Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2014/2015**

Analysis 3
Übungsblatt 0
Version 3

Dieses Übungsblatt wird nicht bewertet und in den Übungen in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Volumen von K, wobei

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 \leq 2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale

Aufgabe 2: $\displaystyle\int_{[2,4]\times[1,3]\times[-1,3]} \frac{2z}{(x+y)^2} d(x, y, z)$

Aufgabe 3: $\displaystyle\int_{[2,3]^3} \frac{x^2 z^3}{1+y^2} d(x, y, z)$

Aufgabe 4: $\displaystyle\int_M xy d(x, y)$, wobei M die Menge in $[0, 3) \times \mathbb{R}$ zwischen den Kurven (x, x) und (x, x^2) ist.

Aufgabe 5: $\displaystyle\int_D \frac{\sin(x)}{x} d(x, y)$, wobei D die von dem Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ eingeschlossene Menge ist.

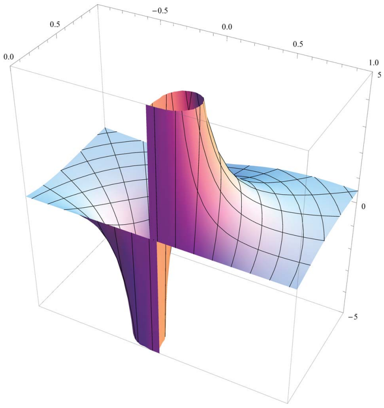
Aufgabe 6: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$ und $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx$.

Aufgabe 7: $\displaystyle\int_{[0,1]^2} (x + y) |x - y| \, d(x, y)$.

Aufgabe 8: $\displaystyle\int_M x^2 + y^2 d(x, y, z)$ mit $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

Aufgabe 9: $\displaystyle\int_M x^2 y d(x, y, z)$, wobei $M = \{(x, y, z); y^2 + z^2 \leq 3, 1 \leq x \leq 4, y, z > 0)\}$.

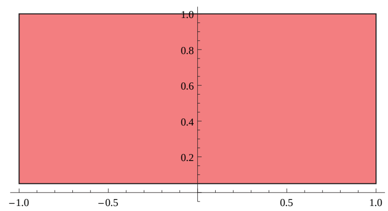
Für die nächsten Aufgaben betrachten wir die Funktion



$$f(x,y) = \frac{xy(1+xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

Wir wollen f über verschiedene Mengen integrieren und sehen ob sich $\int_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y)$ definieren lässt. Es gibt mehrere Hinweise, die helfen können. Wenn Sie einen Hinweis verwenden, sollen Sie diesen begründen.

Aufgabe 10: Definiere $E_\varepsilon = \{(x,y)\,;|x|<1 \text{ und } \varepsilon<y<1\}$. Berechnen Sie:



$E_{0.05}$

(a) $\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx$ für $y>0$.
Hinweis: $\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left(y\arctan\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y(1+xy)}{x^2+y^2}\right)=f(x,y)$.

(b) $\int_{\varepsilon}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy$ für $\varepsilon>0$.

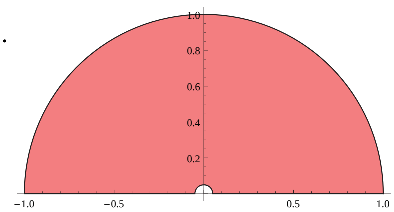
Hinweis:

$$\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\frac{1}{4}\left(\left(y^2-x^2\right)\arctan\left(\frac{x}{y}\right)-xy-\log\left(x^2+y^2\right)\right)=f(x,y)\,.$$

(c) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{E_\varepsilon} f(x,y)\,d(x,y)$.

(d) $\int_{\varepsilon}^{1}\int_{0}^{1} f(x,y)\,dxdy$ für $\varepsilon>0$.

Aufgabe 11: Definiere $A_\varepsilon = \{(x,y)\,;y>0 \text{ und } \varepsilon^2<x^2+y^2<1\}$.
Hinweis:



$A_{0.05}$

$$f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \tfrac{1}{2}r^{-2}\sin(2\varphi)+\tfrac{1}{4}\sin(2\varphi)^2\,.$$

Berechnen Sie:

(a) $\int_{\varepsilon}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr$ für $\varphi\in[0,\pi]$ und $\varepsilon>0$.

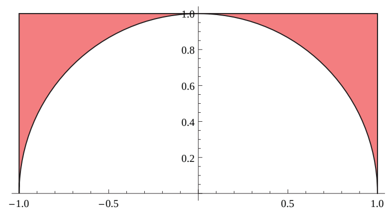
(b) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr$ für $\varphi\in[0,\pi]$.

(c) $\int_{0}^{\pi}\int_{\varepsilon}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi$ für $\varphi\in[0,\pi]$ und $\varepsilon>0$.

(d) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{A_\varepsilon} f(x,y)\,d(x,y)$.

Aufgabe 12: Zeigen Sie $\int_{E_0\setminus A_0} f(x,y)\,d(x,y)=\frac{3}{16}\pi-\frac{1}{2}$.
Hinweis: Für $D=\left\{(x,y)\,;\frac{1}{2}\sqrt{2}<x<1 \text{ und } \sqrt{1-x^2}<y<x\right\}$ *gilt*

$$\int_{E_0\setminus A_0} f(x,y)\,d(x,y)=4\int_D \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}d(x,y)\,.$$



$E_0 \setminus A_0$

Aufgabe 13: Was würden Sie für $\int_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y)$ angeben? Und was für $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y)$?

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**