Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2014/2015

Analysis 3
Übungsblatt 11
Version 2

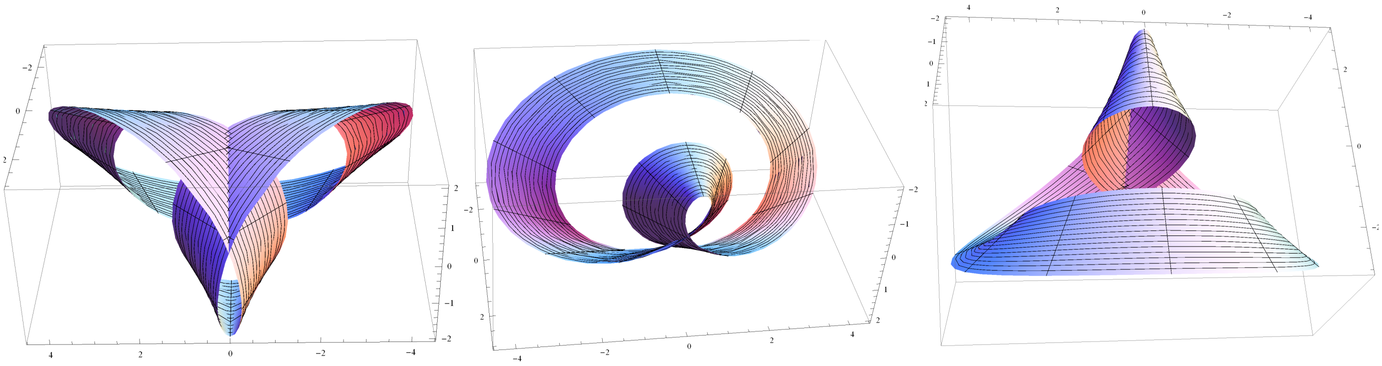
Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 7. Januar um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1: Wir betrachten $X := (-2\pi, 2\pi) \times (1,3)$ und $f : X \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2\sin(x) - y\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y\sin\left(\frac{x}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

(a) Ist f eine Immersion?

(b) Unten sehen Sie $f(X)$ aus verschiedenen Blickwinkeln. Argumentieren Sie, ob $f(X)$ eine Mannigfaltigkeit ist.



Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es lokal als Graph einer C^1-Funktion $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ geschrieben werden kann.

Das heißt an jedem Punkt $y \in M$ existieren, nach eventuellem Umsortieren der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ und eine C^1-Funktion $F : U \to V$, so dass $y \in U \times V$ und

$$M \cap (U \times V) = \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x \in U\}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte): Wir betrachten die Kurven $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $f(t) = (\cos(t), \sin(2t))$ und $g(t) = (\cos(2t), \sin(t))$.

(a) Skizzieren Sie das Bild der Kurven.

(b) Handelt es sich bei f und g um Immersionen?

(c) Handelt es sich bei $f(\mathbb{R})$ und $g(\mathbb{R})$ um Mannigfaltigkeiten?

Aufgabe 4: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(a) Beweisen Sie, dass T_pM ein m-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass TM eine 2m-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$ ist.

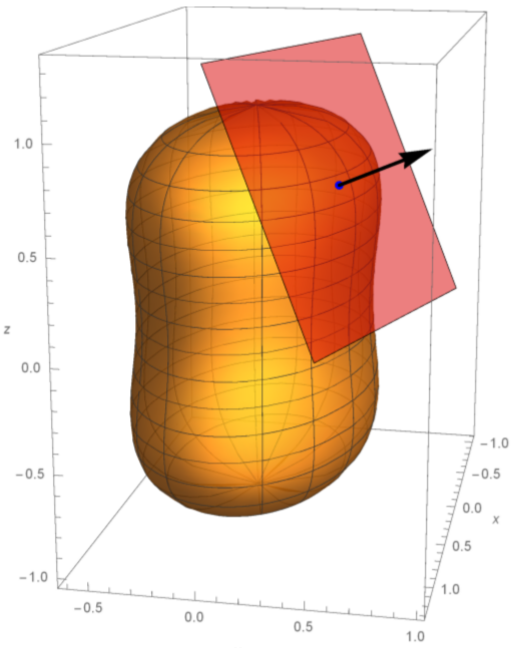
Aufgabe 5 (6 Punkte): Wir betrachten $M = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \|x\| = 1\}$.

(a) Sei $p = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in M$. Geben Sie den Tangentialraum T_pM an.

(b) Geben Sie den Kotangentialraum T_p^*M an.

Aufgabe 6 (8 Punkte): Betrachten wir die Mannigfaltigkeit

$$H = \left\{(x, y, z)\,; x^2 + 3y^2 + 2z^4 = 1 + z^2\right\}.$$



(a) Definieren Sie einen Diffeomorphismus

$$\Phi : B_{1/3}(0, 0, 1) \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$\Phi\left(H \cap B_{1/3}(0, 0, 1)\right) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

(b) Definieren Sie eine Immersion

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to H \cap B_{1/3}(0, 0, 1).$$

(c) Berechnen Sie den äußeren Normalenvektor zu H in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

(d) Berechnen Sie einen Basis für den Tangentialraum zu H in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Aufgabe 7: Sei $M = \{(v, w, x, y, z)\,; v^2 + w^2 = x^2 + y^2 = 3 - z^2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M die Kurven $k_{\alpha,\beta} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^5$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ enthält:

$$k_{\alpha,\beta}(t) = \left(t\cos\alpha, t\sin\alpha, t\cos\beta, t\sin\beta, \sqrt{3 - t^2}\right).$$

(b) Zeigen Sie $p := k_{\alpha,\beta}(0) = \left(0, 0, 0, 0, \sqrt{3}\right)$ und dass

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis für den kleinsten Raum ist, der $\left\{k'_{\alpha,\beta}(0)\,; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ enthält.

(c) Ist M eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit?

(d) Zeigen Sie, dass $\tilde{M} = \{(v, w, x, y, z)\,; 0 < v^2 + w^2 = x^2 + y^2 = 3 - z^2\}$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.

(e) Definieren Sie für eine passende Zahl $\varepsilon > 0$ eine Immersion

$$f : B_\varepsilon(0, 0, 0) \to M \cap B_1(1, 1, 1, 1, 1).$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**