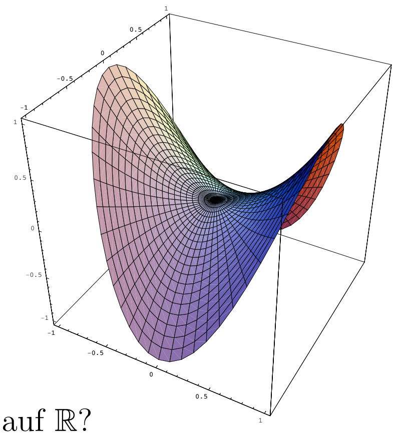
1. Ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $\|x\| = |x_1| + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, eine Norm auf $\mathbb{R}^3$?

2. Geben Sie ein Integral an für den Flächeninhalt von

$$\left\{(x, y, z)\,;\, z = x^2 - y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Sie brauchen das Integral nicht explizit zu berechnen.



3. Bildet $\mathcal{T} = \{(a, b)\,;\, a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \le b\}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$?

4. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind σ-Algebren auf X. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ ist eine σ-Algebra auf X;

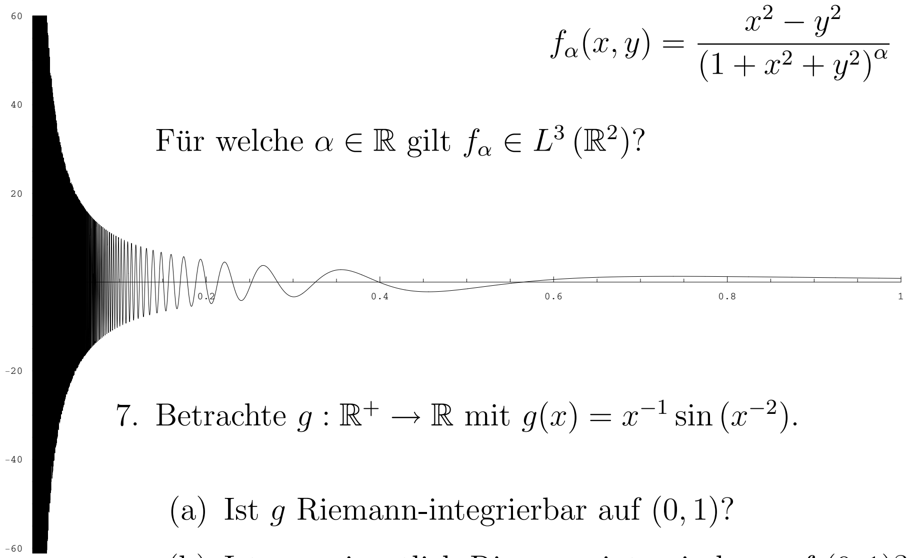
   (b) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist eine σ-Algebra auf X.

5. Seien $(X, \mathcal{A}_1)$ und $(Y, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume. Wann nennt man eine Funktion $f : X \to Y$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar?

6. Sei $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f_\alpha \in L^3(\mathbb{R}^2)$?



7. Betrachte $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^{-1} \sin(x^{-2})$.

   (a) Ist g Riemann-integrierbar auf $(0, 1)$?

   (b) Ist g uneigentlich Riemann-integrierbar auf $(0, 1)$?

   (c) Ist g Lebesgue-integrierbar auf $(0, 1)$?

8. Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^3}(D)$ von

$$D = \left\{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \le 2 + \sin z \text{ und } 0 \le z \le \pi\right\}.$$

9. Geben Sie die Hölder-Ungleichung an.

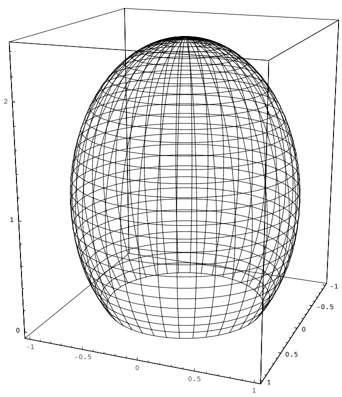
10. Berechnen Sie für

$$M = \left\{(x, y, z)\,; \tfrac{1}{2}\,(z-1)^2 + x^2 + y^2 = 1\right\}$$

das Integral

$$\iint_{M\cap[z>0]} \left(\nabla \times \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

wobei $\vec{n}$ der nach außen zeigende Normalenvektor auf M ist.



$M \cap [z > 0] = \{(x, y, z) \in M; z > 0\}$.