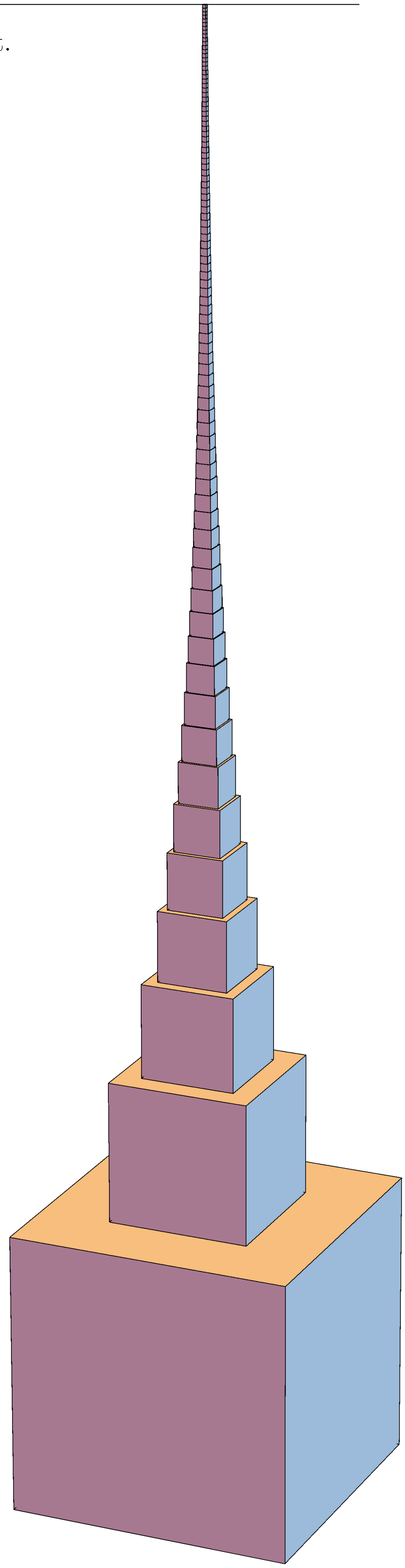
Name:	Aufgabe 1	

Wir stapeln Würfel mit Seitenlänge $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, wie rechts dargestellt.
Geben Sie die richtige Antwort und begründen Sie diese:

(a) Der Turm ist **endlich/unendlich** hoch.

(b) Das Volumen des Turms ist **endlich/unendlich.**

(c) Die Oberfläche des Turms ist **endlich/unendlich** groß.



Name: Aufgabe 2

(a) Ist die Menge aller offenen und abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^2$ eine σ-Algebra für $\mathbb{R}^2$?

(b) Ist die Menge aller abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^2$ eine Topologie für $\mathbb{R}^2$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Name:	Aufgabe 3	

(a) Wann heißt eine Differentialform geschlossen?

(b) Wann heißt eine Differentialform exakt?

Setze $\omega = x\ y\ dx \wedge dy + (x + y + z)\, dx \wedge dz + x\ dy \wedge dz$ auf $\mathbb{R}^3$.

(c) Ist ω geschlossen?

(d) Ist ω exakt?

NAME: | AUFGABE 4 |

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^2}dx$. *Theoreme, die man benutzt, sollen benannt werden.*

Name:	Aufgabe 5	

Seien $f_n \in \mathcal{L}^1([0,1])$ für $n \in \mathbb{N}$.

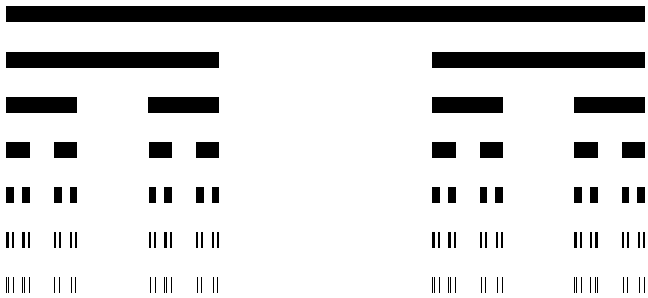
Richtig oder falsch?

(a) Wenn $f_n \to 0$ gleichmäßig, dann gilt $f_n \to 0$ in $\mathcal{L}^1([0,1])$.

(b) Wenn $f_n \to 0$ nach dem Maß λ, dann gilt $f_n \to 0$ in $\mathcal{L}^1([0,1])$.

Geben Sie jeweils einen Beweis, oder ein Gegenbeispiel an.

NAME: AUFGABE 6



Die Cantor-Menge $\mathbf{C}$ wird definiert durch

$$\mathbf{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n} \right)$$

und kann schrittweise so konstruiert werden, wie es im Bild dargestellt wird.

(a) Ist $\mathbf{C}$ abzählbar? (ohne Begründung)

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbf{C}$ Lebesgue-messbar ist.

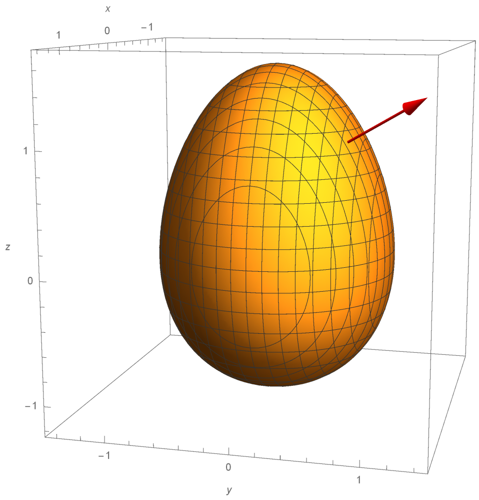
(c) Berechnen Sie $\lambda(\mathbf{C})$.

NAME: AUFGABE 7

Wir betrachten die Eierschale

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x^2 + y^2 + \left(\frac{6z}{8+z} \right)^2 = 1 \right\}$$

und nehmen $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \in S$.

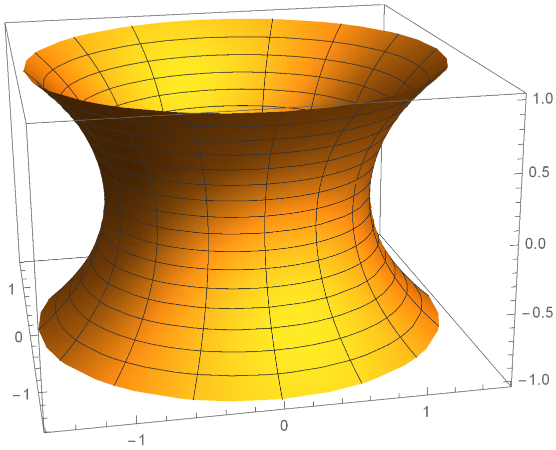


(a) Berechnen Sie einen Normalenvektor in p.

(b) Geben Sie eine Formel für T_pM an.

Name: Aufgabe 8

Der Kühlturm



$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 = \cosh(z)^2\right\}$$

lässt sich parametrisieren durch $\psi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cosh(z)\cos(\varphi) \\ \cosh(z)\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von K.

Hinweis: $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

NAME:	AUFGABE 9

Berechnen Sie

$$\iint_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos\left(1-x^2-y^2\right) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} \, d\left(x,y\right).$$

Name:	Aufgabe 10	

Sei $M = \psi\left(\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right] \times [0, 2\pi]\right)$ mit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\psi(t, s) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t)\sin(s) \\ 2\sin(2t)\cos\left(\frac{1}{5}\right) \\ \sin(2s) \end{pmatrix}.$$

Seien $\mathbf{n}$ die Einheitsnormalenvektoren auf M, außerhalb der y-Achse, die nach außen zeigen (siehe Bild); $\boldsymbol{\tau}$ sind die Einheitstangentialvektoren entlang einer Kurve.

(a) Geben Sie die Kurven Γ_i an, so dass für alle $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_M (\nabla \times g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \sum_{i \in I} \int_{\Gamma_i} g \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds.$$

(b) Skizzieren Sie die Kurven und ihre Richtungen im Bild.