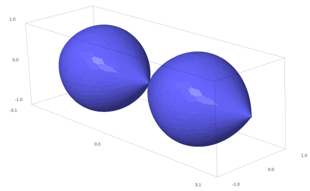
Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2014/2015

Analysis 3
Übungsblatt 10

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 17. Dezember um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.



Aufgabe 1: Integrieren sie die Funktion $f(x,y,z) = |\cos(z)|$ über

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 = \sin^2(z), \text{ wobei } z \in [-\pi, \pi]\right\}.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $U_x \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $f : U_x \to \mathbb{R}^{n-m}$ gibt, so dass

$$\operatorname{Rang}(\nabla f) = n - m \text{ und } M \cap U_x = \{y \in U_x \; ; \; f(y) = 0\}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Berechnen Sie die Oberfläche von $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 = z^2 \leq 1\}$. Skizzieren Sie die Menge.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie, dass

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + xy - y - z = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z = 0\right\}$$

eine Mannigfaltigkeit ist.

(b) Sei $\phi(t) = (t, t^2, t^3)$. Zeigen Sie, dass $\phi(\mathbb{R}) = M$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Fläche von

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 6: Gegeben Sei $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times (-1,1) \; ; \; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Berechnen Sie die Fläche von H.

Aufgabe 7: Wir betrachten $M = \{x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^4 \; ; \; x_4x_3 - x_2^2 = x_1x_2 - x_3^2 = x_1x_4 - x_2x_3 = 0\}$. Gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist?

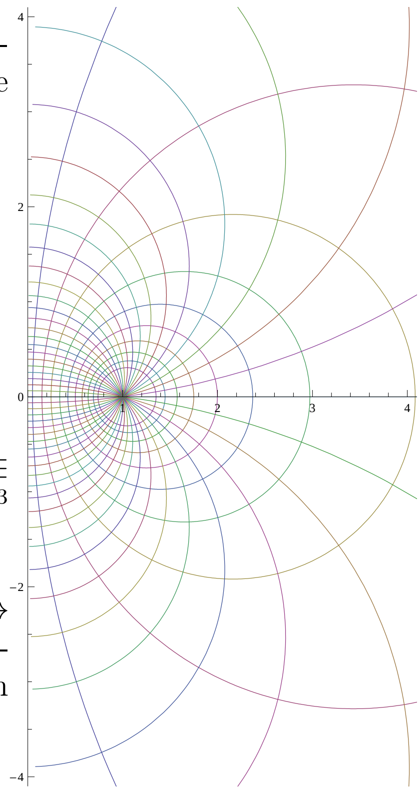
Aufgabe 8 (5 Punkte): Berechnen Sie

$$\mathrm{Vol}_3^{(5)}\left(\{t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3 \in \mathbb{R}^5 \ ; \ 0 \le t_i \ \forall_i \text{ und } t_1 + t_2 + t_3 < 1\}\right)$$

für $\alpha_1 = (1,0,1,0,1)$, $\alpha_2 = (0,1,0,1,1)$ und $\alpha_3 = (1,1,1,0,1)$.

Aufgabe 9: In Anwendungen aus der Elektrotechnik, zum Beispiel bei der Beschreibung eines Magnetfeldes um eine kreisförmige Spule, werden manchmal Toruskoordinaten verwendet:

$$x = \frac{\sinh(r)\cos(\beta)}{\cosh(r) - \cos(\alpha)},$$
$$y = \frac{\sinh(r)\sin(\beta)}{\cosh(r) - \cos(\alpha)},$$
$$z = \frac{\sin(\alpha)}{\cosh(r) - \cos(\alpha)}.$$



Toruskoordinaten für $\beta = 0$

(a) Machen Sie überzeugend klar, warum man mit $(r, \alpha, \beta) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \times (-\pi, \pi]$ fast jeden Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ erreichen kann.

(b) Zeigen Sie, dass man mit der Abbildung $\Phi : (r, \alpha, \beta) \mapsto (x, y, z)$ in fast jedem Punkt $(r_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^3$ lokal einen Diffeomorphismus bilden kann. In welcher Nullmenge läßt sich lokal kein solcher Diffeomorphismus bilden?

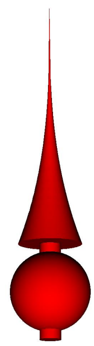
(c) Berechnen Sie $\det \Phi'$ und $\det\left(\Phi^{inv}\right)'$, wo diese definiert sind.

Aufgabe 10 (10 Punkte): Auf einem Weihnachtsbaum ist eine Spitze angebracht. Der kugelförmige Teil wird beschrieben durch

$$\frac{1}{9} \le x^2 + y^2 = -\frac{11}{16} - z^2 - 3z,$$

der obere Teil durch

$$0 \le z = 8 - 8\sqrt[6]{x^2 + y^2}.$$



(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des kugelförmigen Teils.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des oberen Teils.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**