**Prof. Guido Sweers** **WS 2014/2015**
**Jan M. Krämer**

**Analysis 3**
**Übungsblatt 1 v2**

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 15. Oktober um 12 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\forall_A \forall_B : \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

(b) $\forall_A \forall_B : \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

**Aufgabe 2:** Welche Elemente hat die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \cup \{1\})$?

**Aufgabe 3 (5 Punkte):** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = e^{ix}$ und

$$\mathcal{T} := \{f^{-1}(A); A \subset \mathbb{C} \text{ offen }\}.$$

*Hinweis: Da $A$ eine Menge ist, ist mit $f^{-1}(A)$ das Urbild der Menge $A$ unter der Funktion $f$ gemeint, d.h. $f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) \in A\}$.*

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nicht die Hausdorff-Eigenschaft hat.

**Aufgabe 4:** Wir betrachten für $X = \{1, 2, 3, 4\}$ die folgenden Mengensysteme:

- $M_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$
- $M_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $M_3 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

(a) Welche der Mengensysteme sind Topologien?

(b) Welche der Mengensysteme sind Basis einer Topologie? Geben Sie auch die dazugehörigen Topologien an.

(c) Welche der Topologien (auch die von einer Basis erzeugten) haben die Hausdorff-Eigenschaft?

**Aufgabe 5 (5 Punkte):** Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen in der Borel-$\sigma$-Algebra der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ sind.

(a) $(0, 1)$ (b) $[0, 1)$ (c) $\{0\}$ (d) $\mathbb{Q}$

**Aufgabe 6 (5 Punkte):** Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei $\sigma$-Algebren über $X$, so dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ebenfalls eine $\sigma$-Algebra ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, oder $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ gilt.

**Aufgabe 7:** Sei $f : A \to B$ eine Funktion und $\mathcal{B}$ eine $\sigma$-Algebra auf B. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(X); X \in \mathcal{B}\}$$

eine $\sigma$-Algebra auf $A$ ist.

**Aufgabe 8:** Man definiert für $f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ die Menge

$$A_f := \bigcup_{k\in\mathbb{Z} \text{ mit } f(k)=1} (k, k+1].$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \left\{A_f; f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}\right\}$ eine $\sigma$-Algebra über $\mathbb{R}$ ist.

**Aufgabe 9:** Wir betrachten $d_1(x,y) = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right|$ und $d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

(a) Beweisen Sie, dass $d_1$ und $d_2$ Metriken auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $d_1$ und $d_2$ jeweils die Standardtopologie erzeugen.

(c) Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{R}, d_1)$ und $(\mathbb{R}, d_2)$ vollständig sind. Dabei heißt ein metrischer Raum $(\mathbb{R}, d)$ vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

*Hinweis: Bei der Definition der Begriffe Cauchyfolge und Konvergenz in einem metrischen Raum wird die Metrik* $d(.,.)$ *genauso verwendet wie die Norm im normierten Raum.*

**Aufgabe 10:** Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Standardtopologie. Zeigen Sie, dass die Topologie auf $\mathbb{R}^2$ mit der Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ übereinstimmt.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**