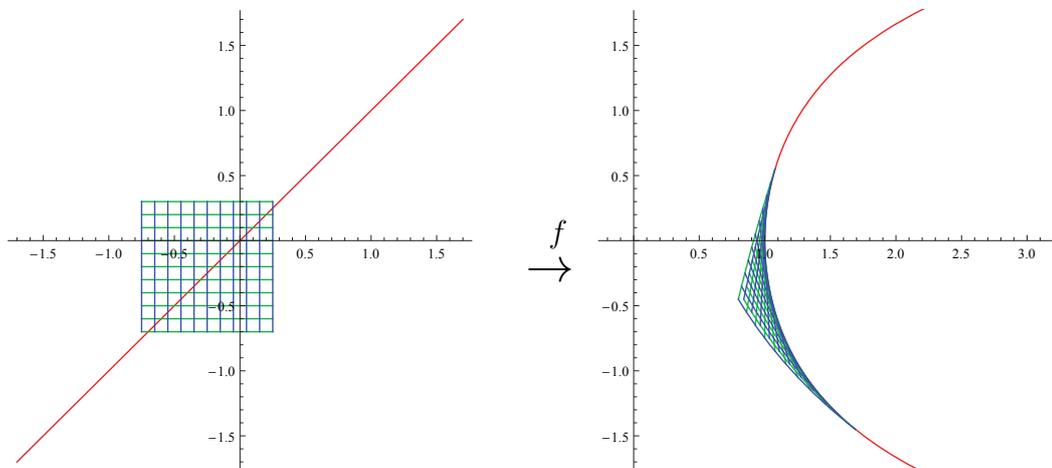


Abbildung 11.2: Das Bild eines Gitters um  $(0, 0)$  bei  $f$  aus Beispiel 11.20 füllt keine Umgebung von  $f(0, 0) = (1, 0)$  sondern ‘faltet’ sich zusammen. Es gibt keine Umkehrfunktion um  $(0, 0)$ ;  $f$  ist nicht lokal injektiv.

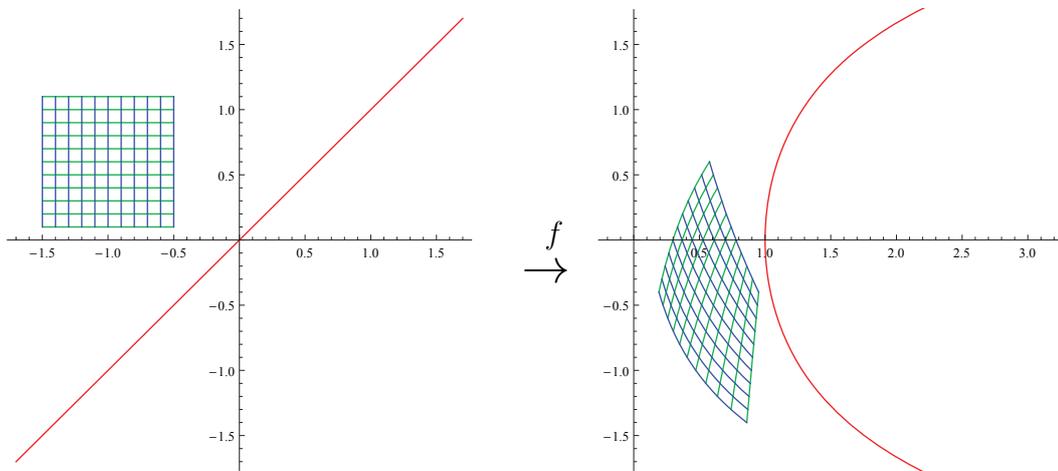


Abbildung 11.3: Das Bild eines Gitters um  $(-1, .6)$  bei  $f$  aus Beispiel 11.20 wirkt zwar verzerrt, aber füllt ein-eindeutig eine Umgebung von  $f(-1, .6) = (e^{-.6}, -.4)$ . Es gibt lokal eine Umkehrfunktion.

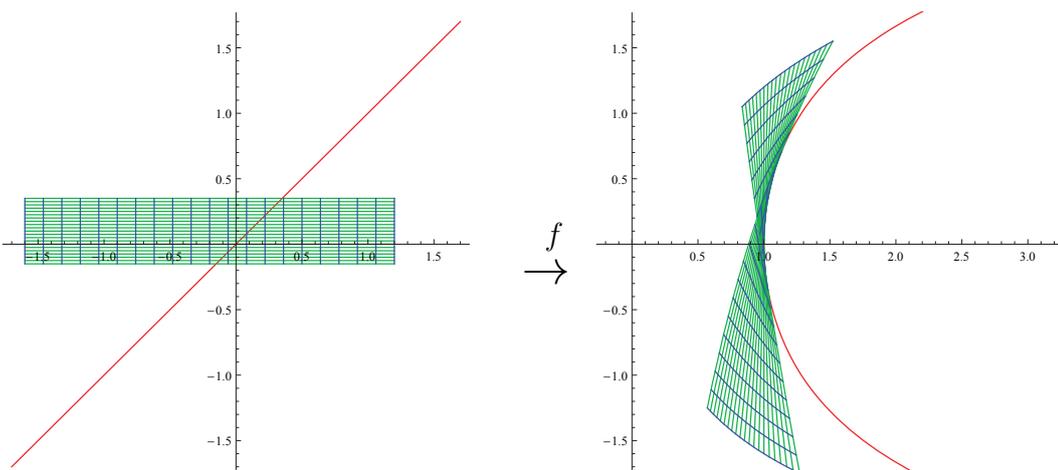


Abbildung 11.4: Noch ein Bild zu Beispiel 11.20.



# Analysis 2, Woche 12

## Implizite Funktionen



### 12.1 Implizite Funktionen in 2D

Wenn man den Kreis mit Radius 1 um  $(0, 0)$  beschreiben möchte, dann ist

$$\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$$

eine Möglichkeit. Oft ist es bequemer, so eine Figur oder einen Teil einer solchen Figur als Graph einer Funktion darzustellen. Für die obere Hälfte geht das:

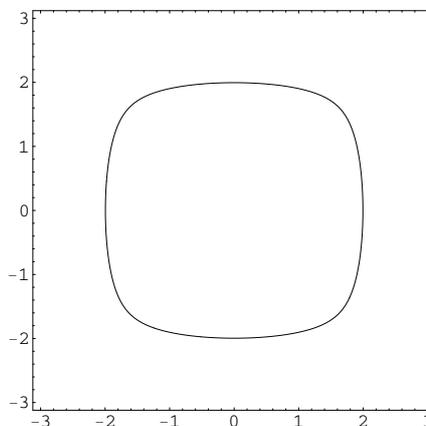
$$y = f(x) \text{ mit } f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Auch die untere Hälfte kann man ähnlich explizit beschreiben:  $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ .

Wenn man aber eine Figur betrachtet, die definiert ist durch

$$\{(x, y); e^{x^2} + 4x^2y^2 + e^{y^2} = e^4\},$$

hat man zwar etwas, das aussieht wie ein Fernseher aus 1950, aber nicht etwas, das sich leicht mit Hilfe von Funktionen  $y = f(x)$  oder  $x = f(y)$  beschreiben läßt. Trotzdem, wenn man das Bild betrachtet, würde man erwarten, auch hier lokal das Bild als Graph einer Funktion beschreiben zu können. Mathematisch geht das wie folgt.



**Theorem 12.1 (Satz über implizite Funktionen in 2D.)** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  derart, dass  $f(a, b) = 0$  und  $\partial_2 f(a, b) \neq 0$ .

Dann gibt es eine Umgebung  $B_r(a) \times B_s(b)$  von  $(a, b)$  und eine differenzierbare Funktion  $g : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(a) = b$  derart, dass:

- Für  $(x, y) \in B_r(a) \times B_s(b)$  gilt

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

- Für  $x \in B_r(a)$  gilt

$$g'(x) = - \left( \frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)} \right)_{y=g(x)}.$$

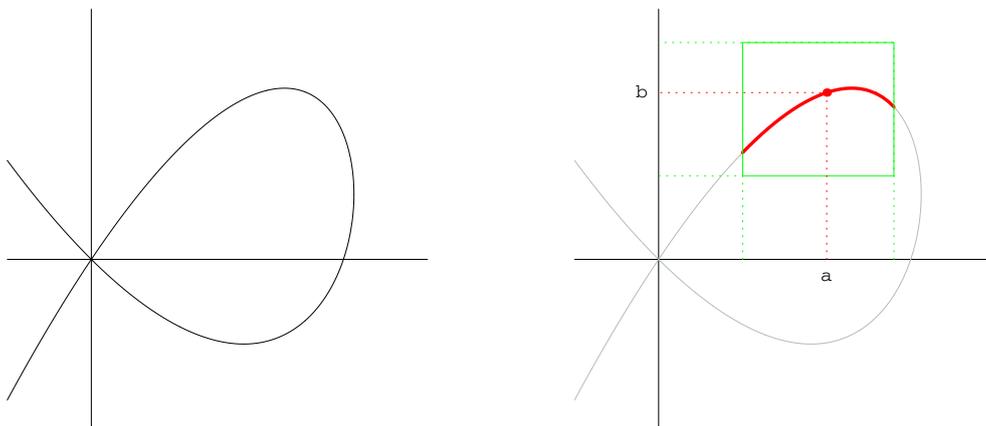


Abbildung 12.1:  $f(x, y) = 0$  ist lokal  $y = g(x)$ . Der Graph von  $g$  ist in rot dargestellt. Hier wird übrigens  $f(x, y) = xy + 3x^2 - 2y^2 - 2x^3$  und  $(a, b) = (1, 1)$  verwendet.

**Bemerkung 12.1.1** Für  $x \in B_r(a)$  gilt  $f(x, g(x)) = 0$ .

**Bemerkung 12.1.2** Der Satz für inverse Funktionen wird benutzt und man kann sehen, dass es auch hier reicht, wenn  $f$  einmal stetig differenzierbar ist.

**Bemerkung 12.1.3** Die Bedingung, dass  $f$  stetig differenzierbar ist, kann man nicht weglassen. Man kann Beispiel 9.11 verwenden um zu zeigen, dass differenzierbar alleine nicht reicht! Die Funktion in dem Beispiel ist

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ y \left( \frac{|y|}{x^2} - 1 \right) & \text{für } -x^2 < y < x^2, \\ y + x^2 & \text{für } y \leq -x^2, \end{cases}$$

und man hat  $\partial_2 f(0, 0) = 1 \neq 0$ . Es gibt jedoch mindestens drei Funktionen  $g$  derart, dass  $g(0) = 0$  und  $f(x, g(x)) = 0$ , nämlich  $g_1(x) = x^2$ ,  $g_2(x) = 0$  und  $g_3(x) = -x^2$ . Übrigens sieht man mit  $\partial_2 f(x, 0) = -1$  für  $x \neq 0$ , dass  $\partial_2 f$  nicht stetig ist in  $(0, 0)$ .

**Beweis.** Im Beweis verwenden wir den Satz zu Umkehrfunktionen. Definiere  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $F$  zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$\nabla F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Man hat

$$F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \det \left( \nabla F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Durch Theorem 11.18 gibt es für  $F|_{B_\varepsilon(a,b)}$  eine inverse Funktion  $G : B_\delta(a, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\begin{aligned} G \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_\varepsilon(a, b) \text{ und} \\ F \circ G \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in F(B_\varepsilon(a, b)), \end{aligned}$$

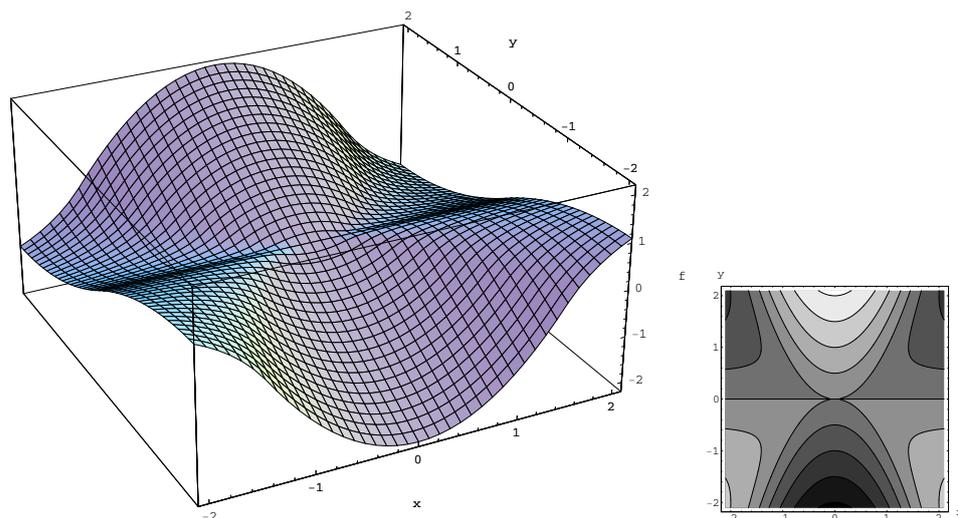


Abbildung 12.2: Graphen und Niveaulinien der Funktion aus Beispiel 9.11 und Bemerkung 12.1.3. Man kann die drei  $g$ 's erkennen ( $g_0(x) = 0$ ,  $g_{\pm 1}(x) = \pm x^2$ ), die zusammen  $f(x, y) = 0$  um  $(0, 0)$  beschreiben.

und  $G$  ist differenzierbar. Anders gesagt: für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_\varepsilon(a, b)$  und  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in F(B_\varepsilon(a, b))$  gilt

$$\begin{cases} x = \xi \\ f(x, y) = \eta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \xi \\ y = g(\xi, \eta) \end{cases}$$

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$

Wir brauchen jedoch keine Inverse von  $F$  sondern die implizit definierte Funktion  $g$ . Dies geht anschließend wie folgt. Nehmen wir  $r = \frac{1}{2}\varepsilon$  und definieren  $g : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $r = \frac{1}{2}\varepsilon$  durch

$$g(x) = G_2\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

dann gilt  $B_r(a) \times B_r(b) \subset B_\varepsilon(a, b)$  und außerdem folgt für  $x \in (a - r, a + r)$ , dass

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Anders gesagt,  $f(x, y) = 0$  in  $B_r(a) \times B_r(b)$  kann man auch beschreiben durch  $y = g(x)$  für  $x \in (a - r, a + r)$ .

Weil  $f$  und  $g$  differenzierbar sind, gilt außerdem für  $h(x) = f(x, g(x))$ , dass

$$0 = h'(x) = \partial_1 f(x, g(x))1 + \partial_2 f(x, g(x))g'(x),$$

also

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)}\right)_{y=g(x)}.$$

■

**Bemerkung 12.1.4** Wenn man sich nicht genau erinnert, welche Bedingungen in dem Satz zu impliziten Funktionen stehen, kann man sich das wie folgt merken. Wenn man  $f(x, y) = 0$  auch als  $y = Y(x)$  schreiben kann, wobei  $Y$  eine differenzierbare Funktion ist, dann gilt

$$f(x, Y(x)) = 0.$$

Falls  $f$  und  $Y$  stetig differenzierbare Funktionen sind, folgt

$$0 = \frac{d}{dx} (f(x, Y(x))) = \frac{\partial f}{\partial x} (x, Y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y} (x, Y(x)) Y'(x). \quad (12.1)$$

Wenn  $(x_0, y_0)$  auf der Kurve liegt und  $\frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \neq 0$ , dann gilt  $\frac{\partial f}{\partial y} (x, y) \neq 0$  wegen der stetigen Ableitung für  $(x, y)$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  und man findet für  $(x, Y(x))$  in dieser Umgebung

$$Y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} (x, Y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y} (x, Y(x))}.$$

Stetige Differenzierbarkeit von  $f$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \neq 0$  sind genau die Bedingungen des Satzes.

Übrigens folgt (12.1) aus der Kettenregel angewendet auf  $f \circ u$  mit  $u(x) = (x, Y(x))$  oder auch aus der Definition, dem Mittelwertsatz, der stetigen Differenzierbarkeit und der Kettenregel in einer Dimension

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(x, Y(x))) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, Y(x+h)) - f(x, Y(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h, Y(x+h)) - f(x, Y(x+h))}{h} + \frac{f(x, Y(x+h)) - f(x, Y(x))}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x} (x + \theta_h, Y(x+h)) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, Y(x+h)) - f(x, Y(x))}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (x, Y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y} (x, Y(x)) Y'(x). \end{aligned}$$

Hier ist  $\theta_h$  eine Zahl zwischen 0 und  $h$ .

## 12.2 Implizite Funktionen in höheren Dimensionen

**Beispiel 12.2** Betrachten wir die folgende Menge:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ und } (y-1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Das sind die Punkte in  $\mathbb{R}^3$ , die sowohl auf einer Kugel mit Radius  $\sqrt{2}$  um  $(0, 0, 0)$  liegen als auch auf einem Zylinder mit Radius 1 um die Achse  $\{(1, t, 0); t \in \mathbb{R}\}$ .

Der Durchschnitt dieser beiden Oberflächen gibt eine Kurve in  $\mathbb{R}^3$ . Lokal sollte man so eine Kurve auch bei fast allen Punkten beschreiben können durch

$$\{(x, f_1(x), f_2(x)); x \in I\}. \quad (12.2)$$

Das geht auch fast immer. In diesem Fall kann man die Funktionen  $f_1, f_2$  sogar berechnen:

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad f_2(x) = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^4} \quad \text{und } I = [0, 1]$$

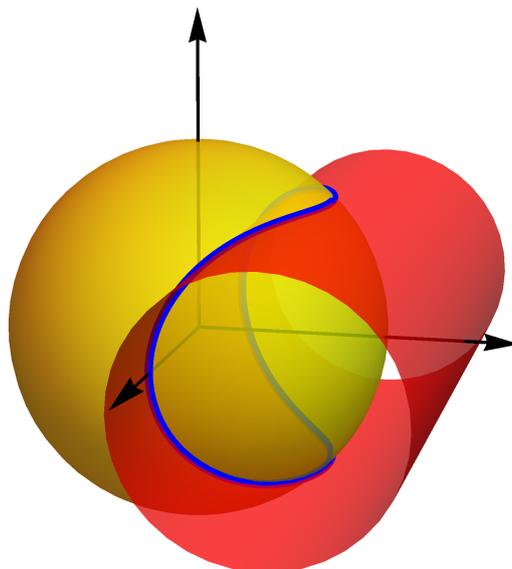


Abbildung 12.3: In blau die Menge  $K$  aus Beispiel 12.2 als Schnittmenge einer Sphäre und eines Zylinders

Nur wenn  $f_2(x) = 0$ , also bei  $x = \pm\sqrt{2}$ , kommen beide Alternativen zusammen und  $K$  ist lokal nicht mehr eindeutig wie in (12.2) zu schreiben.

**Zusammenfassung:** Wir haben angefangen mit  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , nämlich

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ (y - 1)^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix},$$

und haben  $G(x, y, z) = 0$  nach einer Variablen gelöst:

$$y = f_1(x) \text{ und } z = f_2(x).$$

Die Idee ist, dass 2 unabhängige Gleichungen mit 3 Variablen nur einen Freiheitsgrad ergeben. Hier haben wir  $x$  freigelassen und  $y$  und  $z$  als Funktion von  $x$  geschrieben.

Allgemeiner hat man  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $n > m$  und man möchte diese  $m$  Gleichungen

$$G(x_1, \dots, x_n) = 0$$

lösen nach  $(n - m)$  Variablen. Das heißt, wir suchen  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  derart, dass

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Die Frage lautet:

*Wann existiert (lokal) eine derartige Funktion?*

Wenn wir wissen, dass es eine solche Funktion gibt, heißt das nicht, dass wir die auch als explizite Formel finden können. Es heißt aber, dass Lösungen eines solchen Problems sich regulär verhalten und sich dann auch zum Beispiel mit Taylorreihen oder auch numerisch approximieren lassen.

Die Antwort, ob eine solche Funktion existiert, wird gegeben in:

**Theorem 12.3 (Satz über implizite Funktionen)** Sei  $n, m \in \mathbb{N}$  und sei

$$(x, y) \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Nimmt man  $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  derart, dass  $f(a, b) = 0$  und<sup>1</sup>

$$\det(\nabla_y f(x, y))|_{(x,y)=(a,b)} \neq 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung  $B_r(a) \times B_s(b)$  von  $(a, b)$  und eine differenzierbare Funktion

$$g : B_r(a) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } g(a) = b$$

derart, dass:

- für  $(x, y) \in B_r(a) \times B_s(b)$  gilt

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

- für  $x \in B_r(a)$  gilt:

$$\nabla g(x) = - \left( (\nabla_y f)(x, y)|_{y=g(x)} \right)^{-1} (\nabla_x f)(x, y)|_{y=g(x)}.$$

**Beweis.** Der Beweis ist ähnlich dem für den zweidimensionalen Fall. Wir betrachten  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\nabla F(x, y) = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array} \right)_{|(x,y)}$$

und

$$\det(\nabla F(x, y)) = 1^{n-m} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{|(x,y)}.$$

Aus der Annahme folgt, dass  $\det(\nabla F(a, b)) \neq 0$ , und der Satz über inverse Funktionen liefert uns lokal eine inverse Funktion  $G$  zu  $F$ . Das heißt, es gibt  $\varepsilon > 0$  und  $G : F(B_\varepsilon(a, b)) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  derart, dass:

$$G \circ F(x, y) = (x, y) \text{ für alle } (x, y) \in B_\varepsilon(a, b).$$

<sup>1</sup>

$$\det(\nabla_y f(x, y))|_{(x,y)=(a,b)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b_1} f_1(a, b) & \frac{\partial}{\partial b_2} f_1(a, b) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_m} f_1(a, b) \\ \frac{\partial}{\partial b_1} f_2(a, b) & \frac{\partial}{\partial b_2} f_2(a, b) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_m} f_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial b_1} f_m(a, b) & \frac{\partial}{\partial b_2} f_m(a, b) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_m} f_m(a, b) \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist  $G$  differenzierbar.

Weil  $F_i(x, y) = x_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $(x, y) \in B_\varepsilon(a, b)$  gilt, folgt  $G_i(F(x, y)) = x_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wir setzen  $r = \frac{1}{2}\varepsilon$  und legen dann  $g : B_r(a) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  fest durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} G_{n+1}(x, 0) \\ \vdots \\ G_{n+m}(x, 0) \end{pmatrix}.$$

Für  $(x, y) \in B_r(a) \times B_r(b)$  folgt, dass

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = G(x, 0) \Leftrightarrow y = g(x).$$

Weil  $F(x, g(x)) = 0$  folgt außerdem, dass

$$0 = \nabla(F(x, g(x))) = (\nabla_x F)(x, y)|_{y=g(x)} + (\nabla_y F)(x, y)|_{y=g(x)} (\nabla g)(x),$$

und weil  $(\nabla_y F)(x, y)$  invertierbar ist auf  $B_r(a, b)$ , gilt

$$(\nabla g)(x) = -((\nabla_y F)(x, g(x)))^{-1} (\nabla_x F)(x, g(x))$$

wie oben behauptet. ■

## 12.3 Extrema unter Nebenbedingungen

Wenn die Temperatur auf der Oberfläche einer Kugel,

$$G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \text{ mit } R = 1 \text{ (= 12742 km)}, \quad (12.3)$$

definiert ist durch

$$T(x, y, z) = x^2 + y + z, \quad (12.4)$$

kann es sein, dass das Maximum in Rio de Janeiro erreicht wird?

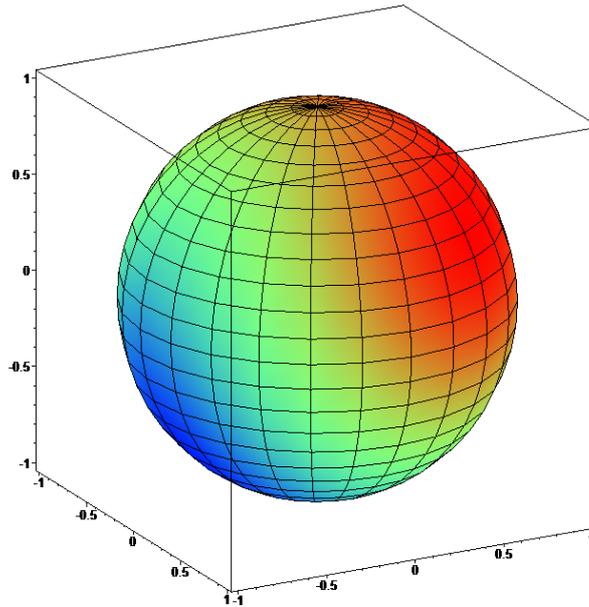


Abbildung 12.4: Die Farbe ist abhängig von  $T(x, y, z)$ .

Um die Stelle zu finden wo  $t$  maximal ist, könnte man  $z$  als Funktion von  $x$  und  $y$  schreiben (implizite Funktion!) und  $z = g(x, y)$  in  $T$  einsetzen und anschließend auf die übliche Weise  $\tilde{T}(x, y) := T(x, y, g(x, y))$  untersuchen. Das heißt, man hat als Kandidaten für die Extrema die stationären Punkte von  $\tilde{T}$ . Diese stationären Punkte findet man, indem man  $\nabla \tilde{T} = 0$  löst:

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{T})(x, y) &= \nabla(T(x, y, g(x, y))) = \nabla T(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \left( \partial_1 T(x, y, z) + \partial_3 T(x, y, z) \partial_1 g(x, y), \quad \partial_2 T(x, y, z) + \partial_3 T(x, y, z) \partial_2 g(x, y) \right)_{z=g(x, y)}. \end{aligned}$$

Der Satz über implizite Funktionen (Satz 12.3) sagt

$$\nabla g(x, y) = -(\partial_3 G(x, y, z))^{-1} (\partial_1 G(x, y, z), \partial_2 G(x, y, z))|_{z=g(x, y)}.$$

Zusammengefasst bedeutet  $(\nabla \tilde{T})(x, y) = 0$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_1 T(x, y, z) &= \frac{\partial_3 T(x, y, z)}{\partial_3 G(x, y, z)} \partial_1 G(x, y, z), \\ \partial_2 T(x, y, z) &= \frac{\partial_3 T(x, y, z)}{\partial_3 G(x, y, z)} \partial_2 G(x, y, z), \\ \partial_3 T(x, y, z) &= \frac{\partial_3 T(x, y, z)}{\partial_3 G(x, y, z)} \partial_3 G(x, y, z). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist beigefügt als Trivialität aber auch weil man so sieht, dass an einer stationären Stelle gilt: es gibt  $\lambda \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$\nabla T(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z).$$

Wir haben angenommen, dass  $z = g(x, y)$  existiert. Wenn  $\partial_3 G(x, y, z) \neq 0$ , dann darf man das wegen des Satzes über implizite Funktionen. Wenn jedoch  $\partial_3 G(x, y, z) = 0$  und  $\partial_2 G(x, y, z) \neq 0$  gelten würde, dann hätten wir eine ähnliche Geschichte erzählen können, wenn wir  $y$  und  $z$  vertauschen.

**Beispiel 12.4** Für (12.3-12.4) haben wir

$$\nabla T(x, y, z) = (y, x, 1) \text{ und } \nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Weil  $\|\nabla G(x, y, z)\| \neq 0$  gilt für  $G(x, y, z) = 0$ , folgt, dass entweder  $\partial_x G(x, y, z)$ ,  $\partial_y G(x, y, z)$  oder  $\partial_z G(x, y, z)$  ungleich 0 ist. Das heißt, dass an jeder Stelle  $(x, y, z)$  auf der Sphäre der Satz über implizite Funktionen anwendbar ist bezüglich mindestens einer der Variablen  $x$ ,  $y$  oder  $z$ . Das heißt wiederum, die stationären Punkte findet man durch

$$(2x, 1, 1) = \lambda (2x, 2y, 2z) \text{ und } G(x, y, z) = 0.$$

Es folgt, dass

$$2x = 2\lambda x, \quad 1 = 2\lambda y, \quad 1 = 2\lambda z \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Wir finden ( $x = 0$  oder  $\lambda = 1$ ) und  $y = z$ . Dann haben diese vier Gleichungen mit vier Variablen die folgenden Lösungen:

	$x$	$y$	$z$	$\lambda$	$T$
$P_1$ :	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$P_2$ :	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$P_3$ :	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$P_4$ :	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Schaut man diese Kandidaten für Extremwerte genauer an, so findet man zwei Maxima, nämlich in  $P_3$  und  $P_4$ , und ein Minimum in  $P_2$ .

Dieser Ansatz bringt uns folgendes Ergebnis:

**Theorem 12.5 (Multiplikatorsatz von Lagrange für eine Nebenbedingung)**

Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen. Wenn

$$F : \{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ein Extremum hat in  $a$ , dann gilt:

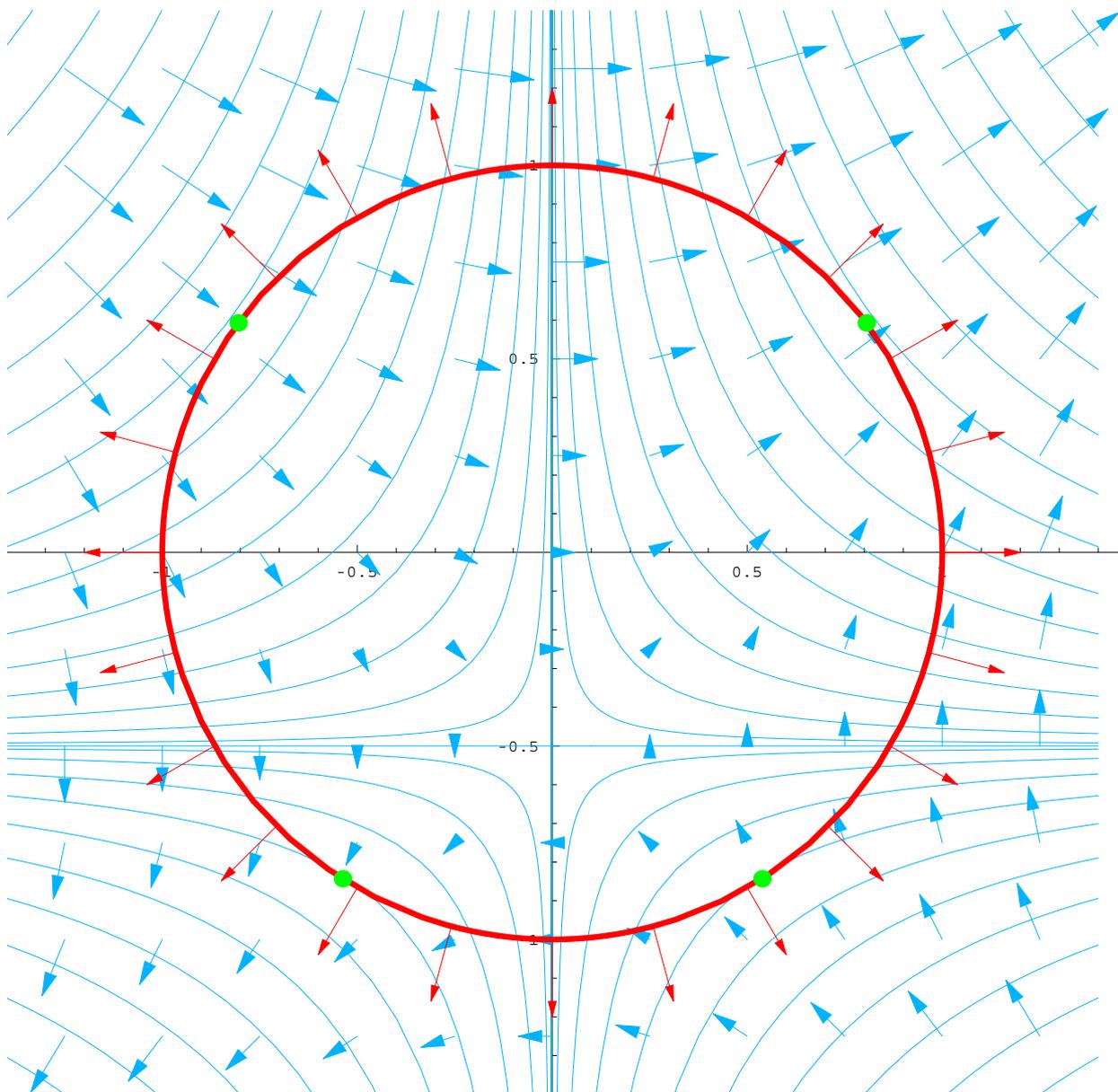
- $\nabla F(a) = \lambda \nabla G(a)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , oder
- $\nabla G(a) = 0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 12.5.1** Dieser Satz hilft uns, die folgende Frage zu beantworten:

Wie findet man ein Extremum von  $x \mapsto F(x)$  unter der Nebenbedingung  $G(x) = 0$ ?

Der Satz liefert uns die Kandidaten für die Extremstellen.

**Bemerkung 12.5.2** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Wir haben schon gesehen, dass an der Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$  der Gradient  $\nabla F(x)$  die Richtung angibt, in welcher  $F$  maximal zunimmt. Auch ist der Vektor  $\nabla G(a)$  in  $a$  orthogonal auf der (Hyper-)Oberfläche  $\{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = G(a)\}$ . Für  $F(x) = x_1(2x_2 + 1)$  und  $G(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$  sieht das wie folgt aus:



In blau die Niveaulinien von  $F$  und das zugehörige Gradientenfeld. Die Nebenbedingung  $G(x) = 0$  bedeutet, dass man nur  $x$  auf dem Kreisrand betrachtet. In den grünen Punkten gilt,  $\nabla F$  und  $\nabla G$  sind gleich oder gegengesetzt gerichtet. Dort liegen auch die vier Extrema:  $P_{st} = \left( \frac{s}{4} \sqrt{\frac{1}{2}(15 - t\sqrt{33})}, \frac{1}{8}(-1 - t\sqrt{33}) \right)$  für  $s, t \in \{\pm 1\}$ .

Auch dieser Ansatz lässt sich verallgemeinern.

**Theorem 12.6 (Multiplikatorsatz von Lagrange)** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit  $m < n$ , stetig differenzierbare Funktionen. Wenn

$$F : \{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ein Extremum hat in  $a$ , dann gilt:

- $\nabla F(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(a)$  für  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , oder
- $\text{Rang}(\nabla G(a)) < m$ .

**Bemerkung 12.6.1** Für  $m = 1$  bedeutet  $\text{Rang}(\nabla G(a)) < m$  genau  $\nabla G(a) = 0$ . Das heißt, Satz 12.5 ist ein Spezialfall von Satz 12.6. Wenn man den Beweis anschaut, sieht man, dass man beim zweiten • die Stellen findet, bei denen man den Satz zu impliziten Funktionen nicht anwenden kann. Wenn man diesen Satz anwenden kann, trifft der erste Punkt zu.

**Bemerkung 12.6.2** Wenn wir annehmen, dass der zweite • im Satz nicht zutrifft, dann kann man die folgende Eselsbrücke verwenden:

### Eselsbrücke

Suche man Extrema von

$$x \mapsto F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

unter den Nebenbedingungen  $G_1(x) = 0, \dots, G_m(x) = 0$ ,  
so suche man die Extrema von

$$(x, \lambda) \mapsto \tilde{F}(x, \lambda) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

mit  $\tilde{F}(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x)$ .

Stationäre Stellen für  $\tilde{F}$  findet man durch

$$0 = \nabla_{x,\lambda} \tilde{F}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_x \tilde{F}(x, \lambda) \\ \nabla_\lambda \tilde{F}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x G_i(x) \\ G(x) \end{pmatrix}, \quad (12.5)$$

mit  $0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ . Diese  $n + m$  Gleichungen in  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  sind genau die Bedingungen beim ersten • des Satzes. Generisch bekommt man nur bei genau  $n + m$  (nicht-lineare) Gleichungen in  $n + m$  Unbekannten isolierte Lösungen.

**Beweis.** Wir nehmen an, dass  $\text{Rang}(\nabla G(a)) = m$ . Dann gibt es in

$$\begin{pmatrix} \partial_1 G_1(a) & \partial_2 G_1(a) & \cdots & \partial_n G_1(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 G_m(a) & \partial_2 G_m(a) & \cdots & \partial_n G_m(a) \end{pmatrix}$$

$m$  unabhängige Spalten. Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass diese Spalten die letzten  $m$  sind:

$$\begin{pmatrix} \partial_{n-m+1} G_1(a) \\ \partial_{n-m+1} G_2(a) \\ \vdots \\ \partial_{n-m+1} G_m(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{n-m+2} G_1(a) \\ \partial_{n-m+2} G_2(a) \\ \vdots \\ \partial_{n-m+2} G_m(a) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \partial_n G_1(a) \\ \partial_n G_2(a) \\ \vdots \\ \partial_n G_m(a) \end{pmatrix}.$$

Wegen des Satzes über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$  von  $a^* = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  und eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  derart, dass für  $x \in B_r(a)$  gilt

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow (x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Auch kann man die Ableitungen von  $g$  schreiben mit Hilfe der Ableitungen von  $G$ . Bevor wir noch länger jede Menge riesige Matrizen schreiben, schlagen wir folgende kürzere Notation vor:

$$\mathcal{G}_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(a) & \cdots & \cdots & \partial_{n-m} G_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 G_m(a) & \cdots & \cdots & \partial_{n-m} G_m(a) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_2 = \begin{pmatrix} \partial_{n-m+1} G_1(a) & \cdots & \partial_n G_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n-m+1} G_m(a) & \cdots & \partial_n G_m(a) \end{pmatrix}.$$

Das heißt  $\nabla G(a) = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$  mit  $\mathcal{G}_1 \in M^{m \times (n-m)}(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{G}_2 \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$ .

Der Satz über implizite Funktionen liefert uns so

$$\nabla g(a^*) = -\mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_1.$$

Wir setzen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, g(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

und definieren ähnlich  $\nabla F(a) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  mit  $\mathcal{F}_1 \in M^{1 \times (n-m)}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}_2 \in M^{1 \times m}(\mathbb{R})$ . Wir finden

$$\nabla f(a^*) = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \nabla g(a^*) = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_1. \quad (12.6)$$

Die Funktion  $F : \{x \in B_r(a); G(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  hat ein Extremum in  $a$ , genau dann, wenn  $f$  ein Extremum hat in  $a^*$ . Weil  $f$  differenzierbar ist, hat man  $\nabla f(a^*) = 0$ . Schreiben wir zu (12.6) auch noch  $0 = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_2$ , dann folgt

$$\nabla F(a) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = (\mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_1, \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_2) = \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \nabla G(a).$$

Man soll bemerken, dass  $\mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \in M^{1 \times m}(\mathbb{R})$ . Mit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1}$  folgt das Ergebnis. ■

**Beispiel 12.7** Wir möchten die Extrema finden von  $f(x, y, z) = x^2(y^2 + z^2)$  für  $(x, y, z) \in K$ , wobei  $K$  die Menge ist, der wir schon in Abbildung 12.2 auf Seite 145 begegnet sind:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ und } (y-1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Nennen wir  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$  und  $g_2(x, y, z) = (y-1)^2 + z^2 - 1$ . Der Multiplikatorsatz besagt, dass die Kandidaten für Extrema sich befinden in  $(x, y, z)$  mit

- $\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z)$ , oder
- $\text{Rang} \begin{pmatrix} \nabla g_1(x, y, z) \\ \nabla g_2(x, y, z) \end{pmatrix} < 2$ .

Die erste Möglichkeit ergibt

$$\begin{pmatrix} 2x(y^2 + z^2) \\ 2x^2y \\ 2x^2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$(x = 0 \text{ oder } y^2 + z^2 = \lambda_1) \text{ und } x^2y = (\lambda_1 + \lambda_2)y - \lambda_2 \\ \text{und } (z = 0 \text{ oder } x^2 = \lambda_1 + \lambda_2).$$

Wir unterscheiden vier Fälle:

1.  $x = 0$  und  $z = 0$ . Dann soll gelten, dass  $y^2 = 2$  und  $(y - 1)^2 = 1$  und wir finden keine Lösung.
2.  $x = 0$  und  $x^2 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Dann bekommt man  $y^2 + z^2 = 2$  und  $(y - 1)^2 + z^2 = 1$ . Also  $-2y + 2 = 0$  und wir haben als Kandidaten

$$P_1 = (0, 1, 1) \text{ und } P_2 = (0, 1, -1).$$

3.  $y^2 + z^2 = \lambda_1$  und  $z = 0$ . Dann bekommt man  $x^2 + y^2 = 2$  und  $(y - 1)^2 = 1$ . Dann folgt  $y = 2$  oder  $y = 0$ , aber wir haben nur neue Kandidaten für  $y = 0$ :

$$P_3 = (\sqrt{2}, 0, 0) \text{ und } P_4 = (-\sqrt{2}, 0, 0).$$

Für  $y = 2$  finden wir einen Widerspruch zu  $2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 = 4$ .

4.  $y^2 + z^2 = \lambda_1$  und  $x^2 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Mit  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  folgt  $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2$  und  $\lambda_2 = 2 - 2\lambda_1 = 2 - 2y^2 - 2z^2$ . Wir haben zu lösen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ und } (y - 1)^2 + z^2 = 1 \text{ und } x^2 y = x^2 y - (2 - 2y^2 - 2z^2).$$

Die letzte Gleichung liefert  $y^2 + z^2 = 1$  und mit  $(y - 1)^2 + z^2 = 1$  folgt  $y = \frac{1}{2}$ . Die Kandidaten sind:

$$P_{5,6,7,8} = \left( \sigma_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\sigma_2 \right) \text{ mit } \sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}.$$

Die zweite Möglichkeit ist, dass  $\nabla g_1(x, y, z)$  und  $\nabla g_2(x, y, z)$  abhängig sind. Man kann zeigen, dass das auf  $K$  nicht passiert.

In den Punkten  $P_i$  nimmt  $f$  folgende Werte an:

$$f(0, 1, \pm 1) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2}, 0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad f\left(\pm 1, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1.$$

Weil  $K$  kompakt ist, werden die Extrema angenommen. Es lässt sich raten, welche Punkte die Maxima und welche die Minima liefern. Ein Bild steht auf der nächsten Seite.

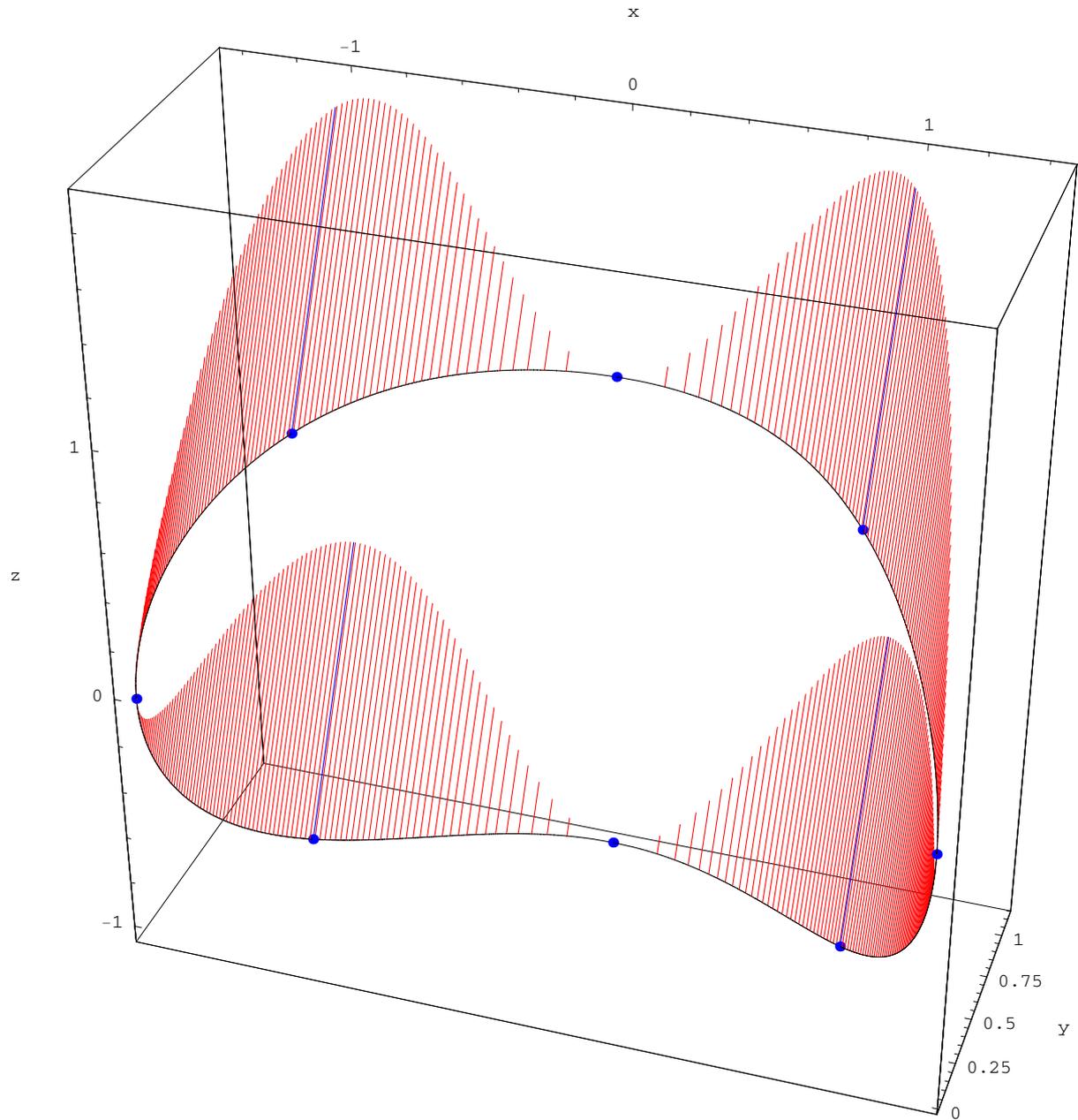


Abbildung 12.5: Eine Skizze zu Beispiel 12.7.  $K$  wird dargestellt durch die schwarze Kurve; die Extremstellen sind blau; die Funktionswerte sind proportional zu der Länge der Stäbchen.

# Analysis 2, Woche 13

## Integrale in mehreren Dimensionen I



### 13.1 Volumen

Die geometrisch inspirierten Prinzipien für ein Volumen sind:

- Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b \geq a$  setzen wir  $\text{Vol}_{\mathbb{R}}(a, b) = b - a$  und  $\text{Vol}_{\mathbb{R}}(\{a\}) = 0$ .
- Wenn  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $B \subset \mathbb{R}^m$  beide ein Volumen haben, dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^{n+m}}(A \times B) = \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A) \text{Vol}_{\mathbb{R}^m}(B).$$

- Wenn  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  beide ein Volumen haben und  $A \cap B = \emptyset$ , dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A \cup B) = \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A) + \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B).$$

- Wenn  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  beide ein Volumen haben und  $A \subset B$ , dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A) \leq \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B).$$

Wenn deutlich ist, um welche Dimension es sich handelt, dann schreiben wir nur Vol. Wir nennen

$$B := (x_1, y_1] \times (x_2, y_2] \times \cdots \times (x_n, y_n] = \{z \in \mathbb{R}^n; x_i < z_i \leq y_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

mit  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  einen Block in  $\mathbb{R}^n$ . Definieren wir für so einen Block mit  $x_i \leq y_i$

$$\text{Vol}((x_1, y_1] \times (x_2, y_2] \times \cdots \times (x_n, y_n]) = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \cdots (y_n - x_n)$$

dann sieht man, dass die oben genannten Regeln erfüllt sind. Als nächstes definieren wir für

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^k B_i,$$

wobei  $B_1, \dots, B_k$  paarweise disjunkte Blöcke sind, das Volumen durch Addition der einzelnen Volumen:

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) := \sum_{i=1}^k \text{Vol}(B_i).$$

Für andere Gebiete wird folgendes verabredet:

**Definition 13.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Menge.

- Wir nennen  $\{B_i\}_{i=1}^\ell$  eine äußere Familie von Blöcken zu  $\Omega$ , wenn  $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^\ell B_i$ . Das **äußere Volumen** von  $\Omega$  wird definiert als

$$\text{Vol}_a(\Omega) = \inf \left\{ \text{Vol} \left( \bigcup_{i=1}^k B_i \right); \{B_i\}_{i=1}^\ell \text{ ist eine äußere Familie von Blöcken zu } \Omega \right\}.$$

- Wir nennen  $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^\ell$  eine innere Familie von Blöcken zu  $\Omega$ , wenn  $\tilde{B}_i \cap \tilde{B}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_{i=1}^\ell \tilde{B}_i \subset \Omega$ . Das **innere Volumen** von  $\Omega$  wird definiert als

$$\text{Vol}_{in}(\Omega) = \sup \left\{ \text{Vol} \left( \bigcup_{i=1}^k \tilde{B}_i \right); \{\tilde{B}_i\}_{i=1}^\ell \text{ ist eine innere Familie von Blöcken zu } \Omega \right\}.$$

**Definition 13.2** Wenn  $\text{Vol}_a(\Omega) = \text{Vol}_{in}(\Omega)$ , dann sagen wir “ $\Omega$  hat ein Volumen” und schreiben  $\text{Vol}(\Omega) = \text{Vol}_a(\Omega) = \text{Vol}_{in}(\Omega)$ .

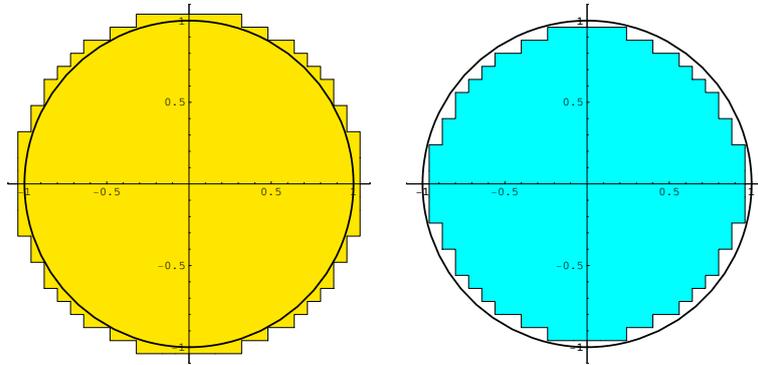


Abbildung 13.1: Kreis, von außen und von innen mit Rechtecken approximiert

**Bemerkung 13.2.1** Jedes beschränkte Gebiet hat ein äußeres und ein inneres Volumen. Ein Beispiel, bei dem beide verschieden sind, ist  $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ :  $\text{Vol}_a(\Omega) = 1$  und  $\text{Vol}_{in}(\Omega) = 0$ .

**Bemerkung 13.2.2** Um zu zeigen, dass  $\Omega$  ein Volumen hat, reicht es zu zeigen, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine äußere Familie  $\{B_i\}_{i=1}^\ell$  und eine innere Familie  $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^m$  gibt mit

$$\text{Vol} \left( \bigcup_{i=1}^\ell B_i \right) \leq \text{Vol} \left( \bigcup_{i=1}^m \tilde{B}_i \right) + \varepsilon$$

**Bemerkung 13.2.3** Wir haben Blöcke genommen, die zusammengestellt sind mit Hilfe von halboffenen Intervallen. Stattdessen kann man abgeschlossene Blöcke  $[x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times \cdots \times [x_n, y_n]$  oder auch offene  $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \times \cdots \times (x_n, y_n)$  betrachten, wenn man in Definition 13.1 annimmt, dass eine Familie von Blöcken  $\{B_i\}_{i=1}^\ell$  derart ist, dass  $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

**Lemma 13.3** Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und konvex<sup>1</sup> ist, existiert  $\text{Vol}(\Omega)$ .

<sup>1</sup>Ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt konvex, wenn für jedes Paar  $a, b \in \Omega$  gilt, dass  $[a, b] \subset \Omega$ . Zur Erinnerung:

$$[a, b] = \{sa + (1-s)b; 0 \leq s \leq 1\}.$$

## 13.2 Integrale durch Ober- und Untersummen

**Definition 13.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit endlichem Volumen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative Funktion. Setze  $f(x) = 0$  für  $x \notin \Omega$ .

- Wir nennen  $O_f \in \mathbb{R}$  eine *Obersumme*, wenn es eine äußere Familie von Blöcken  $\{B_i\}_{i=1}^{\ell}$  zu  $\Omega$  gibt und es  $\bar{f}_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) gibt derart, dass

1.  $\bigcup_{i=1}^{\ell} B_i \supset \Omega$  und
2.  $\bar{f}_i \geq f(x)$  für  $x \in B_i$  und
3.  $O_f = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{f}_i \text{Vol}(B_i)$ .

- Wir nennen  $U_f \in \mathbb{R}$  eine *Untersumme*, wenn es eine innere Familie von Blöcken  $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^{\ell}$  zu  $\Omega$  gibt, und es  $\underline{f}_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) gibt derart, dass

1.  $\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{B}_i \subset \Omega$  und
2.  $\underline{f}_i \leq f(x)$  für  $x \in \tilde{B}_i$  und
3.  $U_f = \sum_{i=1}^{\ell} \underline{f}_i \text{Vol}(\tilde{B}_i)$ .

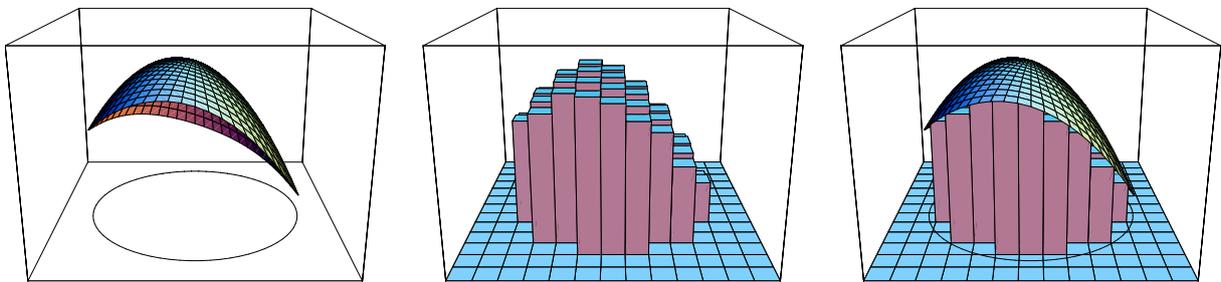


Abbildung 13.2: Skizzen zu einer Funktion  $f : B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ , einer Untersumme und beiden zusammen

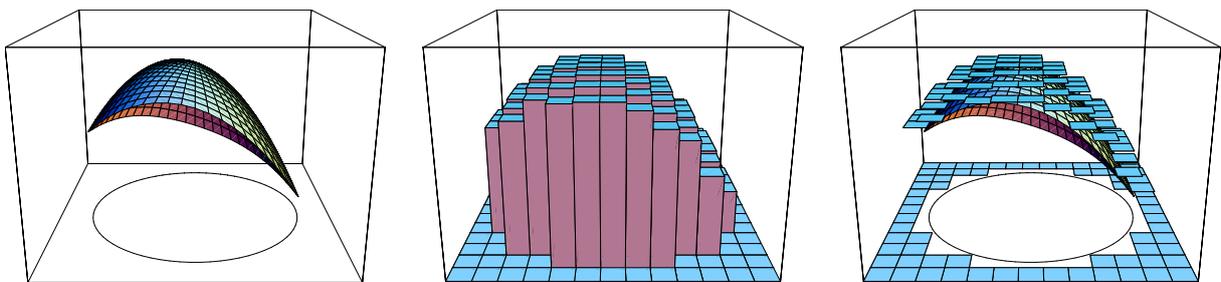


Abbildung 13.3: Skizzen zu einer Funktion  $f : B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ , einer Obersumme und beiden zusammen (aber ohne Stäbchen).

**Definition 13.5** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit endlichem Volumen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative Funktion.

Wir nennen  $f$  *R-integrierbar* über  $\Omega$ , wenn

$$I_f := \sup \{U_f; \text{Untersummen für } f \text{ auf } \Omega\} = \inf \{O_f; \text{Obersummen für } f \text{ auf } \Omega\},$$

und  $I_f \in \mathbb{R}$ . Wir nennen diese Zahl das *R-Integral* für  $f$  auf  $\Omega$  und schreiben

$$\int_{\Omega} f(x) dx := I_f.$$

Integrale sind hier nur für nichtnegative Funktionen definiert. Für negative Funktionen und Funktionen mit Vorzeichenwechsel betrachtet man  $f^+$  und  $f^-$  getrennt. Die Funktionen  $f^+$  und  $f^-$  definiert man als

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0).$$

Es folgt, dass  $f^+$  und  $f^-$  nichtnegative Funktionen sind und dass

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

**Definition 13.6** Wir nennen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  *R-integrierbar* über  $\Omega$ , wenn sowohl  $f^+ : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als auch  $f^- : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  *R-integrierbar* über  $\Omega$  sind, und setzen

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

**Bemerkung 13.6.1** Der Buchstabe *R*, der hier erscheint verweist auf Riemann. Was wir hier definiert haben, ist nicht genau so wie Riemann es gemacht hat, aber reicht vorläufig für unsere Zwecke aus. Das *R-Integral* und auch das originale Riemann-Integral haben leider nicht all die schönen Eigenschaften, die man eigentlich haben möchte. In Analysis 3 wird statt diesem Integral dann auch das Lebesgue-Integral eingeführt und verwendet.

**Lemma 13.7** Seien  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  *R-integrierbar* auf  $\Omega$ . Dann gilt  $f + g$  ist *R-integrierbar* auf  $\Omega$  und

$$\int_{\Omega} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} g(x) dx$$

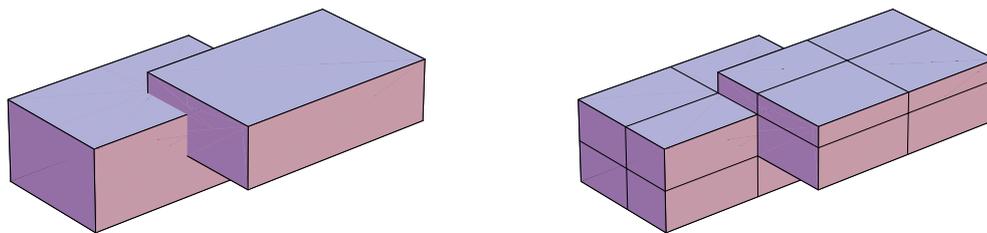
**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\{\tilde{B}_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$  und  $\{B_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$ , die derartige Unter- und Obersummen für  $\int_{\Omega} f^+(x) dx$  liefern, dass

$$O_{f^+} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq U_{f^+} \leq \int_{\Omega} f^+(x) dx \leq O_{f^+} \leq U_{f^+} + \frac{1}{24}\varepsilon.$$

Ebenso gibt es  $\{\tilde{B}_i^{g^+}\}_{i=1}^{m_{g^+}}$  und  $\{B_i^{g^+}\}_{i=1}^{m_{g^+}}$ , die ähnlich Unter- und Obersummen für  $\int_{\Omega} g^+(x) dx$  liefern derart, dass

$$O_{g^+} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq U_{g^+} \leq \int_{\Omega} g^+(x) dx \leq O_{g^+} \leq U_{g^+} + \frac{1}{24}\varepsilon.$$

Jetzt kann man mit  $\{B_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$  und  $\{B_j^{g^+}\}_{j=1}^{m_{g^+}}$  eine neue Familie von Blöcken bilden. Wenn zwei Blöcke  $B_i^{f^+}$  und  $B_j^{g^+}$  einen nichtleeren Durchschnitt haben, teilt man diese in höchstens  $2^{n+1} - 1$  neue Teilblöcke.



Wenn man so in endlich vielen Schritten eine neue Familie  $\{B_k^{f^++g^+}\}_{k=1}^{m_{f^++g^+}}$  bekommen hat, nimmt man als Abschätzung von unten für  $f^+ + g^+$  die 'alten'  $f_i^+ + g_j^+$ . So bekommt man eine Untersumme  $U_{f^++g^+} = U_{f^+} + U_{g^+}$ . Ebenso konstruiert man eine Obersumme und

$$O_{f^++g^+} - \varepsilon \leq U_{f^++g^+} \leq \int_{\Omega} (f^+(x) + g^+(x)) dx \leq O_{f^++g^+} \leq U_{f^++g^+} + \varepsilon.$$

Weil man für jedes  $\varepsilon > 0$  solche Unter- und Obersummen konstruieren kann, folgt, dass  $\int_{\Omega} (f^+(x) + g^+(x)) dx$  existiert und dass sogar gilt

$$\int_{\Omega} (f^+(x) + g^+(x)) dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx + \int_{\Omega} g^+(x) dx.$$

Das gleiche macht man für  $f^-$  und  $f^+$  und das Ergebnis folgt. ■

**Lemma 13.8** Sei  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  und  $f : \Omega_2 \cup \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die  $R$ -integrierbar ist auf  $\Omega_1$  und auf  $\Omega_2$ . Dann gilt  $f$  ist  $R$ -integrierbar auf  $\Omega_2 \cup \Omega_1$  und

$$\int_{\Omega_2 \cup \Omega_1} f(x) dx = \int_{\Omega_1} f(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x) dx.$$

**Beweis.** Auch hier gibt es nur ein Problem, wenn sich zwei Blöcke bei Ober- oder Untersummen für  $f^+$  oder  $f^-$  überschneiden. Die betreffenden Blöcke zu zerschneiden wie oben führt zur Lösung dieses Problems. ■

**Lemma 13.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Wenn  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $R$ -integrierbare Funktionen sind mit  $f \leq g$  auf  $\Omega$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx.$$

**Beweis.** Wenn  $f \leq g$  auf  $\Omega$ , dann gilt auch  $f^+ \leq g^+$  und  $f^- \geq g^-$  auf  $\Omega$ . Wiederum bastelt man mit den Blöcken  $\{B_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$  und  $\{B_j^{g^+}\}_{j=1}^{m_{g^+}}$  eine neue  $\{B_k\}_{k=1}^m$  durch Teilung in gemeinsame Teilblöcke. Wenn  $B_k$  die beiden Väter  $B_i^{f^+}$  und  $B_j^{g^+}$  hat, und  $f_i^+$  und  $g_j^+$  die obere Abschätzung für  $f$  und  $g$  sind, ist  $\min(\bar{f}_i^+, \bar{g}_j^+)$  beziehungsweise  $\bar{g}_j^+$  eine obere Abschätzung für  $f^+, g^+$ . Das heißt, für jede Obersumme  $O_{g^+}$  für  $g^+$  gibt es eine Obersumme  $\tilde{O}_{f^+}$  für  $f^+$  mit  $\tilde{O}_{f^+} \leq O_{g^+}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^+(x) dx &= \inf \{O_{f^+}; \text{Obersummen für } f\} \leq \\ &\leq \inf \{O_{g^+}; \text{Obersummen für } g\} = \int_{\Omega} g^+(x) dx. \end{aligned}$$

Ebenso geht man voran für  $f^-$  und  $g^-$  und findet

$$\int_{\Omega} f^-(x) dx \geq \int_{\Omega} g^-(x) dx$$

und das Ergebnis folgt aus (13.6). ■

**Theorem 13.10** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und konvex. Eine Funktion  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetig ist, ist R-integrierbar auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, dass  $\Omega \subset [-M, M]^n$  und dass  $f \geq 0$  gilt. Wenn  $f$  das Vorzeichen wechselt, dann betrachtet man  $f^+$  und  $f^-$  getrennt. Stetigkeit von  $f$  impliziert Stetigkeit von  $f^+$  und  $f^-$ .

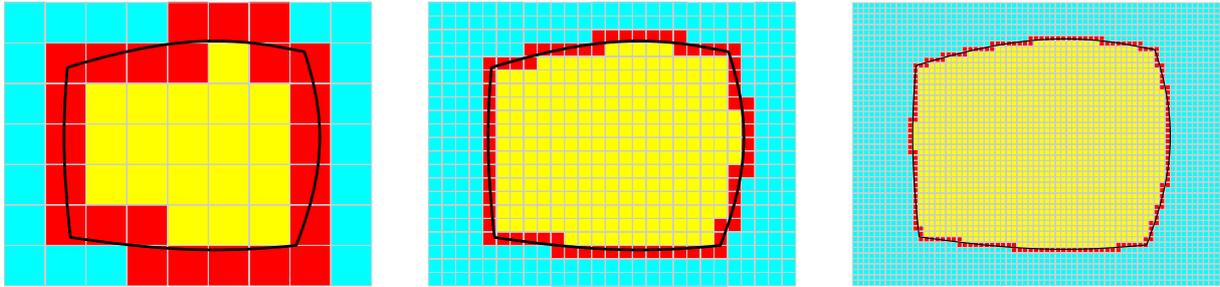
Weil  $\bar{\Omega}$  kompakt ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $\bar{\Omega}$ : für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass  $|x - y| < \delta$  impliziert  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir nehmen  $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{4}\varepsilon(4M)^{-n} > 0$  und es gibt ein  $\delta_{\tilde{\varepsilon}}$  wie oben. Anschließend teilen wir  $[-M, M]^n$  in  $m^n$  gleichgroße Blöcke für  $m$  genügend groß. Wir nehmen  $m$  so groß, dass

$$m \geq 4(8M)^n \|f\|_\infty \varepsilon^{-1} \text{ und } m \geq 2M\sqrt{n} \delta_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}.$$

Für die Obersumme beziehungsweise Untersumme setzen wir auf die Blöcke  $B_i$  mit  $\partial\Omega \cap B_i \neq \emptyset$  als obere Abschätzung  $\bar{f}_i = \|f\|_\infty$  und als untere Abschätzung  $\underline{f}_i = 0$ . Wenn ein Block  $B_i$  außerhalb  $\Omega$  liegt, setzen wir  $\bar{f}_i = \underline{f}_i = 0$ . Wenn  $B_i$  innerhalb  $\Omega$  liegt, setzen wir  $\bar{f}_i = f(y^i) + \tilde{\varepsilon}$  und  $\underline{f}_i = f(y^i) - \tilde{\varepsilon}$ , wobei  $y^i$  der Mittelpunkt von  $B_i$  ist.

Aus elementaren geometrischen Überlegungen folgt, weil  $\Omega$  konvex ist, dass es höchstens  $2^n m^{n-1}$  Blöcke gibt, die den Rand  $\partial\Omega$  überdecken.



Es folgt

$$\begin{aligned} O_f &= \sum_{B_i} \bar{f}_i \text{Vol}(B_i) = \sum_{B_i} \bar{f}_i \frac{4^n M^n}{m^n} = \\ &= \frac{4^n M^n}{m^n} \left( \sum_{B_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \|f\|_\infty + \sum_{B_i \subset \Omega} (f(y^i) + \tilde{\varepsilon}) \right) \leq \\ &\leq \frac{4^n M^n}{m^n} (2^n m^{n-1} \|f\|_\infty) + \frac{4^n M^n}{m^n} \sum_{B_i \subset \Omega} f(y^i) + \frac{4^n M^n}{m^n} m^n \tilde{\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{4^n M^n}{m^n} \left( \sum_{B_i \subset \Omega} f(y^i) \right) + \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

und ähnlich

$$U_f \geq \frac{4^n M^n}{m^n} \sum_{B_i \subset \Omega} (f(y^i) - \tilde{\varepsilon}) \geq \frac{4^n M^n}{m^n} \left( \sum_{B_i \subset \Omega} f(y^i) \right) - \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Wir haben eine Zerlegung gefunden mit

$$O_f - U_f < \varepsilon.$$

Weil wir das für jedes  $\varepsilon > 0$  ausführen können, ist  $f$  integrierbar auf  $\Omega$ . ■

Im letzten Satz haben wir die sehr einschränkende Bedingung gebraucht, dass das Gebiet konvex ist. Wenn man den Beweis genau betrachtet, dann sieht man, dass diese

Bedingung nur benutzt wird um zu zeigen, dass der Sprung von  $f$  auf 0 am Rande  $\partial\Omega$  überdeckt werden kann mit Blöcken, deren gesamtes Volumen man so klein bekommen kann wie man möchte. Anders gesagt, den Beitrag des Randes kann man vernachlässigen. Für konvexe Gebiete ist das leicht einzusehen. Es würde hier zu weit führen, eine weniger restriktive Bedingung zu formulieren. Zum Beispiel sind Gebiete erlaubt, die man bekommt durch Vereinigung endlich vieler konvexer Teilgebiete. Auch Gebiete, die sich mit einem Diffeomorphismus auf ein konvexes Gebiet abbilden lassen, sind erlaubt.

## 13.3 Berechnen von mehrdimensionalen Integralen

Wir haben jetzt zwar Integrale definiert, aber wie kann man sie, wenn überhaupt möglich, berechnen oder zumindestens so vereinfachen, dass sie geradeaus zu approximieren sind?

### 13.3.1 Integrale auf rechteckigen Gebieten

#### Theorem 13.11 (Satz von Fubini-Tonelli auf Rechtecken)

Sei  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_B f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$



Abbildung 13.4: Links Leonida Tonelli, und rechts Guido Fubini

**Bemerkung 13.11.1** *Übrigens kann man die Integrationsreihenfolge beliebig wählen und statt  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$  auch  $x_5, x_3, \dots, x_2$  nehmen, wenn bloß alle genau einmal vorkommen.*

**Bemerkung 13.11.2** *Dieser Satz, nach Fubini und Tonelli benannt, ist auch gültig in allgemeineren Fällen. Für  $f$  stetig und unser R-Integral ist der Beweis einfacher.*

**Beweis.** Es reicht, wenn wir für  $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  und  $I = [a_{n+1}, b_{n+1}]$  mit  $a_i < b_i$  zeigen können, dass gilt

$$\begin{aligned} \int_{B \times I} f(x, x_{n+1}) d(x, x_{n+1}) &= \int_B \left( \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1} \right) dx = \\ &= \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \left( \int_B f(x, x_{n+1}) dx \right) dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Wenn wir die erste Gleichung betrachten, kommen die folgenden Fragen auf. Weil  $f$  stetig ist, ist  $f$  integrierbar auf  $B \times I$ . Heißt das auch, dass  $x_{n+1} \mapsto f(x, x_{n+1})$  R-integrierbar ist auf  $I$ , und dass  $x \mapsto \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$  R-integrierbar ist auf  $B$ ? Und wenn das so ist, ergibt diese wiederholte Integration den gleichen Wert?

Antworten zu diesen Fragen geben die folgenden Überlegungen.

1. Wenn  $f$  stetig ist, ist  $x_{n+1} \mapsto f(x, x_{n+1})$  stetig und R-integrierbar.
2. Wenn  $f$  stetig ist auf einem kompakten Gebiet, dann ist  $f$  gleichmäßig stetig und das heißt, für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})| < \varepsilon.$$

Für  $|x - y| < \delta_{\varepsilon/(1+\text{Vol}(B))}$  gilt dann:

$$\begin{aligned} & \left| \int_B f(x, x_{n+1}) dx_{n+1} - \int_B f(y, x_{n+1}) dx_{n+1} \right| \leq \\ & \leq \int_B |f(x, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})| dx_{n+1} \leq \int_B \frac{\varepsilon}{1 + \text{Vol}(B)} dx_{n+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $x \mapsto \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$  stetig und dann auch R-integrierbar.

3. Wir definieren  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $g(x) = \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$ . Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass

$$\inf \{O_{f, B \times I}; \text{Obersummen für } f\} = \inf \{O_{g, B}; \text{Obersummen für } g\}.$$

Mit einer Obersumme für  $(x, x_{n+1}) \mapsto f(x, x_{n+1})$  lässt sich sofort eine Obersumme  $O_{x \mapsto f(x, x_{n+1})}(x_{n+1})$  für  $x \mapsto f(x, x_{n+1})$  bei jedem  $x_{n+1}$  konstruieren. Zählt man diese mit dem richtigen Gewicht versehen zusammen, dann bekommt man eine Obersumme für  $g$ . Das zeigt

$$\inf \{O_{f, B \times I}; \text{O.f. } f\} \geq \inf \{O_{g, B}; \text{O.f. } g\}.$$

Ebenso findet man

$$\sup \{U_{f, B \times I}; \text{U.f. } f\} \leq \sup \{U_{g, B}; \text{U.f. } g\}.$$

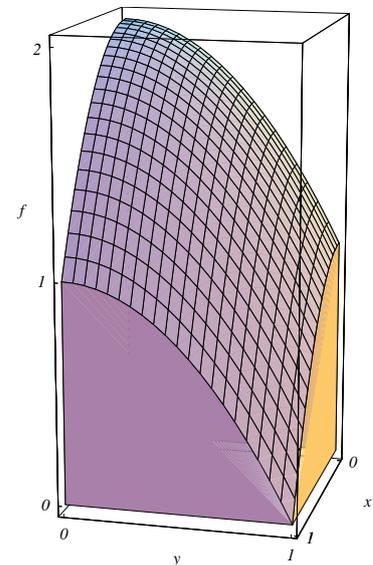
Weil  $\sup \{U_{f, B \times I}; \text{U.f. } f\} = \inf \{O_{f, B \times I}; \text{O.f. } f\}$  folgt das Resultat.

Der Beweis für die zweite Gleichung verläuft ähnlich. ■

**Beispiel 13.12** Gefragt ist  $\int_{[0,1]^2} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx$ .

Der Satz von Fubini-Tonelli besagt

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^2} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx = \\ & = \int_0^1 \left( \int_0^1 (2 - x_1^2 - x_2^2) dx_1 \right) dx_2 = \\ & = \int_0^1 \left( [2x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2^2 x_1]_{x_1=0}^{x_1=1} \right) dx_2 = \\ & = \int_0^1 \left( 2 - \frac{1}{3} - x_2^2 \right) dx_2 = \left[ \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \right]_{x_2=0}^{x_2=1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



### 13.3.2 Integrale auf allgemeineren Gebieten

Wie benutzt man den Satz von Fubini-Tonelli, wenn man kein rechteckiges Gebiet hat?

**Lemma 13.13** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und konvex. Setze

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{0\} \text{ und} \\ \Omega_m &= \{x \in \mathbb{R}^m; \exists y \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ mit } (x, y) \in \Omega\} \text{ für } m \in \{1, \dots, n-1\}\end{aligned}$$

Dann sind die  $\Omega_m$  konvex und es gibt stetige Funktionen  $\phi_m^+, \phi_m^- : \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass

$$\begin{aligned}\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad &\phi_{n-1}^-(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) < x_n < \phi_{n-1}^+(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}), \\ &\phi_{n-2}^-(x_1, \dots, x_{n-2}) < x_{n-1} < \phi_{n-2}^+(x_1, \dots, x_{n-2}), \\ &\vdots \\ &\phi_1^-(x_1) < x_2 < \phi_1^+(x_1), \\ &\phi_0^- < x_1 < \phi_0^+ \}.\end{aligned}$$

**Bemerkung 13.13.1** Selbstverständlich gibt es noch  $n!-1$  andere mögliche Anordnungen für  $x_1$  bis  $x_n$ . Jede Anordnung hat ihre eigenen  $\Omega_m$  und  $\phi_{n-1}^-, \phi_{n-1}^+$ .

**Beweis.** Wir bemerken nur, dass man mit Induktion rückwärts folgendes zeigen kann. Für  $\Omega_{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$  konvex, setzt man

$$\Omega_m := \{x \in \mathbb{R}^m; \text{es gibt } x_{m+1} \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, x_{m+1}) \in \Omega_{m+1}\}.$$

Dann ist  $\Omega_m$  konvex und es gibt Funktionen  $\phi_m^+, \phi_m^- : \Omega_m \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Omega_{m+1} = \{(x, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; x \in \Omega_m \text{ und } \phi_m^-(x) < x_{m+1} < \phi_m^+(x)\}.$$

Die Konvexität von  $\Omega_{m+1}$  liefert die Stetigkeit von  $\phi_m^+, \phi_m^-$ . Übrigens fängt man die vollständige Induktion an mit  $\Omega_n = \Omega$ , also  $m+1 = n$ , und endet bei  $\Omega_0 = \{0\}$ .

■

**Korollar 13.14 (Fubini-Tonelli für konvexe Gebiete)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und konvex und sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $\Omega_m, \phi_m^+$  und  $\phi_m^-$  wie in Lemma 13.13. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} f(x) dx = \\ &= \int_{\phi_0^-}^{\phi_0^+} \int_{\phi_1^-(x_1)}^{\phi_1^+(x_1)} \dots \int_{\phi_{n-2}^-(x_1, \dots, x_{n-2})}^{\phi_{n-2}^+(x_1, \dots, x_{n-2})} \int_{\phi_{n-1}^-(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\phi_{n-1}^+(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1.\end{aligned}\tag{13.1}$$

**Bemerkung 13.14.1** Für  $\Omega \subset B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  kann man dieses Ergebnis auch schreiben wie folgt:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} (\mathbf{1}_{\Omega} f)(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 \tag{13.2}$$

mit

$$(\mathbf{1}_{\Omega} f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega. \end{cases}$$

**Beweis.** Die Idee des Beweises ist wiederum, das Gebiet mit Blöcken zu approximieren und auf diesen Blöcken Fubini-Tonelli anzuwenden. Am Rande hat man möglicherweise schlechte Abschätzungen, aber indem man feiner approximiert wie im Beweis von Satz 13.10, wird dieses Problemgebiet immer dünner und dessen Beitrag in Ober- und Untersummen konvergiert nach 0. Man findet so (13.2). Mit Hilfe von Lemma 13.13 folgt (13.1). ■

**Beispiel 13.15** Gefragt ist  $\int_{\Omega} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx$  mit

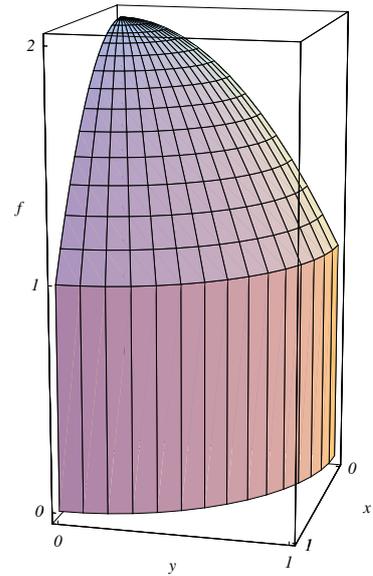
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ und } \|x\| < 1\}.$$

Man hat

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2); 0 < x_2 < \sqrt{1 - x_1^2}, 0 < x_1 < 1 \right\}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx &= \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx_2 dx_1 = \\ &= \int_0^1 \left[ 2x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 \right]_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 = \\ &= \int_0^1 \left( 2\sqrt{1-x_1^2} - x_1^2 \sqrt{1-x_1^2} - \frac{1}{3} (1-x_1^2)^{3/2} \right) dx_1 = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{5}{3} \sqrt{1-x_1^2} - \frac{2}{3} x_1^2 \sqrt{1-x_1^2} \right) dx_1 = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{5}{3} \cos t - \frac{2}{3} (\sin t)^2 \cos t \right) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{5}{3} (\cos t)^2 - \frac{1}{6} (\sin 2t)^2 \right) dt = \left( \frac{5}{3} - \frac{1}{6} \right) \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$



**Beispiel 13.16** Gefragt ist  $\int_{\Omega} e^{-x_1^2} dx$  mit  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_2 < x_1 < 1\}$ .

Dieses Gebiet  $\Omega$  wird dargestellt durch ein Dreieck mit den Eckpunkten  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  und  $(1,1)$ . Wenn wir das Integral aufspalten in ein Integral für  $x_1$  und anschließend eins für  $x_2$ , dann wird das

$$\int_{\Omega} e^{-x_1^2} dx = \int_{x_2=0}^1 \int_{x_1=x_2}^1 e^{-x_1^2} dx_1 dx_2.$$

Diese Berechnung ist leider so nicht weiterzuführen, weil uns eine Stammfunktion zu  $x_1 \mapsto e^{-x_1^2}$  fehlt.

Wir können aber die Anordnung von  $x_1, x_2$  umkehren.

In umgekehrter Folge finden wir:

$$\int_{\Omega} e^{-x_1^2} dx = \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{x_1} e^{-x_1^2} dx_2 dx_1 = \tag{13.3}$$

(bevor wir weiter machen, soll man bemerken, dass nicht nur die Folge sich ändert, sondern auch die Funktionen  $\phi_i^{\pm}$  in den Integrationsintervallen!)

$$(13.3) = \int_{x_1=0}^1 \left[ x_2 e^{-x_1^2} \right]_{x_2=0}^{x_2=x_1} dx_1 = \int_{x_1=0}^1 x_1 e^{-x_1^2} dx_1 = \left[ -\frac{1}{2} e^{-x_1^2} \right]_{x_1=0}^{x_1=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

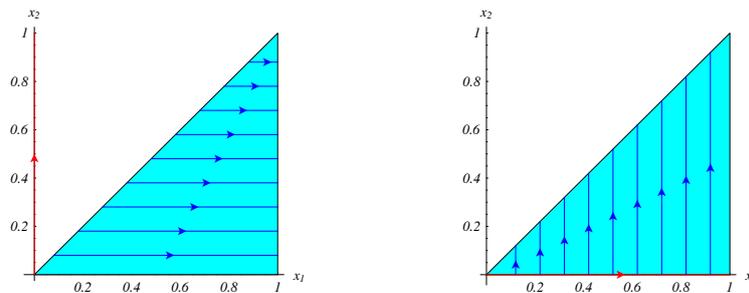


Abbildung 13.5: Darstellung zu den unterschiedlichen Folgen beim Berechnen vom Integral: links erst  $x_1 : x_2 \rightarrow 1$  und anschließend  $x_2 : 0 \rightarrow 1$ ; rechts erst  $x_2 : 0 \rightarrow x_1$  und dann  $x_1 : 0 \rightarrow 1$ .

### 13.3.3 Volumen in Scheiben

Wenn man die Definitionen vom Integral und vom Volumen genau anschaut, dann sieht man, dass wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Volumen hat, folgendes gilt:

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx.$$

Diese Bemerkung führt uns zum folgenden Satz:

**Theorem 13.17 (Das Prinzip von Cavalieri)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  darstellbar durch

$$\Omega = \{(x^*, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; x^* \in \Omega_t \text{ und } a \leq t \leq b\}.$$

Wenn für jedes  $t \in [a, b]$  das Volumen  $\text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Omega_t)$  existiert und  $t \mapsto \text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Omega_t)$  stetig ist, dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(\Omega) = \int_a^b \text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Omega_t) dt.$$

**Bemerkung 13.17.1** Dieses Prinzip von Cavalieri ist fast 400 Jahre älter als der Satz von Fubini!

**Beweis.** Man verwende Fubini-Tonelli für  $f = 1$ . ■

**Beispiel 13.18** Das Volumen der Einheitskugel  $K_3 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq 1\}$ :

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(K_3) &= \int_{-1}^1 \text{Vol}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1 - z^2\}) dz = \\ &= \int_{-1}^1 \pi(1 - z^2) dz = \pi \left[ z - \frac{1}{3}z^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Für das Volumen der Kugel  $K = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq r\}$  gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(K) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

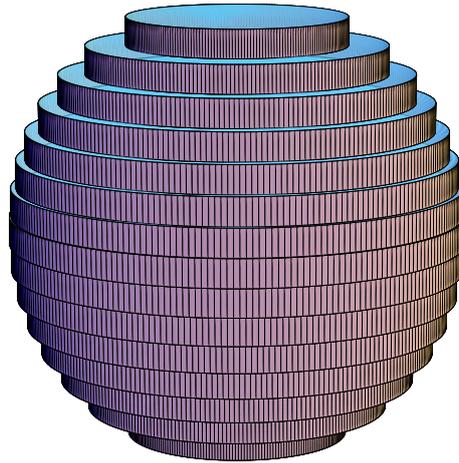


Abbildung 13.6: Cavalieri würde die Kugel in Scheiben schneiden und die Scheiben summieren um das Volumen zu berechnen.

**Beispiel 13.19** Das Volumen der Einheitskugel  $K_4 = \{x \in \mathbb{R}^4; \|x\| \leq 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}_{\mathbb{R}^4}(K_4) &= \int_{-1}^1 \text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1 - t^2\}) dt = \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{4}{3}\pi (1 - t^2)^{3/2} dt \stackrel{t=\sin s}{=} \\
 &= \frac{4}{3}\pi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\cos s)^3 \cos s ds = \\
 &= \frac{8}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} ((\cos s)^2 - (\cos s)^2 (\sin s)^2) ds = \\
 &= \frac{8}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} ((\cos s)^2 - \frac{1}{4}(\sin 2s)^2) ds = \\
 &= \frac{8}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi^2.
 \end{aligned}$$

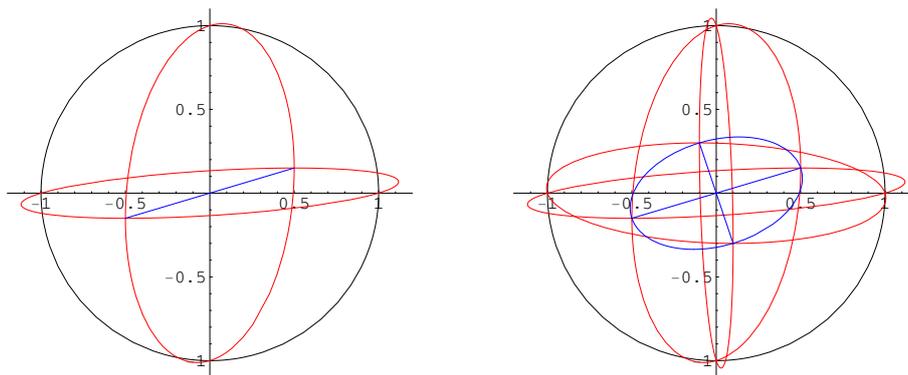


Abbildung 13.7: Projektionen von  $K_3$  und  $K_4$  in der Ebene.

## 13.4 Alternative Koordinatensysteme

Wir wollen hier nicht nur alternative Koordinatensysteme betrachten, sondern auch gleichzeitig Flächeninhalte und Volumeninhalte definieren, die diese neuen Koordinaten verwenden.

den. Wir haben kartesische Blöcke benutzt, jedoch sollten Flächeninhalte, die definiert werden durch Approximation mit anderen elementaren Gebieten, das gleiche Ergebnis liefern. Dann muss da etwas bewiesen werden.

### 13.4.1 Polarkoordinaten

**Definition 13.20** Sei  $P$  ein Punkt in der Ebene mit kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Wenn  $r \in \mathbb{R}_0^+$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  derart sind, dass

$$x_1 = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad x_2 = r \sin \varphi$$

dann nennt man  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten von  $P$ .

**Bemerkung 13.20.1** Manchmal nimmt man auch  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  oder sogar  $\mathbb{R}$ .

Diese Definition gibt eine Abbildung  $T : (r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ . Der Umkehrsatz sagt, dass  $T$  lokal eine Inverse hat, wenn

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Man hat

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

Dass man bei  $r = 0$  ein Problem hat, ist nichts Neues, denn weil  $T(0, \varphi) = (0, 0)$  für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$ , wußten wir schon, dass es da ein Problem gab. Weil jedoch beim Riemann-Integral von stetigen Funktionen ein Punkt kein Punkt ist, ...

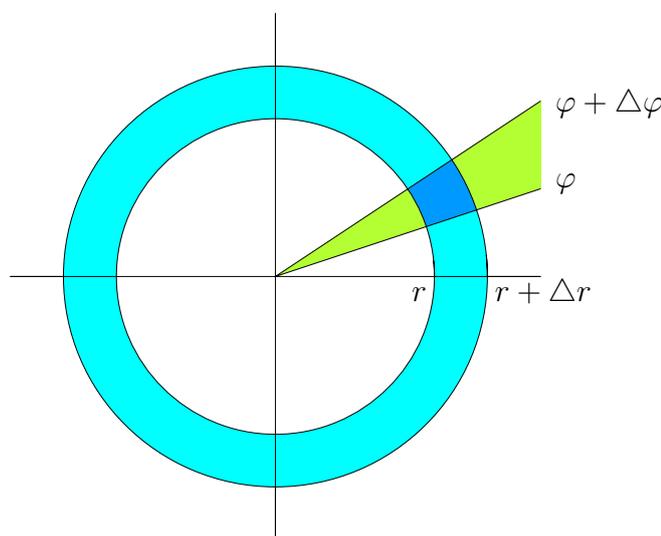


Abbildung 13.8: Polarkoordinaten und Flächenelement

**Lemma 13.21** Das Gebiet in Polarkoordinaten  $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$ , definiert durch

$$E = \{(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) ; r < \tilde{r} < r + \Delta r \text{ und } \varphi < \tilde{\varphi} < \varphi + \Delta \varphi\}, \quad (13.4)$$

mit  $\Delta r > 0$  und  $\Delta \varphi > 0$ , hat den Flächeninhalt

$$\text{Vol}(E) = \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) \Delta r \Delta \varphi. \quad (13.5)$$

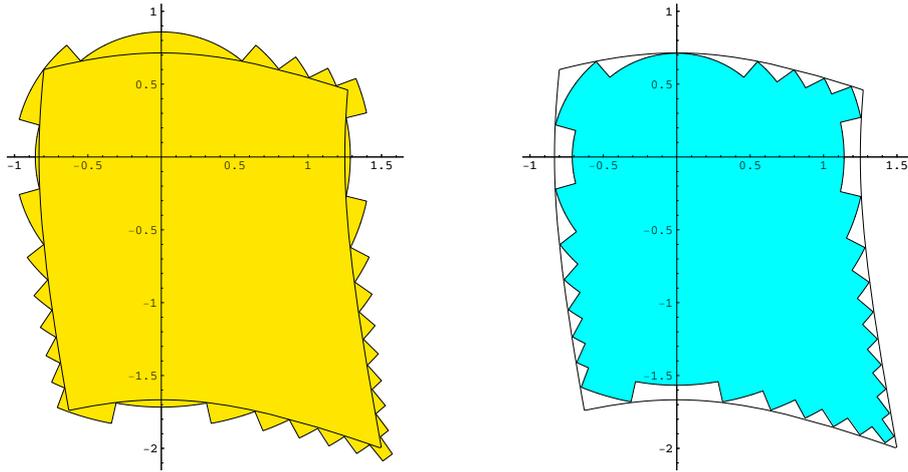


Abbildung 13.9: Ein Gebiet von außen und innen approximiert mit 'polarischen Rechtecken'

**Beweis.** Wenn wir davon ausgehen, dass eine Kreisscheibe mit Radius  $r$  als Flächeninhalt  $\pi r^2$  und als Umfang  $2\pi r$  hat, dann gilt

$$\text{Vol}(E) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} (\pi(r + \Delta)^2 - \pi r^2)$$

und das liefert unsere Behauptung. Der Flächeninhalt vom Ring zwischen beiden Kreisen ist  $\pi(r + \Delta)^2 - \pi r^2$  und  $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$  ist der Teil vom ganzen Ring, der betrachtet wird. ■

In Polarkoordinaten bekommt man Ober- und Untersummen in der Form

$$\sum_{\substack{B_{ij} \text{ 'polarische'} \\ \text{Rechtecken}}} f_{ij} \left(r_i + \frac{1}{2}\Delta r_i\right) \Delta r_i \Delta\varphi_j.$$

Verfeinerung, also  $\Delta r_i \rightarrow 0$  und  $\Delta\varphi_j \rightarrow 0$ , wird führen zu

$$\int_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

Hier vertreten  $\Omega$  und  $\tilde{\Omega}$  das gleiche Gebiet, nämlich einmal beschrieben in kartesischen und einmal in Polarkoordinaten. Wir werden dies noch genauer betrachten.

### 13.4.2 Zylinderkoordinaten

**Definition 13.22** Sei  $P$  ein Punkt im Raum mit kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Wenn  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $z \in \mathbb{R}$  derart sind, dass

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad x_3 = z,$$

dann nennt man  $(r, \varphi, z)$  die Zylinderkoordinaten von  $P$ .

**Lemma 13.23** Das Gebiet in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  beschrieben durch

$$E = \{(\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}); r < \tilde{r} < r + \Delta r, \quad \varphi < \tilde{\varphi} < \varphi + \Delta\varphi \text{ und } z < \tilde{z} < z + \Delta z\}, \quad (13.6)$$

hat den Volumeninhalt

$$\text{Vol}(E) = (r + \frac{1}{2}\Delta r) \Delta r \Delta\varphi \Delta z. \quad (13.7)$$

**Beweis.** Wenn man (13.4) mit endlich vielen Blöcken  $B_i$  von innen und von außen approximieren kann, dann kann man (13.6) mit  $B_i \times [r, r + \Delta r]$  approximieren. ■

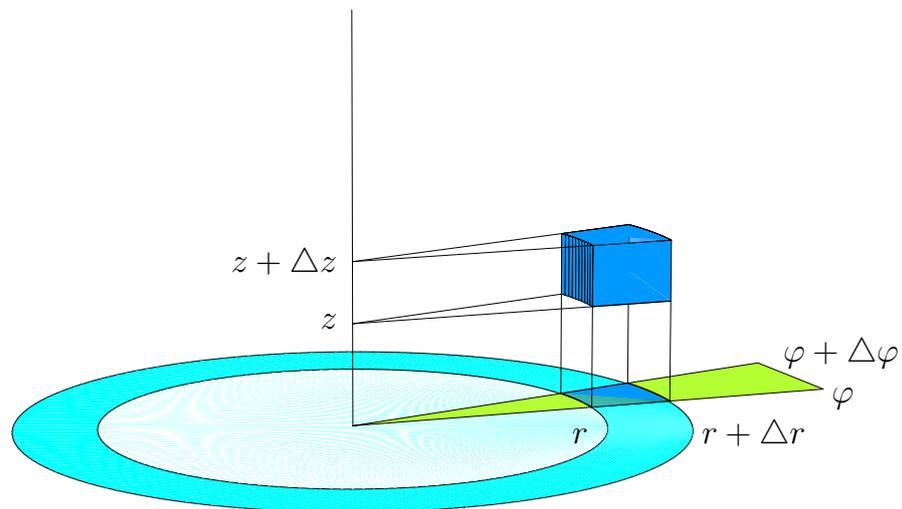


Abbildung 13.10: Zylinderkoordinaten und Volumenelement

### 13.4.3 Kugelkoordinaten

**Definition 13.24** Sei  $P$  ein Punkt im Raum mit kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Wenn  $r \in \mathbb{R}_0^+$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\theta \in [0, \pi]$  derart sind, dass

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta \quad \text{und} \quad x_3 = r \cos \theta,$$

dann nennt man  $(r, \varphi, \theta)$  die Kugelkoordinaten von  $P$ .

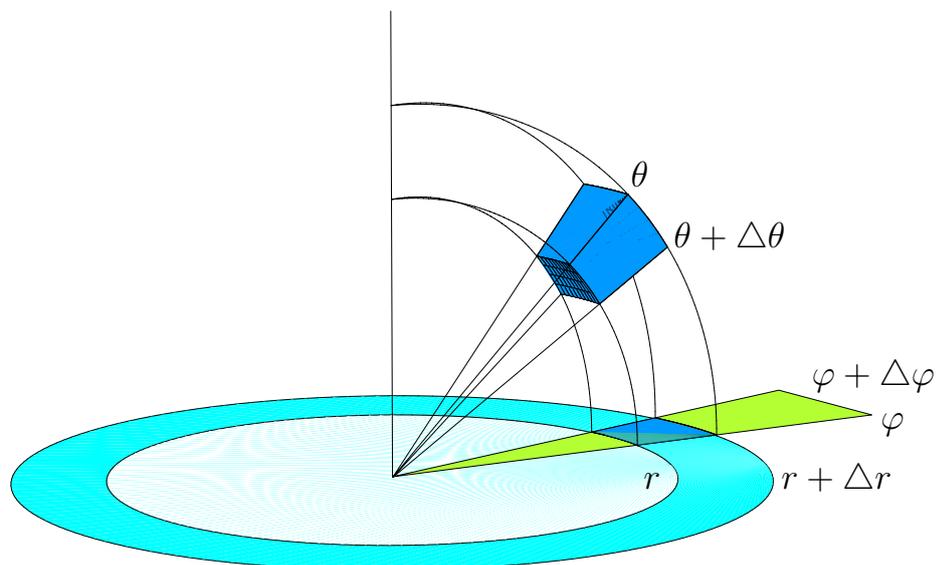


Abbildung 13.11: Kugelkoordinaten und Volumenelement

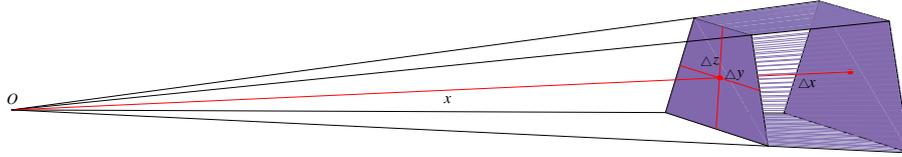
**Lemma 13.25** Das Gebiet in Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ , beschrieben durch

$$E = \left\{ (\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) ; r < \tilde{r} < r + \Delta r, \quad \varphi < \tilde{\varphi} < \varphi + \Delta \varphi \quad \text{und} \quad \theta < \tilde{\theta} < \theta + \Delta \theta \right\}, \quad (13.8)$$

hat den Volumeninhalt

$$\text{Vol}(E) = \left( r^2 + r\Delta r + \frac{1}{3}(\Delta r)^2 \right) \Delta r \Delta \varphi (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta)). \quad (13.9)$$

**Beweis.** Man kann dieses Lemma mit elementaren Mitteln beweisen. Der erste Schritt ist, dass man die folgende Figur in Blöcke, halbe Blöcke und sechstel Blöcke zerschneiden kann.



Man kann so die Definition des Volumens elementarer Blöcke verwenden und findet in endlich vielen Schritten, dass für dieses Gebiet  $\tilde{E}$  mit 'flachen Wänden' gilt

$$\text{Vol}(\tilde{E}) = \left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (13.10)$$

Die Variablen  $x$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  sind die Längen der mit rot dargestellten Geraden. Wenn man Abbildung 13.11 vergleicht mit  $\tilde{E}$ , dann hofft man, wie folgt zu approximieren:

$$x = r, \quad \Delta x = \Delta r, \quad \Delta y = r \Delta \varphi \sin \theta \quad \text{und} \quad \Delta z = r \Delta \theta. \quad (13.11)$$

Diese Approximation passt aber nur, wenn  $\Delta \varphi, \Delta \theta \downarrow 0$ . Dann hätte man

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &\approx \left(1 + \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right) \Delta r r \Delta \varphi \sin \theta r \Delta \theta = \\ &= \left(r^2 + r \Delta r + \frac{1}{3} (\Delta r)^2\right) \Delta r \Delta \varphi \sin \theta \Delta \theta. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Im zweiten Schritt teilen wir  $\Delta \varphi, \Delta \theta$  beide in  $m$  und  $\ell$  gleichgroße Stücke:  $\Delta_\ell \varphi = \frac{1}{\ell} \Delta \varphi$  und  $\Delta_m \theta = \frac{1}{m} \Delta \theta$ . Setzen wir  $g(r, \Delta r) = \left(r^2 + r \Delta r + \frac{1}{3} (\Delta r)^2\right) \Delta r$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  können wir das elementare Gebiet in Abbildung 13.11 mit  $\ell \times m$  Figuren derart von innen und von außen approximieren, dass

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &\leq g(r - \varepsilon, \Delta r + \varepsilon) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_\ell \varphi \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta, \\ \text{Vol}(E) &\geq g(r + \varepsilon, \Delta r - \varepsilon) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_\ell \varphi \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta. \end{aligned}$$

Man hat

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_\ell \varphi \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta = \Delta \varphi \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta.$$

Wir lassen  $m \rightarrow \infty$  gehen und finden, wie wir eindimensionale Integrale definiert haben, dass gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta = \int_{\theta}^{\theta + \Delta \theta} \sin s \, ds = \cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta).$$

Fassen wir zusammen. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &\leq g(r - \varepsilon, \Delta r + \varepsilon) (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta)) \Delta \theta \Delta \varphi, \\ \text{Vol}(E) &\geq g(r + \varepsilon, \Delta r - \varepsilon) (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta)) \Delta \theta \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu bemerken, dass  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(r - \varepsilon, \Delta r + \varepsilon) = g(r, \Delta r)$ . ■

Weil

$$\lim_{(\Delta r, \Delta \varphi, \Delta \theta) \rightarrow 0} \frac{(r^2 + r\Delta r + \frac{1}{3}(\Delta r)^2) \Delta r \Delta \varphi (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta))}{\Delta r \Delta \varphi \Delta \theta} = r^2 \sin \theta$$

gilt, werden Approximationen durch Ober- und Untersummen mit Kugelelementen zu der folgenden Identität führen:

$$\int_{\Omega} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) = \int_{\tilde{\Omega}} f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta). \quad (13.13)$$

Hier vertreten  $\Omega$  und  $\tilde{\Omega}$  das gleiche Gebiet, einmal beschrieben in kartesischen und einmal in Kugelkoordinaten.



# Analysis 2, Woche 14

## Integrale in mehreren Dimensionen II



### 14.1 Volumenabschätzungen

Wir haben drei verschiedene Möglichkeiten gesehen, wie man mit alternativen Koordinatensystemen alternative Möglichkeiten für eine Integraldefinition bekommt. Mit viel Mühe ist gezeigt worden, dass die Ergebnisse nicht abhängig sind (jedenfalls für Integrale von netten Funktionen auf netten Gebieten). Bevor wir einen allgemeinen Transformationssatz beweisen können, sind einige Probleme zu bewältigen.

Das erste Problem, das sich meldet ist, dass die Transformation von einem konvexen Gebiet nicht länger konvex sein muss. Das heißt, zunächst ist nicht klar, ob man noch von Volumen reden kann. Nur bei konvexen Gebieten haben wir gesehen, dass die Blöcke, die für den Rand verwendet werden, zusammen ein Volumen haben, dass man willkürlich klein machen kann indem man es verfeinert.

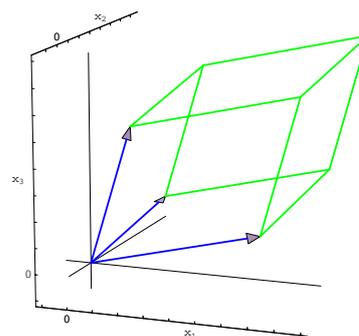
Eine der Komponenten des Beweises ist folgendes Lemma, das man aus der linearen Algebra kennen sollte.

**Lemma 14.1** Seien  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}^n$  und definiere das Parallelepiped

$$P = \{\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2 + \dots + \theta_n\varphi_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\}.$$

Dann gilt

$$\text{Vol}(P) = |\det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)|.$$



**Beweis.** Für zwei Dimensionen verweisen wir auf Lemma 1.16. In höheren Dimensionen kann man sich auf ähnliche Art überzeugen, dass

$$P = \{\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2 + \theta_3\varphi_3 + \dots + \theta_n\varphi_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

und

$$\tilde{P} = \{\theta_1\varphi_1 + \theta_2(\varphi_2 - c\varphi_1) + \theta_3\varphi_3 + \dots + \theta_n\varphi_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

das gleiche Volumen haben. In endlich vielen Schritten kann man so  $P$  zurückführen auf einen Block  $B$  mit gleichem Volumen:

$$B = \{\theta_1c_1e_1 + \theta_2c_2e_2 + \dots + \theta_nc_n e_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\},$$

wo  $\{e_i\}_{i=1}^n$  die Standardbasis auf  $\mathbb{R}^n$  ist. Parallel dazu verwendet man die Eigenschaften der Determinanten wie

$$\begin{aligned}\det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) &= \det(\varphi_1, \varphi_2 - c\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_n), \\ \det(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n) &= -\det(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n),\end{aligned}$$

um zu finden, dass

$$\text{Vol}(P) = \text{Vol}(\tilde{P}) \quad \text{und} \quad |\det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)| = |\det(\varphi_1, \varphi_2 - c\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_n)|.$$

Nach endlich vielen Schritten findet man

$$\begin{aligned}\text{Vol}(P) &= \dots = \text{Vol}(B) = \prod_{i=1}^n |c_i| \\ &\quad \parallel \\ |\det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)| &= \dots = |\det(c_1 e_1, \dots, c_n e_n)|\end{aligned}$$

und so das Ergebnis. ■

**Korollar 14.2** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet,  $A \in M^{n \times n}$  mit  $\det(A) \neq 0$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Definiere  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $T(x) = Ax + b$ .

Sei  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wenn einer der beiden folgenden Integrale existiert, dann existieren beide und es gilt

$$\int_D f(x) dx = |\det(A)| \int_{T^{\text{inv}}(D)} f(Ty) dy. \quad (14.1)$$

**Beweis.** Benennen wir die Spalten von  $A$  durch  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ :

$$A = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

und verwenden wir für das rechte Integral Parallelepipeden als Volumenelemente, dann sind wegen Lemma 14.1 beide Seiten von (14.1) identisch. Das heißt, zu jeder Obersumme mit Blöcken links finden wir eine Obersumme mit Parallelepipeden für die rechte Seite. Ähnliches gilt für Untersummen. Es bleibt übrig, Obersummen mit Parallelepipeden durch Obersummen mit Rechtecken abzuschätzen. ■

**Lemma 14.3 (Sard's Lemma)** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein Block und  $g: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\text{Vol}_a(g(B)) \leq \int_B |\det(\nabla g(x))| dx.$$

**Beweis.** Wir nehmen an, dass  $\text{Vol}_a(g(B)) > \int_B |\det(\nabla g(x))| dx$  und setzen

$$\varepsilon = \frac{\text{Vol}_a(g(B)) - \int_B |\det(\nabla g(x))| dx}{\text{Vol}(B)}.$$

Wir werden einen Widerspruch erzielen, indem wir wiederholt  $B$  in  $2^n$  kongruente Teilblöcke verteilen.

**Erster Schritt** Es gibt eine Folge von Blöcken  $\{B_k\}_{k=0}^\infty$  mit  $B = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$  und  $\text{Vol}(B_k) = 2^{-nk} \text{Vol}(B_0)$  und

$$\frac{\text{Vol}_a(g(B_k)) - \int_{B_k} |\det(\nabla g(x))| dx}{\text{Vol}(B_k)} \geq \varepsilon. \quad (14.2)$$

Angenommen (14.2) gilt für  $k$  (für  $k = 0$  haben wir es angenommen). In der Menge der  $2^n$  Teilblöcke von  $B_k$  gibt es mindestens einen  $B_T$  derart, dass

$$\frac{\text{Vol}_a(g(B_T)) - \int_{B_T} |\det(\nabla g(x))| dx}{\text{Vol}(B_T)} \geq \varepsilon, \quad (14.3)$$

denn wenn nicht, dann würde aus

$$\text{Vol}_a(g(B_k)) \leq \sum_{2^n \text{ Teilblöcke}} \text{Vol}_a(g(\text{Teilblock}_i))$$

und

$$\int_B |\det(\nabla g(x))| dx = \sum_{2^n \text{ Teilblöcke}} \int_{\text{Teilblock}_i} |\det(\nabla g(x))| dx$$

folgen, dass  $\#(14.2) < \varepsilon$  gelten würde, ein Widerspruch.

**Zweiter Schritt** Es gibt ein  $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k$  und  $k_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  derart, dass für  $k \geq k_{1,\varepsilon}$  gilt

$$\int_{B_k} |\det(\nabla g(x))| dx \leq \int_{B_k} |\det(\nabla g(x^*))| dx + \frac{1}{3}\varepsilon \text{Vol}(B_k). \quad (14.4)$$

Wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}^n$  gibt es  $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k$ . Weil  $g$  stetig differenzierbar ist, gibt es  $k_{1,\varepsilon}$  derart, dass

$$|\det(\nabla g(x)) - \det(\nabla g(x^*))| \leq \frac{1}{3}\varepsilon,$$

und (14.4) folgt.

**Dritter Schritt** Es gibt  $k_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$\frac{\text{Vol}_a(g(B_k))}{\text{Vol}(B_k)} - |\det(\nabla g(x^*))| \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar. Es folgt für  $x \in \bar{B}_k$ , dass

$$g(x) = g(x^*) + \nabla g(x^*)(x - x^*) + R(x, x^*)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\|R(x^*, x)\|}{\|x - x^*\|} = 0. \quad (14.5)$$

Das heißt, für jedes  $\delta > 0$  gibt es  $k_{2,\delta}$  derart, dass  $\|R(x^*, x)\| \leq 2^{-k}\delta$  für alle  $x \in \bar{B}_k$ . Sei  $\bar{B}_k = [a_1^k, b_1^k] \times \cdots \times [a_n^k, b_n^k]$ . Weil auch gilt

$$g(a^k) = g(x^*) + \nabla g(x^*)(a^k - x^*) + R(a^k, x^*),$$

findet man für  $x \in \bar{B}_k$ , dass

$$g(x) = g(a^k) + \nabla g(x^*)(x - a^k) + R(x, x^*) - R(a^k, x^*).$$

Wir setzen

$$S = 2^k \nabla g(x^*)(\bar{B}_k - a^k) = \nabla g(x^*)(\bar{B}_0 - a^0)$$

und es folgt für  $F(\bar{B}_k)$  mit  $F(x) = 2^k (g(x) - g(a^k))$  gilt, dass

$$F(\bar{B}_k) \subset S + B_{c\delta}(0) \text{ für } k > k_\delta$$

mit  $c = 2\text{diam}(\bar{B}_0)$ . Wir können  $\delta$  so klein wählen, dass

$$\text{Vol}(S + B_{c\delta}(0)) \leq \text{Vol}(S) + \frac{\text{Vol}(B_0)}{3}\varepsilon$$

und wir finden, dass

$$\frac{\text{Vol}_a(f(B_k))}{\text{Vol}(B_k)} = \frac{\text{Vol}_a(F(B_k))}{\text{Vol}(B_0)} \leq \frac{\text{Vol}(S)}{\text{Vol}(B_0)} + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Wegen Korollar 14.2 gilt

$$\text{vol}(S) = \int_{B_0} |\det(\nabla g(x^*))| dx = \text{Vol}(B_0) |\det(\nabla g(x^*))|.$$

Für den letzten Schritt soll man bemerken, dass die Kombination von den Teilergebnissen einen Widerspruch geben für  $k > \max(k_{1,\varepsilon}, k_{2,\varepsilon})$ . ■

**Korollar 14.4** Sei  $B$  ein Block in  $\mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $G: \bar{B} \rightarrow K$  stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inverse. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}_a(K) &\leq \max_{x \in \bar{B}} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B), \\ \text{Vol}_{in}(K) &\geq \min_{x \in \bar{B}} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B). \end{aligned}$$

**Beweis.** Aus Sard's Lemma folgt

$$\text{Vol}_a(K) \leq \int_B |\det(\nabla G(x))| dx \leq \max_{x \in \bar{B}} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B).$$

Weil  $G$  ein Diffeomorphismus ist, existiert  $F = G^{-1}$  und  $\nabla F(x) = (\nabla G \circ F(x))^{-1}$ . Für jeden Block  $B^* \subset K$  gilt ebenso

$$\begin{aligned} \text{Vol}_a(F(B^*)) &\leq \max_{x \in \bar{B}^*} |\det(\nabla F(x))| \text{Vol}(B^*) = \\ &= \max_{x \in \bar{B}^*} (|\det(\nabla G \circ F(x))|^{-1}) \text{Vol}(B^*) = \\ &= \left( \min_{x \in \bar{B}^*} |\det(\nabla G \circ F(x))| \right)^{-1} \text{Vol}(B^*). \end{aligned} \quad (14.6)$$

Wir haben verwendet, dass für invertierbare Matrizes gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Aus (14.6) folgt

$$\text{Vol}(B^*) \geq \min_{x \in K} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}_a(F(B^*))$$

und approximiert man  $K$  von innen mit disjunkten Blöcken, folgt

$$\text{Vol}_{in}(K) \geq \min_{x \in K} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B).$$

■

## 14.2 Transformationssatz

**Theorem 14.5 (Transformationssatz)** Seien  $D, \Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkte Gebiete, die beide ein Volumen haben. Sei  $G : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  stetig differenzierbar und mit stetig differenzierbarer Inverse und sei  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_D f(x) dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(y) \left| \det \left( \nabla G(y) \right) \right| dy.$$

**Bemerkung 14.5.1** Den Extrafaktor  $\left| \det \left( \nabla G(y) \right) \right|$  nennt man **Jacobi-Determinante**. Die Matrix  $\nabla G(y)$  heißt **Jacobi-Matrix**.

**Bemerkung 14.5.2** Dieser Satz ist gültig unter schwächeren Bedingungen. Wir verlangen zum Beispiel, dass  $G$  ein Diffeomorphismus ist. Für eine Transformation mit Polar oder Kugelkoordinaten ist das bei 0 zuviel verlangt. Man kann zeigen, dass einzelne singuläre Stellen am Rande des Gebietes keine Probleme verursachen.

**Bemerkung 14.5.3** Sei  $g : I = [a, b] \rightarrow J$  ein Diffeomorphismus. In einer Dimension haben wir die Substitutionsregel:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ g)(y) g'(y) dy.$$

Aus Satz 14.5 folgt, dass

$$\int_J f(x) dx = \int_I (f \circ g)(y) |g'(y)| dy.$$

Wieso gibt dieser zusätzliche Betrag keinen Widerspruch?

**Beweis.** Sei  $F = G^{inv}$  und setze

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in \bar{D}} |f(x)|, \quad M_{\Omega} = \text{Vol}(\Omega) + 1, \quad M_D = \text{Vol}(D) + 1,$$

$$M_G = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\det(\nabla G(y))| \quad \text{und} \quad M_F = \max_{x \in \bar{D}} |\det(\nabla F(y))|.$$

Wir nehmen an, dass  $f \geq 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $\{B_i\}_{i=1}^{\ell}$  eine innere und  $\{B_i^*\}_{i=1}^m$  eine derartige äußere Familie von Blöcken zu  $\Omega$ , dass

$$\text{Vol} \left( \bigcup_{i=1}^{\ell} B_i^* \right) - \text{Vol} \left( \bigcup_{i=1}^{\ell} B_i \right) < \frac{1}{4\|f\|_{\infty} M_G} \varepsilon.$$

Wir können diese Blöcke in gemeinsame kleinere Teilblöcke  $\{A_i\}_{i=1}^{m_a}$  derartig zerlegen, dass die ersten  $\ell_a$  die innere Familie bildet und so, dass

$$\max_{y \in \bar{A}} |\det(\nabla G(y))| - \min_{y \in \bar{A}} |\det(\nabla G(y))| < \frac{1}{4\text{Vol}(\Omega)\|f\|_{\infty} + 1} \varepsilon,$$

$$\max_{x \in F(\bar{A})} |f(x)| - \min_{x \in F(\bar{A})} |f(x)| < \frac{1}{4\text{Vol}(\Omega)M_G + 1} \varepsilon,$$

für jeden Teilblock  $A$ . Es folgt mit Korollar 14.4, dass

$$\begin{aligned} \int_D f(x) dx &\leq \sum_{i=1}^{m_a} \left( \max_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \int_{F(A_i)} dx = \\ &= \sum_{i=1}^{m_a} \left( \max_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \text{Vol}(F(A_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_a} \left( \max_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \max_{A_i} |\det(\nabla G)| \text{Vol}(A_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell_a} \left( \min_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \min_{A_i} |\det(\nabla G)| \text{Vol}(A_i) + \varepsilon \leq \\ &\leq \int_{\Omega} (f \circ G)(y) \left| \det(\nabla G(y)) \right| dy + \varepsilon. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Art können wir zeigen, dass

$$\int_D f(x) dx \geq \int_{\Omega} (f \circ G)(y) \left| \det(\nabla G(y)) \right| dy - \varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt das Ergebnis. ■

#### Beispiel 14.6 Welches Volumen hat

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq xy \leq 4 \text{ und } x \leq 2y \leq 4x\}.$$

Die Transformation, die  $D$  überführt in etwas nettes, ist

$$F : D \rightarrow [1, 4] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ mit } F(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right).$$

Setzen wir  $u = xy$  und  $v = y/x$ , dann löst man durch  $uv = y^2$  und  $u/v = x^2$ . Weil  $x, y > 0$  folgt für  $G = F^{inv}$ , dass

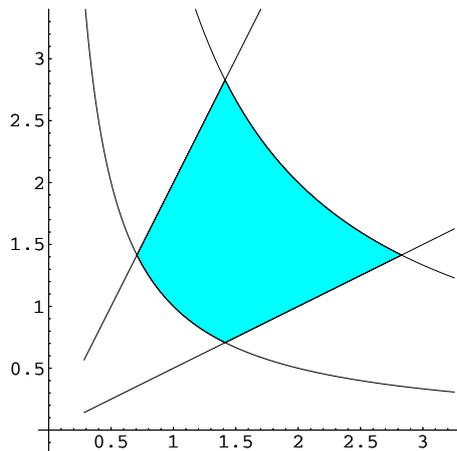
$$G(u, v) = \left(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}\right).$$

Dann findet man

$$\det \nabla G(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}v^{-1},$$

und

$$\text{Vol}(D) = \int_D 1 \, d(x, y) = \int_{F(D)} \frac{1}{2}v^{-1} \, d(u, v) = \int_{u=1}^4 \int_{v=\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2}v^{-1} \, dv \, du = \ln 8.$$



Übrigens hätte man sich einige Arbeit sparen können, wenn man bemerkt, dass

$$\begin{aligned} \det \nabla G(u, v) &= (\det \nabla F(x, y))_{(x,y)=G(u,v)}^{-1} = \left( \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}_{(x,y)=G(u,v)} \right)^{-1} = \\ &= \left( \left( \frac{2y}{x} \right)_{(x,y)=G(u,v)} \right)^{-1} = (2v)^{-1} = \frac{1}{2v}. \end{aligned}$$

**Beispiel 14.7** Wie schon gesagt, so wie er formuliert ist, kann man Satz 14.5 formell nicht verwenden für Polarkoordinaten, es sei denn man bleibt weg von  $(-\infty, 0] \times \{0\}$ . Definiere  $G : (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$  durch

$$G(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dann gilt

$$\det(\nabla G(r, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

Das heißt für  $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$ , dass

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_{G^{-1}(D)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

Diesen Faktor hatten wir schon gefunden in (13.5).

**Beispiel 14.8** Für Kugelkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta \quad \text{und} \quad x_3 = r \cos \theta,$$

betrachte man die Abbildung

$$G(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

und findet

$$\begin{aligned} \det(\nabla G(r, \varphi, \theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= r^2 \sin \theta \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{pmatrix} = -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Den Faktor  $|\det(\nabla G(r, \varphi, \theta))| = r^2 \sin \theta$  haben wir auch schon in (13.13) gesehen. Man bemerke übrigens, dass für Kugelkoordinaten  $\theta \in [0, \pi]$  liegt und  $\sin \theta \geq 0$  für diese  $\theta$  gilt.

**Beispiel 14.9** Das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$  in  $\mathbb{R}^3$  wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \int_{x \in B_R(0)} 1 dx &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \\ &= \left( \int_{r=0}^R r^2 dr \right) \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \\ &= \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^R \left[ -\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi} \left[ \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

**Korollar 14.10** Sei  $\Omega$  das Gebiet in kartesischen Koordinaten und sei  $\tilde{\Omega}$  das gleiche Gebiet in den alternativen Koordinaten.

- Für Polarkoordinaten  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  hat man

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, d(r, \varphi).$$

- Für Zylinderkoordinaten  $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$  hat man

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, r \, d(r, \varphi, z).$$

- Für Kugelkoordinaten  $(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$  hat man

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \, r^2 \sin \theta \, d(r, \varphi, \theta).$$

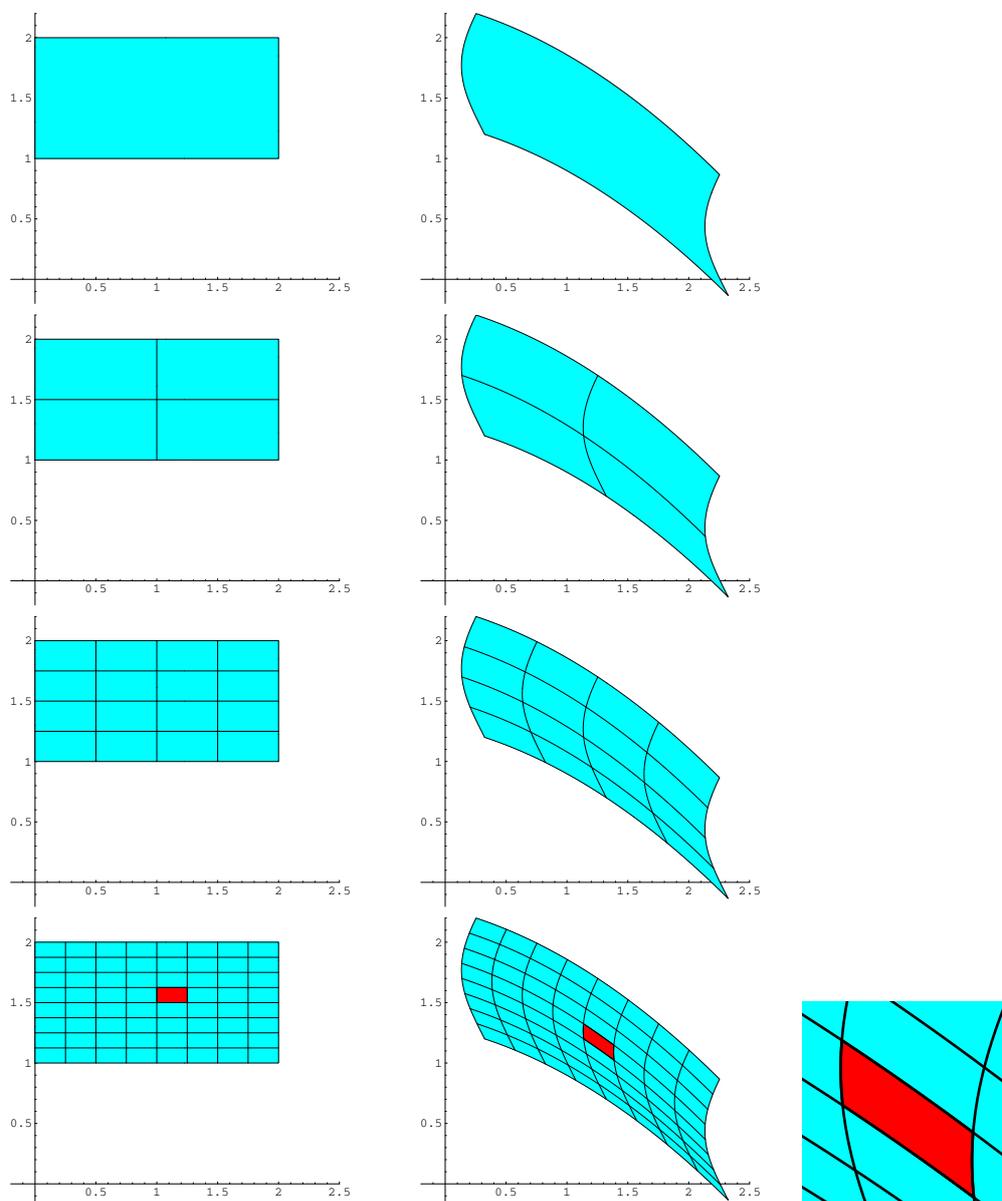


Abbildung 14.1: Im Beweis von Sard's Lemma wird Block  $B$  so lange verteilt in Teilblöcke bis diese Teilblöcke so klein sind, dass man sie mit Parallelepipede vergleichen kann, und zwar so, dass die summierte Differenz genügend klein wird.



# Literaturverzeichnis

- [1] Amann, Herbert; Escher, Joachim. Analysis 1, 2. Birkhäuser.
- [2] Bröcker, Theodor. Analysis 2. Bibliographisches Institut.
- [3] Forster, Otto. Analysis 2 Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg Studium.
- [4] Königsberger, Konrad. Analysis 2. Springer-Lehrbuch.
- [5] Spivak, Michael. Calculus. Publish or Perish Inc/Cambridge University Press.
- [6] Walter, Wolfgang. Analysis 2. Springer-Lehrbuch.