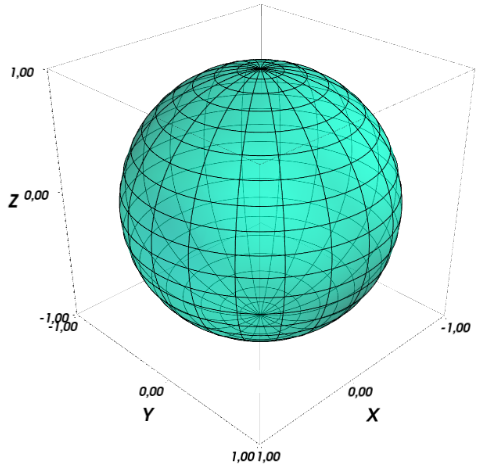
Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2014/2015

Analysis 3
Übungsblatt 12

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 14. Januar um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1:



(a) Zeigen Sie, dass die Sphäre

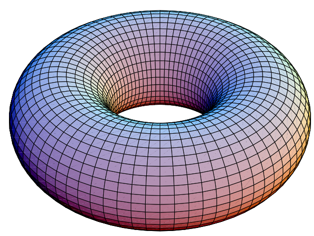
$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \|x\| = 1\}$$

einen Atlas aus zwei Karten besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die Sphäre keinen Atlas aus einer Karte besitzt.

(c) Skizzieren Sie die durch $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ und $Y(x, y, z) = (-z, 0, x)$ definierten Vektorfelder auf S^2.

Aufgabe 2:



(a) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Torus, der durch $g_{2,1}$ beschrieben wird.

(b) Zeigen Sie, dass der Torus einen Atlas aus zwei Karten besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Definiere für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^7$

$$w_1(a, b, c) = a_1b_2c_5 - a_2b_1c_5 + a_2b_5c_1 - a_5b_2c_1 + a_5b_1c_2 - a_1b_5c_2,$$
$$w_2(a, b, c, d) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_7} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)} b_{\sigma(3)} c_{\sigma(4)} d_{\sigma(7)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $w_1 \in \Lambda^3((\mathbb{R}^7)^*)$ und $w_2 \in \Lambda^4((\mathbb{R}^7)^*)$.

(b) Berechnen Sie $w_1 \wedge w_2$. *Hinweis: Erst denken, dann rechnen.*

Aufgabe 4: Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ und sei $V = \{\sum_{i=3}^n c_i b^i \ ; \ c_i \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie: ω_1, definiert durch $\omega_1(\nu_1, \ldots, \nu^{n-2}) = \det(\nu^1, \ldots, \nu^{n-2}, b^1, b^2)$, ist eine äußere $n-2$-Form, das heißt: $\omega_1 \in \Lambda^{n-2}(V^*)$.

(b) Zeigen Sie: $\{\omega_1\}$ ist eine Basis für $\Lambda^{n-2}(V^*)$.

(c) Gibt es $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $\det(\nu^1, \ldots, \nu^{n-2}, b^{n-1}, b^n) = c \det(\nu^1, \ldots, \nu^{n-2}, b^1, b^2)$ für alle $\nu^i \in V$?

Aufgabe 5 (10 Punkte): Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1(V^*)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ ist linear unabhängig.

(b) $\omega_1 \wedge \ldots \wedge w_k \neq 0$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**